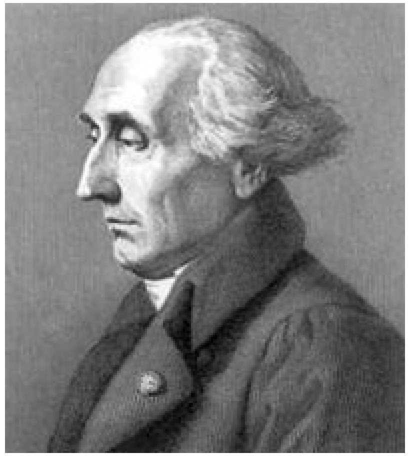
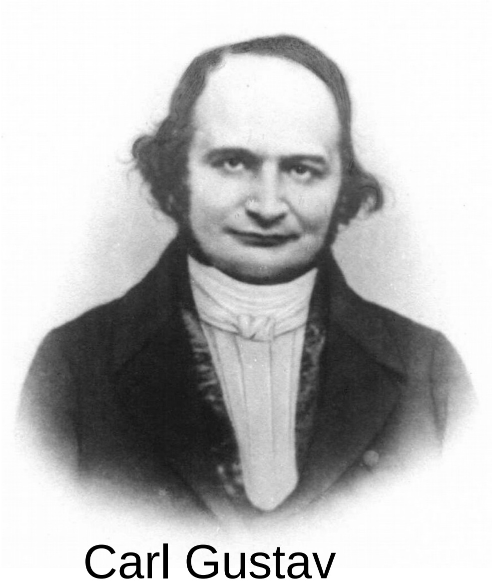
Espaço pra imagem da
câmera na live

Georg Friedrich
Bernhard
Riemann
(1826-1866)



Joseph-Louis
Lagrange
(1736-1813)



Carl Gustav
Jakob Jacobi
(1804-1851)

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez
segundos até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios para aqueles acabei não tendo tempo nas últimas 7 semanas (sobre os assuntos que caem na P2), ou tirar dúvidas.

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

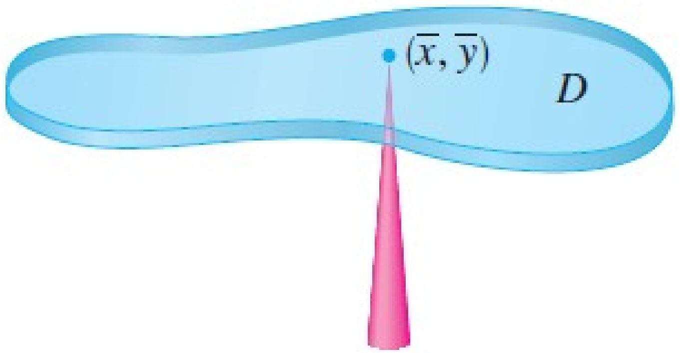
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: centro de massa de uma lâmina D de densidade de massa por área $\rho(x, y)$:

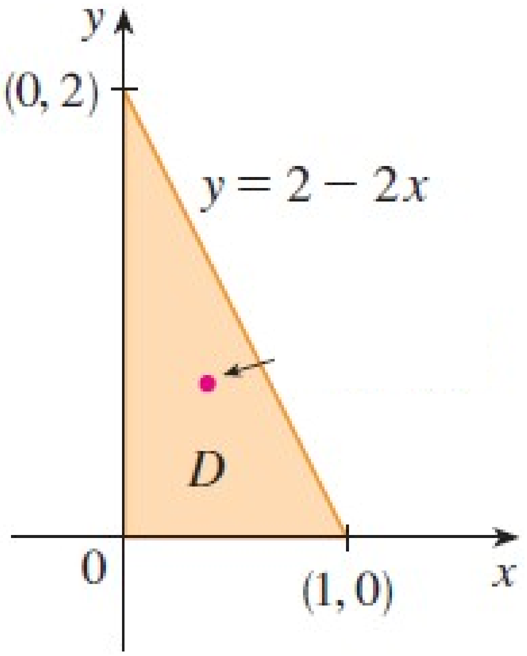
$\bar{x} = 1/m \cdot \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA$,

$\bar{y} = 1/m \cdot \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$,

onde $m = \iint_D \rho(x, y)\,dA$



Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2), se a função densidade é $= 1 + 3x + y$.



$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2-2x} 1 + 3x + y\;dy\,dx$

$= \int_0^1 [y + 3xy + y^2/2]_0^{2-2x}\,dx = \int_0^1 [(2-2x) + 3x(2-2x) + (2-2x)^2/2]\,dx$

$= \int_0^1 2 - 2x + 6x - 6x^2 + 2 - 4x + 2x^2\,dx = 4\int_0^1 1 - x^2\,dx = 4[x - x^3/3]_0^1$

$= 4[x - x^3/3]_0^1 = 8/3$

$\bar{x} = 1/m \cdot \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA = 3/8 \int_0^1\int_0^{2-2x} x(1 + 3x + y)\;dy\,dx$

$= 3/8 \cdot 4\int_0^1 x - x^3\,dx = 3/2 \cdot [x^2/2 - x^4/4]_0^1 = 3/8$

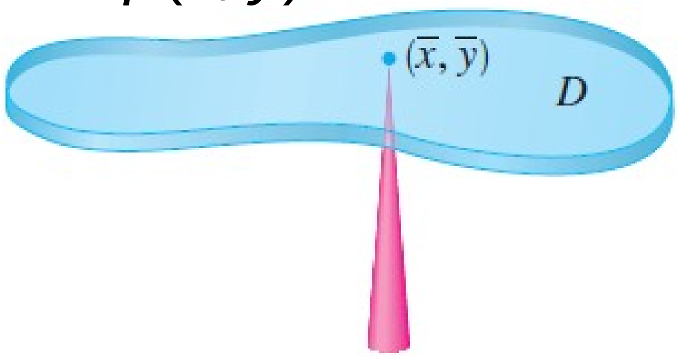
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: centro de massa de uma lâmina D de densidade de massa por área $\rho(x, y)$:

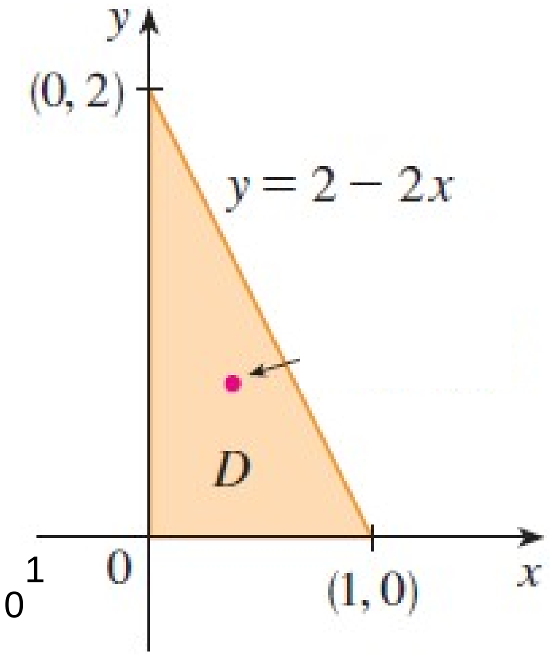
$\bar{x} = 1/m \cdot \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA$,

$\bar{y} = 1/m \cdot \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$,

onde $m = \iint_D \rho(x, y)\,dA$



Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2), se a função densidade é $= 1 + 3x + y$.



$m = 8/3$

$\bar{y} = 1/m \cdot \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA = 3/8 \int_0^1\int_0^{2-2x} y(1 + 3x + y)\,dy\,dx$

$= 3/8 \int_0^1\int_0^{2-2x} y + 3xy + y^2\,dy\,dx = 3/8 \int_0^1 [y^2/2 + 3xy^2/2 + y^3/3]_0^{2-2x}\,dx$

$= 3/8 \int_0^1 (2-2x)^2/2 + 3x(2-2x)^2/2 + (2-2x)^3/3\,dx$

$= 3/8 \int_0^1 2-4x+2x^2 + 6x-12x^2+6x^3 + (8-24x+24x^2-8x)^3/3\,dx$

$= 3/8 \int_0^1 14/3 - 6x - 2x^2 + 10x^3/3\,dx = 3/8\,[14x/3 - 3x^2 - 2x^3/3 + 5x^4/6]_0^1$

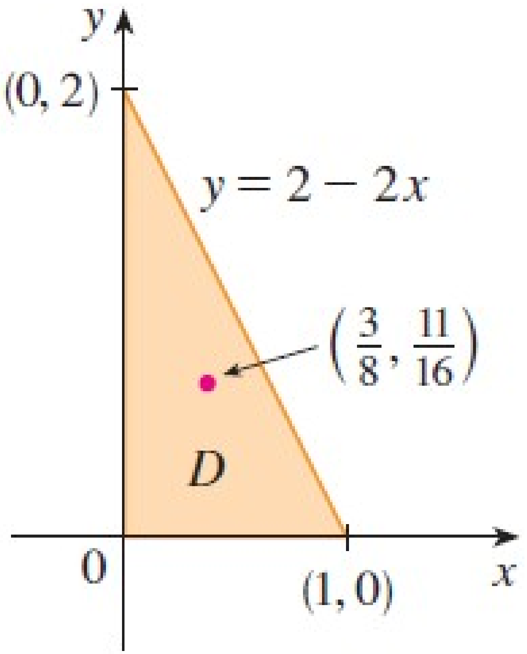
$= 3/8\,(14/3 - 3 - 2/3 + 5/6) = 1/16\,(28 - 18 - 4 + 5) = 11/16$

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2), se a função densidade é $= 1 + 3x + y$.

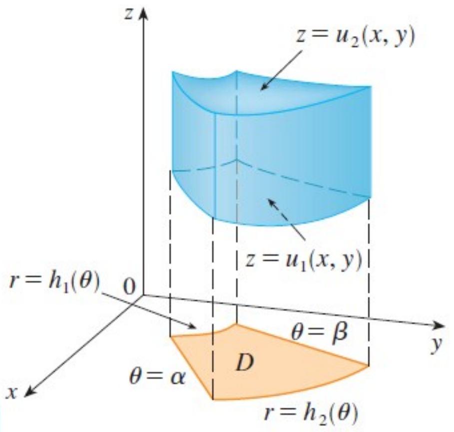
$m = 8/3$

Centro de massa: (3/8, 11/16)



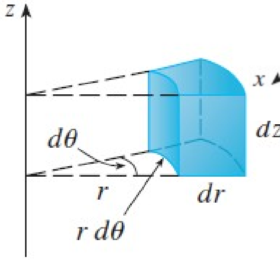
Espaço pra imagem da câmera na live

Integral tripla em coordenadas cilíndricas:



$$\iint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)} \int_{u1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{u2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, \underbrace{r\,dz\,dr\,d\theta}_{dV}$$

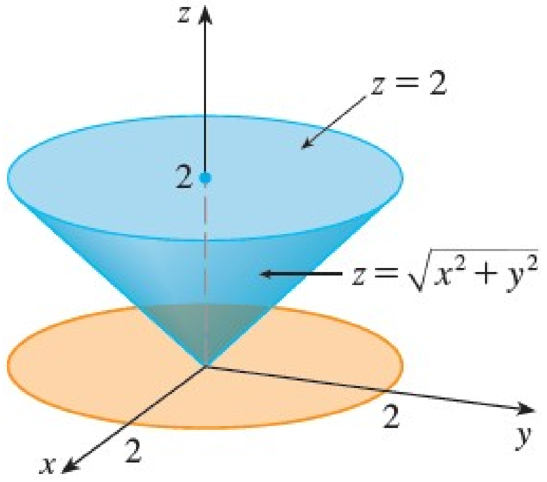


Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2\int_r^2 r^3\, dz\, dr = 2\pi \int_0^2 [zr^3]_r^2\, dr = 2\pi \int_0^2 r^3(2 - r)\, dr$$

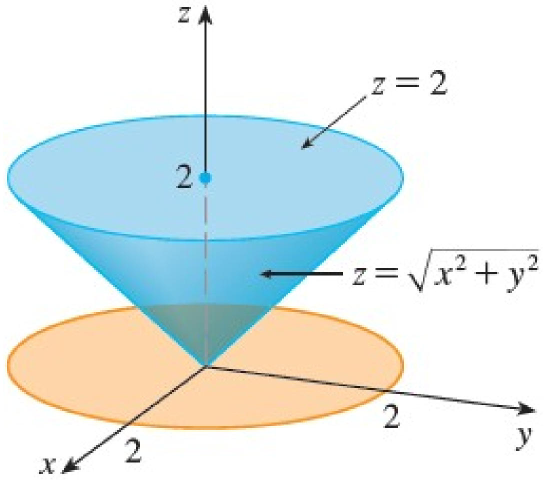
$$= 2\pi \int_0^2 2r^3 - r^4\, dr = 2\pi\, [r^4/2 - r^5/5]_0^2 = 16\pi/5$$



Espaço pra imagem da câmera na live

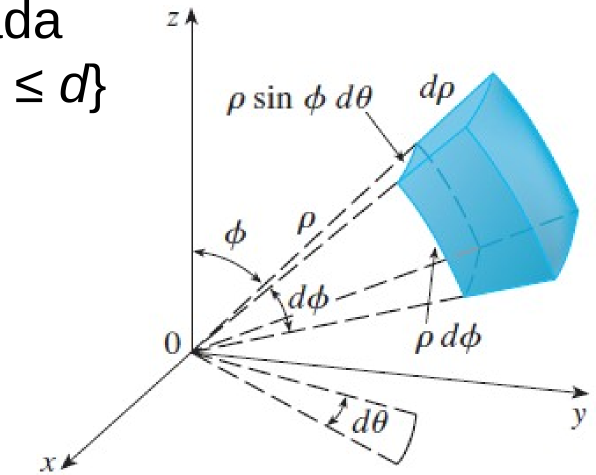
Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$

solução: $16\pi/5$



Espaço pra imagem da câmera na live

Integral tripla sobre uma cunha esférica dada por $E = \{(\rho, \theta, \phi) | \; a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$ em coordenadas esféricas:



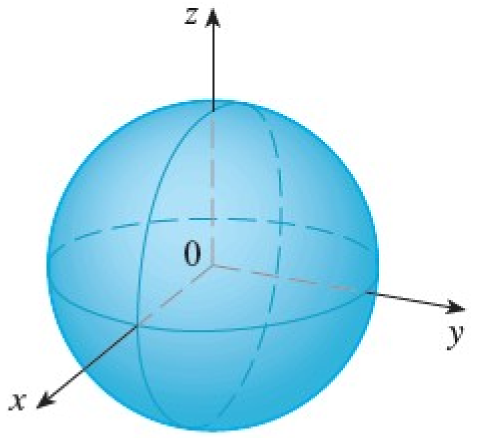
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b$$
$$f(\rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \rho \cos \phi)$$
$$\underbrace{\rho^2 \text{ sen } \phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi}_{dV}$$

Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, onde B é a bola unitária: $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \text{ sen } \phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen } \phi \; d\phi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = 2\pi \, [-\cos \phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \, [e^{\rho^3}/3]_0^1$$

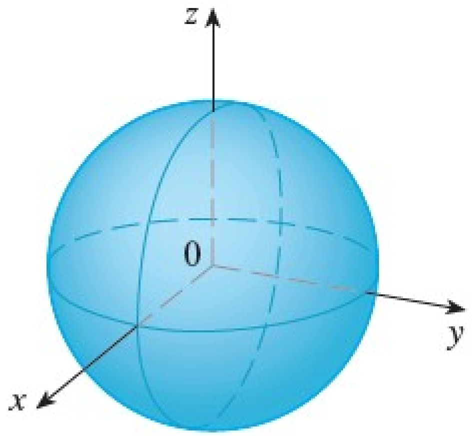
$$= 2\pi \cdot 2\,(e - 1)/3 = 4\pi/3 \cdot (e - 1)$$



Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$, onde B é a bola unitária: $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

solução: $4\pi/3 \cdot (e - 1)$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Para uma mudança de variáveis numa integral dupla T: $(u, v) \Rightarrow (x, y)$, a integral sobre uma região $S = T(R)$ é:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv}_{dA},$$

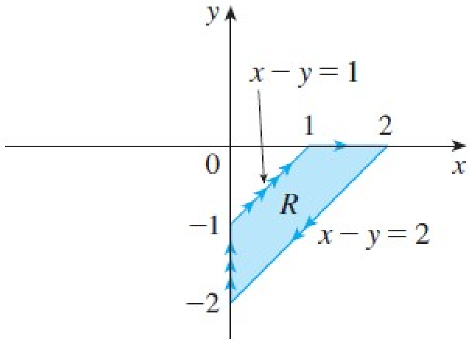
onde $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde
R é a região trapezoidal com vértices (1, 0), (2, 0), (0, -2) e (0, -1).

$u = x + y$, $v = x - y$ <=> $x = ½(u + v)$, $y = ½(u - v)$

=> $\partial x/\partial u = ½$, $\partial x/\partial v = ½$, $\partial y/\partial u = ½$, $\partial y/\partial v = -½$
=> Determinante = ½·½ - ½·(-½) = ½

vértices: (1, 1), (2, 2), (-2, 2), (-1, 1)
=> retas limites: $v = u$, $v = 2$, $v = -u$, $v = 1$



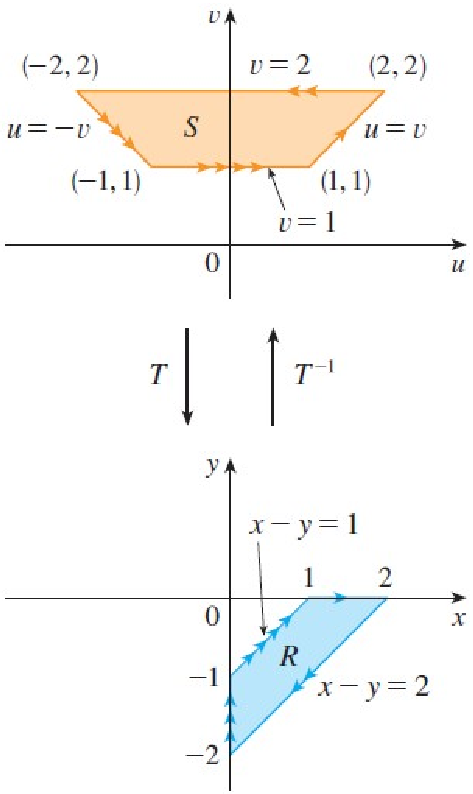
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Para uma mudança de variáveis numa integral dupla T: $(u, v) \Rightarrow (x, y)$, a integral sobre uma região $S = T(R)$ é:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))\, \underbrace{\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv}_{dA},$$

onde
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde
R é a região trapezoidal com vértices (1, 0), (2, 0), (0, -2) e (0, -1).



$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\, \tfrac{1}{2}\, du\, dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{u/v}\right]_{-v}^{v} dv$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{v/v} - ve^{-v/v}\right] dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 v\left[e - e^{-1}\right] dv = \tfrac{1}{2}\left[e - e^{-1}\right] \int_1^2 v\, dv$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[e - e^{-1}\right] \left[v^2/2\right]_1^2 = 3(e - e^{-1})/4$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices (1, 0), (2, 0), (0, -2) e (0, -1).

solução: $\frac{3}{4}\cdot(e - e^{-1})$