



Laboratório de Mecânica

SUBSÍDIOS PARA O ENSINO DE FÍSICA EXPERIMENTAL

Paulo Lima Junior
Maria Teresinha Xavier Silva
Fernando Lang da Silveira
Eliane Angela Veit

Paulo Lima Junior
Maria Teresinha Xavier Silva
Fernando Lang da Silveira
Eliane Angela Veit

Laboratório de mecânica

Subsídios para o ensino de Física experimental



Porto Alegre
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processamento Técnico da Biblioteca Professora
Ruth de Souza Schneider - Instituto de Física/UFRGS

L123 Laboratório de mecânica : subsídios para o ensino de Física
experimental [recurso eletrônico]. / Paulo Lima Junior ... [et al.]. –
Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2013.

Modo de acesso:

<http://www.if.ufrgs.br/cref/labmecanica/Lima_Jr_et_al_2013.pdf>.

ISBN 978-85-64948-08-2

1. Ensino de Física 2. Ensino superior 3. Física experimental 4.
Mecânica I. Lima Júnior, Paulo II. Título

PACS: 01.40.E

PREFÁCIO AO PROFESSOR

Este livro reúne textos de apoio elaborados para orientar estudantes de graduação nas atividades experimentais de mecânica realizadas nos primeiros semestres de cursos de ciências e engenharias. Tais textos foram concebidos para constituir bibliografia básica da disciplina, mas também poderão ser incorporados de maneira mais esporádica.

Qualquer professor de Física deve saber que há já muitos materiais voltados para laboratórios de ensino. Porém, em contraste com a maioria dos textos disponíveis, buscamos assumir aqui dois compromissos relativamente atuais. O primeiro desses compromissos é o de empregar, de maneira inteligível, os procedimentos e definições mais atuais da metrologia nos laboratórios de ensino de Física. Em segundo lugar, desejamos proporcionar aos estudantes contato com visões de ciência menos ingênuas que a tradicional crença na comprovação científica.

Evidentemente, esses dois objetivos não poderiam ser realizados sem um trabalho cuidadoso por parte do professor que, em vista da infraestrutura que tem à sua disposição, deve planejar cuidadosamente as atividades experimentais que serão propostas aos estudantes. Para atingir melhor o que se propõe nesse livro, sugerimos ao professor dar preferência às atividades experimentais que favoreçam a avaliação do domínio de validade de modelos científicos (em oposição à pretensão ingênua apresentada em muitos roteiros de laboratório de comprovar as leis da natureza a partir de dados experimentais).

Por exemplo, em vez de solicitar aos alunos que meçam aceleração em função da força resultante aplicada a um carrinho de massa m que desliza na horizontal sem perdas sensíveis de energia, sugerimos defrontá-los com situações em que os modelos mais simples são propensos a falhar. Assim, os alunos poderiam fazer o experimento do carrinho de massa m com o trilho desnivelado, analisar situações em que os corpos são

puxados por forças mais ou menos desconhecidas, avaliar o domínio de validade da lei de Hooke (colocando cada vez mais carga em uma mola até que a relação força-elongação seja desviada sensivelmente do regime linear) ou avaliar as variações do período de um pêndulo que oscila com amplitudes não desprezíveis.

SOBRE OS AUTORES

Paulo Lima Junior é doutor em Ensino de Física e coordenador dos *Laboratórios de Ensino de Física* (Instituto de Física – UFRGS). O propósito central da sua atuação profissional tem sido o de contribuir para a atualização das atividades experimentais ministradas aos alunos de graduação.

Maria Teresinha Xavier Silva é professora adjunta do Instituto de Física da UFRGS e possui ampla experiência no ensino de mecânica básica (teórica e experimental) para alunos de graduação. Mais recentemente, tem atuado na formação inicial de professores em instrumentação para laboratórios de ensino na coordenação do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).

Fernando Lang da Silveira é doutor em educação e professor associado do Instituto de Física da UFRGS. Tem experiência na área de Física, com ênfase em pesquisa em ensino de Física, atuando principalmente nos temas: métodos quantitativos aplicados à pesquisa, história e filosofia da ciência, tópicos em física geral.

Eliane Veit é doutora em ciências, professora associada do Instituto de Física da UFRGS e membro permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física desta instituição. Tem experiência em modelagem científica, na incorporação de novas tecnologias no ensino de Física e ensino na modalidade à distância (EAD).

SUMÁRIO

UNIDADE I – Fundamentos de Metrologia	1
Valor verdadeiro, precisão e exatidão	1
Os conceitos de erro e incerteza	7
Incerteza e algarismos significativos	15
A avaliação da incerteza do tipo A	21
A avaliação da incerteza do tipo B	33
Medições indiretas e propagação da incerteza	39
UNIDADE II – Relação Teoria-Experimento	45
Crítica à crença na comprovação científica	45
Da comprovação à modelagem científica	55
UNIDADE III – Análise Gráfica	65
Introdução à análise gráfica	65
Linearizando relações não-lineares	77
APÊNDICE A	87
Método numérico para propagação da incerteza	87
APÊNDICE B	95
Expressão analítica para a lei de propagação	95
APÊNDICE C	97
Expressões tabeladas para propagação da incerteza	97
APÊNDICE D	101
Procedimentos do tipo B: Uma visão mais detalhada	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107

UNIDADE I – Fundamentos de Metrologia

Valor verdadeiro, precisão e exatidão

O valor verdadeiro de uma grandeza física experimental às vezes pode ser considerado o objetivo final do processo de medição. Por essa razão, o valor verdadeiro também pode ser chamado valor alvo. Uma das maneiras de avaliar a qualidade do resultado de uma medição é fornecida pelo conceito de exatidão, que se refere à proximidade da medida com seu valor alvo. Mas outra qualidade muito importante de uma medida experimental é seu grau de precisão, que se refere à dispersão entre medidas repetidas sob as mesmas condições. Medidas precisas são menos dispersas, ou seja, quando repetidas, elas tendem a fornecer os mesmos resultados (mas não necessariamente resultados mais próximos do valor alvo). Assim, diferente do que ocorre com a exatidão, a avaliação da precisão de uma medida não leva em consideração o valor verdadeiro.

Por essas razões, antes de se discutir os conceitos de precisão e exatidão, é fundamental ter uma boa compreensão do conceito de valor verdadeiro e suas limitações. A esse respeito, na maioria das situações, podemos assumir que a grandeza experimental possui um único valor verdadeiro bem definido¹. O que consideramos estar limitada é a nossa capacidade de conhecê-lo exatamente, ainda que por meio de medições extremamente cuidadosas.

Todo valor verdadeiro supõe um modelo

À primeira vista, o pressuposto de que todas as grandezas físicas possuem um valor definido pode parecer uma tremenda obviedade. Por exemplo, não lhe parece óbvio que o planeta Terra possua uma massa bem definida? Que, ao ligar uma lâmpada, seu

¹ A rigor, como será possível perceber mais a diante neste texto, há algumas situações em que não faz sentido algum sustentar que o alvo de uma medição é um (único) valor verdadeiro, mas um conjunto de valores, isto é, uma distribuição de valores verdadeiros. Neste texto, fazemos críticas ao conceito de valor verdadeiro único e bem definido sem rejeitá-lo completamente.

filamento está sendo percorrido por uma corrente eficaz bem definida? Que a estatura de uma pessoa possua um valor bem definido? Na verdade, não é tão óbvio assim. A rigor, todas as grandezas experimentais são especificadas por meio de modelos. Nesse sentido, o valor (verdadeiro) de uma grandeza física só pode ser considerado bem definido depois que algum modelo foi adotado.

Por exemplo, ao tomar um paquímetro para medir “o” diâmetro de uma bolinha de metal, estamos pressupondo que essa bolinha seja perfeitamente esférica, quando, na verdade, ela pode ser elipsoidal, oval, irregular... A rigor, essa bolinha só terá verdadeiramente um valor de diâmetro se ela for esférica, não é verdade? Assim, mesmo nas medições mais simples, é impossível determinar o mensurando sem adotar alguns pressupostos e idealizações.

Se até o diâmetro de uma bolinha depende de um modelo para que se possa falar em seu valor verdadeiro, o que podemos dizer sobre

Todas as grandezas experimentais são determinadas por meio de modelos

as medições realizadas nas indústrias modernas e nos laboratórios de pesquisa? Não são essas medições mais sofisticadas que o nosso exemplo? Assim, podemos afirmar com segurança que todos os processos de medição dependem de pressupostos e idealizações para serem realizados e todas as grandezas experimentais são determinadas por meio de modelos.

O desconhecimento do valor verdadeiro

Outro problema com respeito ao valor verdadeiro de uma grandeza experimental é que esse valor é sempre desconhecido (VUOLO, 1996). As únicas grandezas que têm seus valores verdadeiros

O valor verdadeiro de uma grandeza experimental é sempre desconhecido

conhecidos exatamente são aquelas que não dependem de dados experimentais para serem determinadas. Por exemplo: a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência ($\pi = 3,1416\dots$), a razão áurea ($\varphi = 1,6183\dots$), o número de Euler

($e = 2,7183\dots$). Grandezas experimentais são diferentes porque dependem de dados experimentais para serem determinadas. Por exemplo: a constante da gravitação universal, a corrente em um circuito elétrico, a temperatura no interior de um calorímetro, o índice de refração de um material específico.

O que define uma grandeza experimental é a necessidade de recorrer a dados experimentais para determiná-la. Portanto, padrões internacionais de medida não podem ser considerados grandezas experimentais (segundo essa definição). Por exemplo, até 1983, o padrão internacional de comprimento era a distância entre duas marcações feitas em uma barra de platina iridiada mantida até hoje no Bureau International des Poids et Mesures (BIPM, França). Considerando isso, se perguntássemos nessa época “de quanto é a distância entre as marcações na barra de platina iridiada mantida no BIPM?” qualquer pessoa deve ser capaz de responder sem fazer nenhuma medição, pois, por definição, a distância entre essas marcações era igual a 1 metro exatamente! Dessa maneira, não podemos considerar que os padrões internacionais de medida sejam grandezas experimentais.

Enfim, séculos de prática científica experimental nos levam a reconhecer que todos os processos de medição possuem alguma incerteza associada. Em outras palavras, nunca podemos confiar completamente no resultado de uma medição. Por esse motivo, reconhecemos que o valor verdadeiro de qualquer grandeza experimental é sempre desconhecido e que os processos de medição sempre podem ser aprimorados.

Avaliando a qualidade da medição

Como foi antecipado no início deste texto, exatidão e precisão são aspectos diferentes, mas fundamentais, que precisam ser levados em consideração quando desejamos avaliar a qualidade do resultado de uma medição. Em metrologia, a ciência da medição, o conceito de exatidão (ou acuidade) refere-se ao grau de concordância de uma medida

com seu valor alvo. Ou seja, quanto mais próxima do valor verdadeiro correspondente, mais exata é a medida.

O conceito precisão (ou fidedignidade, ou reprodutibilidade), em contrapartida, refere-se somente ao grau de dispersão da medida quando repetida sob as mesmas condições. Em outras palavras, uma medida é precisa se, repetida diversas vezes, apresentar resultados semelhantes.

Como exatidão e precisão são qualidades bastante diferentes, é possível que o resultado de uma medição seja exato e preciso, exato e impreciso, inexato e preciso ou inexato e impreciso.

Analogia com o tiro ao alvo

Para compreender melhor os conceitos de exatidão e precisão, é usual fazer analogia entre o processo de medição e um exercício de tiro ao alvo. Na base dessa analogia está a ideia de que, assim como o objetivo de um atirador é atingir o centro do alvo, o objetivo da medição é determinar o valor verdadeiro do mensurando. A Figura 1 ilustra quatro resultados possíveis em um teste de tiro.

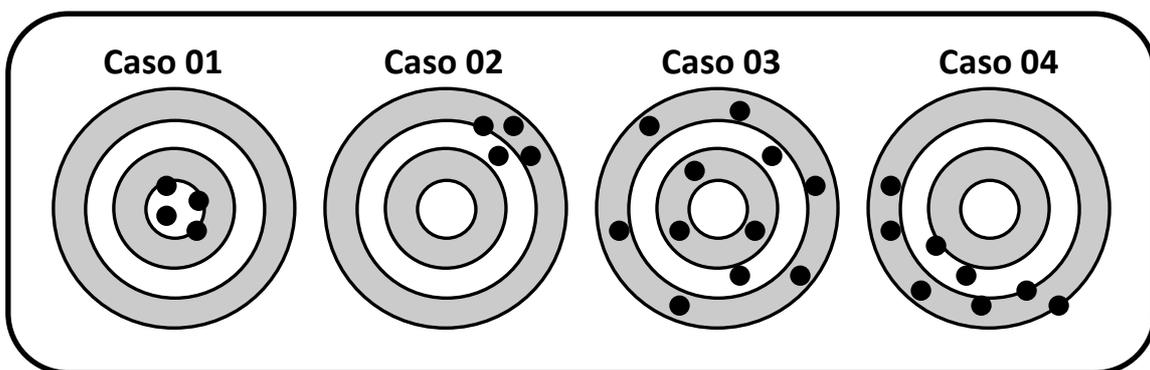


Figura 1. É possível perceber a diferença entre exatidão e precisão fazendo uma analogia com um teste de tiro ao alvo.

Nos quatro casos da Figura 1, os tiros estão dispostos de diferentes maneiras. Nos casos 1 e 2, eles estão menos dispersos que nos casos 3 e 4. Também é possível perceber que, nos casos 1 e 3, os tiros estão distribuídos em torno do centro enquanto, nos casos 2 e 4,

a distribuição de tiros está descentralizada.

Na nossa analogia, isso quer dizer que, nos casos 1 e 2, há mais precisão. Ou seja, quando a medição foi repetida sob as mesmas condições, ela produziu resultados semelhantes (menos dispersos). Nos casos 1 e 3, há mais exatidão porque as medidas estão distribuídas em torno do centro do alvo (o valor verdadeiro). O Quadro 1 resume essas considerações.

Quadro 1. Exatidão e Precisão no teste de tiro.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Exatidão. As medidas estão distribuídas em torno do valor verdadeiro?	SIM	NÃO	SIM	NÃO
Precisão. As medidas estão próximas umas das outras?	SIM	SIM	NÃO	NÃO

Essa analogia é muito importante porque nos permite perceber que uma medida muito precisa nem sempre é a melhor. Por exemplo, sabemos que um micrômetro é mais preciso que um paquímetro. Também sabemos que um paquímetro é mais preciso que uma trena. Pergunta-se: Qual desses instrumentos é o melhor? Depende daquilo que desejamos medir!

Imagine o que aconteceria se tentássemos medir o comprimento de uma mesa com um paquímetro! Utilizar instrumentos precisos

<p>Os melhores instrumentos nem sempre são os mais precisos, mas os mais adequados</p>

não garante uma medida exata. Por isso, os melhores instrumentos nem sempre são os mais precisos, mas os mais adequados à fidedignidade perseguida.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Valor verdadeiro, precisão e exatidão**”.

1. O que é uma grandeza experimental? Por que a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência (π) não pode ser considerada uma grandeza experimental?
2. Qual é a diferença entre exatidão e precisão? Dê exemplos que ilustrem as definições.
3. Considere que A e B sejam dois procedimentos experimentais para medir a mesma grandeza física. Com o procedimento A, foram obtidos os resultados: 2,00, 2,07, 2,05, e 1,97. Com o procedimento B, obtivemos: 2,00, 2,25, 2,43 e 1,72. Então, podemos concluir que o primeiro procedimento é mais exato que o segundo? Justifique sua resposta.
4. Um grupo de estudantes deseja avaliar a qualidade de três métodos alternativos para determinar a aceleração local da gravidade. Assim, eles mediram a aceleração local cinco vezes usando cada um dos três métodos em questão. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1. Considere ainda que, por um quarto método, que pode ser considerado mais confiável que esses três, a aceleração local da gravidade foi determinada resultando $g = 9,798 \text{ m/s}^2$. A partir dessa informação, responda às perguntas a seguir justificando sua resposta.
 - a. Qual dos três métodos usados pelos estudantes pode ser considerado mais impreciso?
 - b. Qual dos três métodos pode ser considerado mais inexato?

Tabela 1. Resultados de medição da aceleração local da gravidade obtidos por meio de três métodos distintos.

Método	Resultados obtidos	Média
A	10,78 m/s ² ; 8,79 m/s ² ; 10,77 m/s ² ; 8,79 m/s ² ; 9,78 m/s ² .	9,782 m/s ²
B	10,78 m/s ² ; 10,79 m/s ² ; 10,77 m/s ² ; 10,79 m/s ² ; 10,78 m/s ² .	10,782 m/s ²
C	9,78 m/s ² ; 9,79 m/s ² ; 9,77 m/s ² ; 9,79 m/s ² ; 9,78 m/s ² .	9,782 m/s ²

Os conceitos de erro e incerteza

Por mais que o sujeito que faz as medidas em um laboratório seja competente e caprichoso, os dados experimentais nunca terão precisão e exatidão absoluta; porém, alguns dados são mais precisos (ou exatos) do que outros, e é necessário estabelecer uma medida que permita verificar quão bom é o valor da medição. Para isso dois novos conceitos são necessários, os conceitos de erro e incerteza.

O Conceito de Erro

Na nomenclatura do Guia para Expressão da Incerteza da Medição (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a), a palavra “erro” é empregada exclusivamente para indicar a diferença entre o valor verdadeiro e o resultado de uma medição. Assim, para saber o erro de uma medida exatamente, é preciso conhecer seu valor verdadeiro². Como o valor verdadeiro da maioria das grandezas de interesse experimental é desconhecido *a priori*³, o conceito de erro tem pouco uso prático, pois

$$\text{Resultado da Medição} = \text{Valor Verdadeiro} + \text{Erro}$$

Por exemplo, sabendo que a velocidade da luz no vácuo é definida exatamente como $c = 299.792.458$ m/s, é possível calcular o erro de qualquer medição dessa grandeza subtraindo o resultado obtido no experimento pelo valor verdadeiro (conhecido por definição). Assim, o cálculo exato do erro só é possível se soubermos, de antemão, qual é o valor verdadeiro em questão. Porém, apesar de ter pouco uso prático, o conceito de erro é fundamental para se compreender de que maneira e por que motivos os resultados das medições se desviam dos seus respectivos valores verdadeiros.

² Em parte, as controvérsias em torno do conceito de valor verdadeiro foram apresentadas no primeiro texto desta unidade. Assim, é importante lembrar que valores verdadeiros são definidos a partir de modelos. Feita essa ressalva, para os objetivos deste livro, sempre poderemos imaginar que estamos lidando com grandezas que possuem valores verdadeiros únicos e bem definidos.

³ *A priori* é uma expressão da filosofia que, nesse caso, pode ser interpretada como “antes de realizar qualquer experimento”.

A questão das fontes de erro

Erro é a diferença entre o valor obtido em uma medição e seu alvo, seu valor verdadeiro. De fato, existem vários fatores em um processo de medição que produzem erro, ou

Fatores que contribuem para que os resultados das medições se desviem dos seus valores verdadeiros são chamados fontes de erro.

seja, que contribuem para que o resultado da medição se desvie do seu alvo. Esses fatores são chamados fontes de erro.

Em um experimento real há, geralmente, várias fontes de erro. Sem a pretensão de esgotar todas as fontes de erro possíveis de ser observar em um experimento, chamamos atenção às seguintes:

- a) Calibração do instrumento. Todo instrumento de medição deve ser calibrado direta ou indiretamente com relação a um padrão internacional de referência. Como nenhum processo de calibração é perfeito, temos aí uma fonte de erro. Quanto mais imperfeita for a calibração do instrumento, tanto mais desviado será o valor obtido do seu valor verdadeiro. Por exemplo, a distância de 1,00 m em uma trena comercial é, certamente, um pouco diferente (para mais ou para menos) da distância que verdadeiramente corresponderia a 1,00 m segundo padrões internacionais.
- b) Condições de uso e armazenamento do instrumento. Dependendo do material com que é fabricado, das suas condições de uso e armazenamento, o instrumento pode se desviar do seu estado original. Por exemplo, uma régua de plástico pode se dilatar, trincar ou deformar com o uso. Uma balança pode sofrer pequenos danos físicos a cada vez que é transportada do armário para a bancada de trabalho. Da mesma maneira, todos os instrumentos estão sujeitos, ao longo do tempo, a perderem sua calibração original. Temos aí outra fonte de erro.
- c) Interação instrumento-objeto. A interação entre o instrumento e o objeto da

medição pode alterar o valor verdadeiro da grandeza medida. Por exemplo, ao medir a espessura de uma resma de papel com um paquímetro, é sempre necessário pressionar a resma um pouco para retirar o ar que fica preso entre as folhas. Porém, podemos estar comprimindo a resma de papel além do necessário para eliminar o ar entre as folhas, alterando, assim, sua espessura verdadeira. Ao mesmo tempo, se o paquímetro não a pressiona, é possível que um pouco de ar fique preso entre as folhas. Assim, devido à interação entre o instrumento e objeto, é possível que o resultado da medição se desvie (para mais ou para menos) do seu valor verdadeiro ou valor alvo. Esse tipo de erro é evidente em instrumentos elétricos, pois a simples introdução do instrumento no circuito em observação altera as características do circuito.

- d) Variáveis que não conseguimos (ou não desejamos) controlar. As grandezas físicas estão relacionadas umas às outras. Por isso, para obter uma boa medida de uma grandeza, é fundamental que consigamos controlar as variáveis às quais essa grandeza está relacionada. Por exemplo, se desejamos medir o alcance de um projétil, é fundamental que consigamos controlar seu ângulo de inclinação, sua altura de lançamento e sua velocidade inicial. Quanto mais essas grandezas variarem além do nosso controle, tanto mais o alcance variará. Assim, cada grandeza que não conseguirmos (ou não desejarmos) controlar precisamente contribui para que o valor que obtemos ao final de cada medição se desvie do seu alvo.

Embora seja impossível neutralizar completamente todas as fontes de erro em um experimento, é fundamental tentar controlá-las. As fontes de erro acima são toleradas na medida em que são inevitáveis. Todo resultado experimental possui algum erro e algumas fontes de erro estão presentes até nas medidas feitas pelos pesquisadores mais

cuidadosos sob as melhores condições de trabalho. Porém, é importante destacar que a impossibilidade de controlar completamente as fontes de erro não justifica que o experimento seja feito com desleixo, que você realize as medições sem saber o que está fazendo ou que empregue os instrumentos de maneira inadequada. Em atividade experimental, alguns erros são perdoáveis porque são inevitáveis, mas nem todos são inevitáveis...!

O conceito de incerteza da medição

Por definição, incerteza pode ser considerada uma estimativa que quantifica a confiabilidade do resultado de uma medição. Quanto maior for a incerteza, tanto menor será a confiabilidade desse resultado. Paralelamente, é importante destacar que incerteza não é erro. O cálculo do erro depende de conhecermos o valor verdadeiro daquilo que estamos medindo. Em contrapartida, o cálculo da incerteza não tem esse tipo de restrição. A incerteza pode (e deve) ser calculada mesmo quando não temos nenhuma ideia do valor verdadeiro em jogo. Por isso a incerteza é um conceito muito mais instrumental e com mais aplicabilidade que o conceito de erro.

Há dois tipos de incerteza: do tipo A e do tipo B. As incertezas são de tipos diferentes porque são calculadas por procedimentos distintos. No primeiro grupo de procedimentos de avaliação da incerteza estão todos os métodos que envolvem a análise estatística de uma série de observações. No outro grupo, o restante.

Por definição, as avaliações da incerteza do tipo A dependem que seja feita uma série de observações da mesma grandeza física. Nos exemplos deste livro, a avaliação da incerteza do tipo A ocorre essencialmente quando calculamos o desvio padrão da média de uma série de observações. Nesses casos, o resultado da medição é a média das observações.

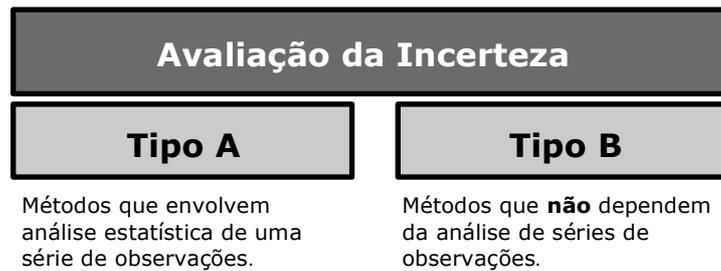


Figura 2. Representação dos tipos de procedimento para avaliação da incerteza.

As avaliações da incerteza do tipo B são utilizadas principalmente quando é muito difícil realizar observações repetidas (ou quando não faz sentido realizar tais

Nos casos em que é muito difícil realizar uma série de observações, recorre-se à avaliação da incerteza do tipo B.

observações). Do ponto de vista teórico, os procedimentos de avaliação da incerteza do tipo B são bastante sofisticados, mas não precisam ser discutidos agora.

Assim como ocorre com a incerteza do tipo A, o resultado da avaliação da incerteza do tipo B pode ser interpretado como um desvio padrão. Ou seja, tanto a incerteza do tipo A quanto a incerteza do tipo B pode ser utilizada para construir intervalos de confiança (conforme veremos adiante). Enfim, o Quadro 2 resume os procedimentos e definições apresentados.

Incertezas do tipo A e B podem ser interpretadas como desvios padrão!

Este texto de apoio foi escrito com pretensões introdutórias, levando em consideração o que é usualmente necessário em laboratórios de Ensino de Física. Para uma apresentação mais completa e especializada dos procedimentos de determinação da incerteza da medição, consulte as referências ao final deste livro.

Quadro 2. Conceitos-chave da nomenclatura atual de metrologia.

Nome	Significado/Definição	Observações
Erro	É igual á diferença entre o resultado da medição e o valor verdadeiro.	É muito útil para compreender de que maneira e por que motivos a medida se desvia do seu valor verdadeiro. Contudo, tem pouco uso instrumental, pois seu cálculo requer conhecer de antemão o valor verdadeiro em questão.
Incerteza	Estimativa que quantifica a confiabilidade do resultado de uma medição. Quanto maior for a incerteza, tanto menor será a confiabilidade desse resultado.	Pode ser obtida por meio de uma avaliação do tipo A ou do tipo B. Incerteza não é erro!
Incerteza do tipo A	Incerteza calculada a partir de um procedimento que envolve observações repetidas.	Nesse caso, o resultado de uma medição é igual á média das observações e a incerteza (do tipo A) é igual ao desvio padrão dessa média.
Incerteza do tipo B	Incerteza calculada a partir de um procedimento que não envolve observações repetidas.	Nesse caso, o resultado da medição é igual ao resultado da primeira (e única) observação. Assim como a incerteza do tipo A, a incerteza do tipo B pode ser interpretada como um desvio padrão.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “Os conceitos de erro e incerteza”.

1. O que é o erro de uma medição?
2. Quais são as possíveis fontes de erro em uma medição?
3. O que é incerteza?
4. Qual é a diferença entre procedimentos de avaliação da incerteza do tipo A e do tipo B?
5. Julgue as afirmações a seguir, marcando F para falso e V para verdadeiro.
 - a. Na nomenclatura do Guia para Expressão da Incerteza da Medição, a palavra “erro” é empregada exclusivamente para indicar a diferença entre o valor verdadeiro e o resultado de uma medição.
 - b. A incerteza é uma estimativa que quantifica a confiabilidade do resultado de uma medição.
 - c. Incerteza do tipo A é aquela obtida pela análise estatística de uma série de observações.
 - d. Incerteza do tipo B é a incerteza obtida por qualquer procedimento, exceto os do tipo A.
 - e. A incerteza do tipo A sempre pode ser interpretada como um desvio-padrão; a incerteza do tipo B nem sempre pode.
6. Atribua números de 1 a 4 às afirmações a seguir conforme elas forem correspondentes aos seguintes conceitos: (1) Erro; (2) Incerteza; (3) Incerteza do tipo A; (4) Incerteza do tipo B.
 - a. Estimativa que permite quantificar a confiabilidade do resultado de uma medição.
 - b. O resultado de uma medição é igual à média das observações e a incerteza é igual ao desvio padrão dessa média.
 - c. Igual à diferença entre o resultado da medição e o valor verdadeiro.
 - d. Incerteza calculada a partir de um procedimento que não envolve observações repetidas.
 - e. Tem pouco uso instrumental. É preciso conhecer de antemão o valor verdadeiro do mensurando para calculá-lo exatamente.
 - f. Incerteza calculada a partir de um procedimento que envolve observações repetidas.
 - g. Pode ser obtida por meio de uma avaliação do tipo A ou do tipo B. Pode ser utilizada para construir intervalos de confiança.

Incerteza e Algarismos Significativos

Toda a medida experimental fornece informação limitada e nenhum processo de medição é completamente confiável. Por isso não podemos expressar/registrar os resultados da nossa medição de qualquer maneira, mas é necessário deixar indicado (para referência futura) o ponto até o qual se pode confiar no resultado obtido. Com efeito, a questão da confiabilidade do resultado de uma medição está intimamente ligada às avaliações de incerteza do tipo A e do tipo B.

Neste texto apresentamos, por meio de dois exemplos, como determinar o número de algarismos significativos de uma medição a partir da sua incerteza. Nos textos seguintes, aprenderemos como determinar as incertezas da medição.

Exemplo 01: O comprimento de um clipe de papel

Em primeiro lugar, considere que desejamos medir o comprimento de um clipe de papel usando uma régua cuja menor divisão da escala é o milímetro. A Figura 3 ilustra essa situação.

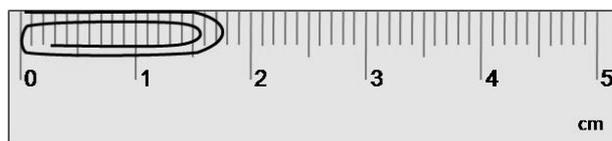


Figura 3. Medindo o comprimento de um clipe de papel com uma régua comum.

A partir da Figura 3, é possível perceber que o comprimento do clipe de papel⁴ está provavelmente entre 1,7 cm e 1,8 cm. Agora, considere que um aluno, olhando para essa imagem, afirme que o clipe possui 1,7694852 cm. Que significado têm todos esses algarismos?

Como é possível perceber, a maioria desses algarismos não têm significado algum. Em outras palavras, podemos dizer que não

Algarismos significativos são aqueles que devemos apresentar ao registrar o resultado de uma medição.

⁴ Estamos considerando, nesse caso, que a principal fonte de incerteza deve-se à leitura da escala da régua.

são algarismos significativos. Além disso, se registramos o resultado da medição com tantos algarismos, podemos passar a impressão de que essa medição foi realizada com uma precisão incrível, quando, na verdade, usamos o instrumento mais rudimentar disponível: uma régua escolar.

Exemplo 02: O alcance de um projétil

Outra situação muito usual em laboratórios de mecânica é a realização de experimentos com lançadores de projétil. Para tanto, considere o lançamento horizontal de um projétil representado esquematicamente na Figura 4.

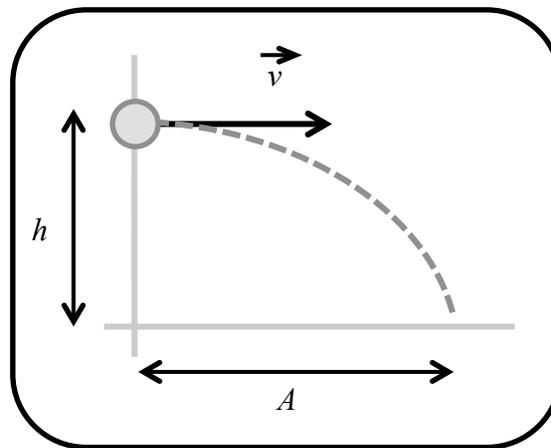


Figura 4. Representação esquemática do lançamento horizontal de um projétil.

Aplicando um pouco de cinemática a essa situação, é possível deduzir que o alcance A de um lançamento horizontal pode ser determinado pela altura de lançamento h , pela velocidade de lançamento v e pela aceleração da gravidade g ($A = v\sqrt{2h/g}$). Porém, observa-se experimentalmente que, mesmo quando tomamos todo o cuidado possível para controlar as variáveis v , h , g e o ângulo de lançamento, o alcance A do projétil apresentará alguma variação.

A Figura 5 diz respeito a um projétil lançado horizontalmente 10 vezes sob as mesmas condições. Cada marcação na folha quadriculada identifica a posição em que o projétil tocou o chão. Como é possível perceber, o alcance de cada lançamento não é sempre o mesmo. Para usar um conceito que já aprendemos, a informação sobre o alcance do

projétil é imprecisa (embora não seja necessariamente inexata).

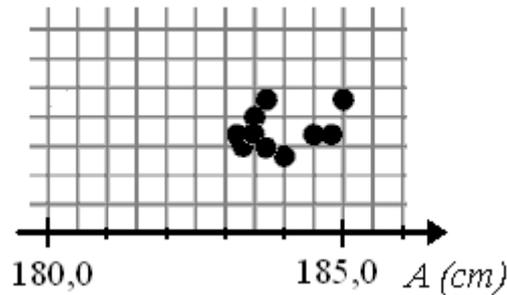


Figura 5. Registro (em papel quadriculado) das posições em que um projétil toca o chão após ser lançado horizontalmente 10 vezes sob as mesmas condições.

Como é possível perceber a partir da Figura 5, o conjunto dos valores atribuíveis ao alcance está entre 183 e 185 cm. Agora, considere que um aluno, olhando para essa imagem, afirme que o alcance do projétil é igual a 184,46526 cm. Que significado teriam todos esses algarismos?

Enfim, chamamos algarismos significativos àqueles que têm significado físico e, por isso, devem ser registrados ao se expressar o resultado de uma medição. A esse respeito, existe uma pequena variedade de regras práticas que são utilizadas para determinar, em cada caso, quantos algarismos nós podemos registrar, ou seja, quantos algarismos são significativos no resultado de uma medição. Neste livro, propomos partir da incerteza para determinar quais algarismos de uma medida são significativos e quais não o são.

A incerteza da medição

Como nenhum processo de medição é completamente confiável, considerou-se importante criar uma grandeza a partir do qual seja possível avaliar quantitativamente a

Incerteza é uma grandeza que permite avaliar quantitativamente a confiabilidade do resultado de uma medição.

confiança que se pode ter no resultado de uma medição. Hoje em dia, o nome adotado para essa grandeza é incerteza⁵. Quanto maior for a incerteza de uma medição, menos

⁵ O vocabulário adotado nesses textos de apoio é relativamente novo (tornou-se oficial em meados da década de 1990) e diverge um pouco dos termos tradicionalmente empregados em laboratórios didáticos.

confiável a medição é.

Ao se registrar o resultado de uma medição (por exemplo, em um relatório ou caderno de laboratório), deve ser registrada também a incerteza dessa medição, pois a incerteza da medição é a única maneira rigorosa de avaliar a confiabilidade da medida. Assim, a expressão da incerteza não é opcional, mas obrigatória para a apresentação e discussão de resultados experimentais.

A saber, conhecimentos e habilidades relacionados às incertezas da medição têm importância em diversas situações profissionais tais como: (1) laboratórios de pesquisa (por exemplo, para planejar experimentos e comparar resultados experimentais obtidos por técnicas diferentes); (2) indústria (sobretudo no controle de qualidade da produção); (3) laboratórios de calibração e metrologia legal (por exemplo, na avaliação de condições de trabalho regulamentadas por lei); (4) sala de aula, tanto em educação básica como na educação superior (nesses contextos, a questão da incerteza contribui fundamentalmente para a discussão da relação entre teoria e experimento e para a superação das visões de ciência de senso comum).

Enfim, conhecimentos e habilidades relacionados à incerteza da medição podem ser considerados básicos para a formação de licenciados e bacharéis em Física e, por isso, precisam ser bem compreendidos.

Expressando a incerteza

A incerteza de uma medição é sempre expressa nas mesmas unidades do resultado dessa medição (por exemplo, a incerteza de uma grandeza medida em metros,

O resultado de uma medição deve ser sempre expresso com a mesma quantidade de casas decimais que sua incerteza.

deve ser expressa em metros). Além disso, a incerteza e o resultado da medição devem apresentar sempre o mesmo número de casas decimais. É usual registrar a incerteza e o

Uma dessas divergências está nos conceitos de erro e incerteza. Para o uso adequado desses conceitos, recorra ao texto de apoio intitulado “Os conceitos de erro e incerteza”.

resultado da medição da seguinte maneira:

(resultado da medição \pm incerteza da medição) unidade de medida

A Tabela 2 ilustra a notação proposta, apresentando resultados e incertezas da medição de algumas grandezas.

Tabela 2. Resultados de medição obtidos em laboratório didático.

Grandeza	Resultado e incerteza da medição
Aceleração local da gravidade	(9,795 \pm 0,003) m/s ²
Constante elástica de uma mola metálica	(3,02 \pm 0,08) N/m
Coefficiente de atrito estático Madeira/Alumínio	(0,158 \pm 0,002)

Como é possível perceber da Tabela 2, os resultados de todas as medições são sempre expressos com a mesma quantidade de casas decimais que suas respectivas incertezas. Assim, a incerteza impõe limites à quantidade de algarismos que utilizamos para representar os resultados. Ou seja, é a incerteza que determina quais algarismos do resultado de uma medição são significativos (e devem ser registrados) e que algarismos não têm significado (e devem ser omitidos no registro). Em outras palavras, é preciso saber a incerteza da medição para avaliar quais são os algarismos significativos do resultado de uma medição. Ou seja, na prática, para determinar o número de algarismos significativos de uma medida, é preciso conhecer minimamente os procedimentos de avaliação da incerteza do tipo A e do tipo B.

A incerteza e o resultado da medição devem ser expressos sempre com a mesma quantidade de casas decimais

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Incerteza e algarismos significativos**”.

1. O que são algarismos significativos?
2. De que maneira, partindo da incerteza da medição, pode ser determinada a quantidade de algarismos significativos do resultado dessa medição?
3. Em metrologia, o que é a incerteza? Qual é a relação entre a incerteza de uma medição e a confiabilidade que se deve ao resultado dessa medição?
4. Considere que um aluno realizou medições de comprimento, obtendo os seguintes resultados: $(39,5 \pm 0,5)$ mm; $(1,05 \pm 0,005)$ mm; $(120,0 \pm 0,5)$ mm; $(19,50 \pm 0,5)$ mm. Quais não estão expressas com a quantidade correta de algarismos significativos?

A avaliação da incerteza do tipo A

Incerteza e flutuação estatística

Quando realizamos uma série de observações do mesmo mensurando sob as mesmas condições, podemos obter resultados diferentes. Essa variabilidade dos resultados das medições é chamada flutuação estatística e, em geral, é resultado de fatores que não conseguimos (ou não desejamos) controlar experimentalmente⁶. Em um processo de medição cuidadoso, vários fatores podem ser controlados ou eliminados, porém, como esse controle é imperfeito, o resultado da medição geralmente estará sujeito a alguma variabilidade.

Além disso, a presença de flutuações estatísticas está relacionada à precisão da medição.

Medidas mais precisas flutuam menos e medidas menos precisas flutuam mais. Assim, a variabilidade está relacionada

Medidas muito variáveis são medidas pouco confiáveis.
--

à confiabilidade. Medidas muito variáveis são medidas pouco confiáveis. Enfim, quando realizamos uma avaliação da confiabilidade do resultado de uma medição a partir das flutuações estatísticas observadas, estamos realizando uma avaliação da incerteza do tipo A.

Descrevendo e condensando um conjunto de dados

A avaliação da incerteza do tipo A geralmente é um processo bastante rápido e simples. Porém, para entendermos realmente o que estamos fazendo, é necessário conhecer algumas ferramentas estatísticas utilizadas para descrever e condensar conjuntos de dados. São elas: (1) Tabelas de distribuição de frequências, (2) Histogramas, (3) Média e (4) Desvios padrão.

⁶ Em texto de apoio anterior, intitulado “Incerteza e Algarismos Significativos”, vimos um exemplo bastante ilustrativo dessa situação. Nele, desejávamos avaliar o alcance de um projétil lançado horizontalmente com velocidade v a partir de uma altura h conhecida. Apesar de os parâmetros mais importantes (velocidade, altura, ângulo de lançamento e aceleração da gravidade) serem mantidos aproximadamente constantes, o projétil atingiu o solo em posições bastante diferentes após cada lançamento (veja Figura 5). A variabilidade observada para o alcance em cada lançamento ilustra a chamada *flutuação estatística*.

Um exemplo: Determinação da aceleração local da gravidade

Para compreendermos essas ferramentas, considere o caso do professor Fernando, que desejava determinar experimentalmente a aceleração local da gravidade. Imbuído de extrema paciência, ele lançou um corpo massivo a partir do repouso 396 vezes! Em cada lançamento, ele mediu o tempo de queda do corpo com um cronômetro esportivo. A partir do tempo de queda e da altura de lançamento, que era conhecida, foi possível estimar um valor para a aceleração local da gravidade em cada lançamento.

Como o cronômetro esportivo é operado manualmente, o tempo de queda observado em cada lançamento dependerá muito do tempo de reação do sujeito que realiza a medição. Eventualmente, a medida do tempo de queda subestimará o tempo de queda real. Em outras observações, o tempo de queda medido será superior ao real. Isso ocorre porque (tanto no início quanto no fim do movimento) o operador do cronômetro está sujeito a antecipar-se ou atrasar-se ao movimento real que está observando. Em geral, os instantes em que ele pressiona os botões do cronômetro não coincidem exatamente com os instantes de início e término do movimento de queda.

Não é difícil demonstrar que, em um movimento de queda livre, a aceleração da gravidade g pode ser determinada a partir da altura h e tempo de queda t a partir da expressão $g = 2h/t^2$. Portanto, quando o tempo de queda observado for maior que o tempo de queda verdadeiro, a aceleração da gravidade será subestimada; quando o tempo de queda for menor que o tempo verdadeiro, a aceleração da gravidade será superestimada. Enfim, o primeiro problema que precisamos resolver é o de visualizar e analisar os 396 valores obtidos para a aceleração local da gravidade!

A tabela de distribuição de frequências

Em primeiro lugar, vamos observar a Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3).

Ela deve ser lida da seguinte maneira: o valor $g = 17,1 \text{ m/s}^2$ foi obtido duas vezes; o

valor $g = 16,2 \text{ m/s}^2$ foi obtido uma vez; o valor $g = 15,3 \text{ m/s}^2$ foi obtido uma vez...

A Tabela 3 também permite afirmar que os valores mais frequentes foram $g = 10,2 \text{ m/s}^2$ e $g = 9,4 \text{ m/s}^2$, com 38 ocorrências.

Como é possível perceber, a Tabela de distribuição de frequências já é uma maneira bastante condensada de apresentar os dados obtidos. Imagine o que aconteceria se fôssemos listar aqui cada observação individualmente! Seria necessária uma tabela com 396 entradas e nós dificilmente teríamos uma boa visualização de quais valores são mais frequentes e quais ocorrem mais raramente. Assim, quando estamos trabalhando com um conjunto grande de observações em que alguns valores se repetem, é interessante trabalhar com uma tabela de distribuição de frequências.

Tabela 3. Tabela de distribuição de frequências para os resultados de 396 observações da aceleração da gravidade.

$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	Frequência
17,1	2
16,2	1
15,3	1
14,5	7
13,7	10
13,0	27
12,4	21
11,8	25
11,2	33
10,7	21
10,2	38
9,8	32
9,4	38
9,0	27
8,6	31
8,2	21
7,9	8
7,6	15
7,3	16
7,0	7
6,8	5
6,5	2
6,3	2
6,1	1
5,9	3
5,5	2

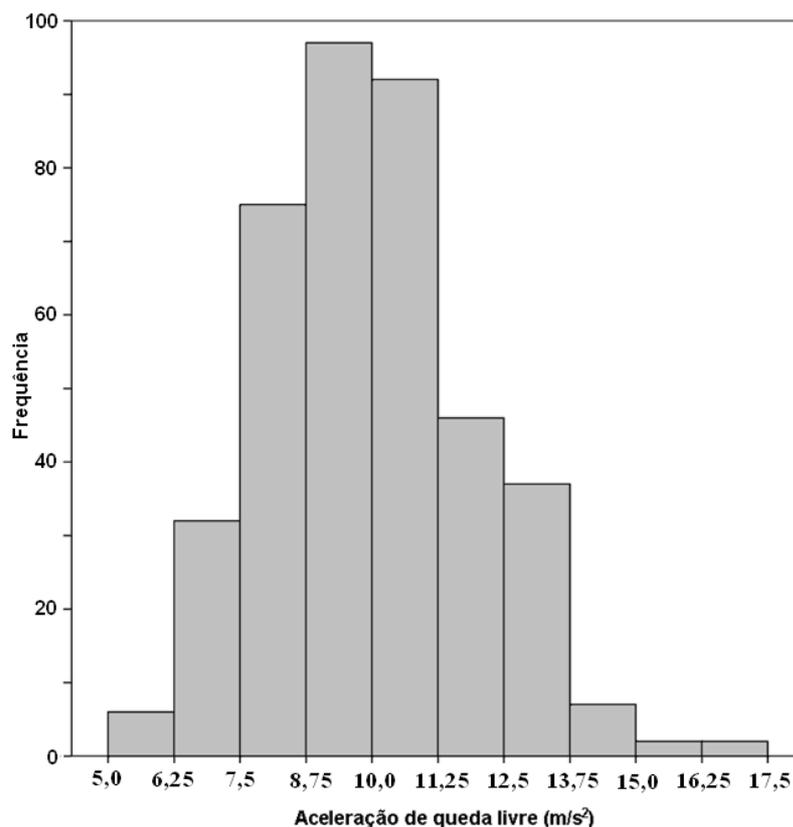
Histogramas

Outra ferramenta importante para condensar um conjunto de dados é o Histograma, que é basicamente um gráfico de barras que permite uma visualização dos dados ainda mais

condensada que a Tabela de distribuição de frequências. A saber, o primeiro passo para a elaboração de um histograma é definir intervalos (geralmente de mesma largura) para agrupar os dados. No presente exemplo, foram escolhidos intervalos com $1,25 \text{ m/s}^2$ de largura a partir do valor $g = 5,0 \text{ m/s}^2$. O resultado pode ser visualizado no Gráfico 1.

O Histograma representado no Gráfico 1 deve ser lido da seguinte maneira: No universo das 396 observações de g , menos de 10 observações ocorreram entre $5,0 \text{ m/s}^2$ e $6,25 \text{ m/s}^2$; um pouco mais de 30 observações ocorreram entre $6,25 \text{ m/s}^2$ e $7,5 \text{ m/s}^2$; aproximadamente 95 observações ocorreram no intervalo de $7,5 \text{ m/s}^2$ a $8,75 \text{ m/s}^2$...

Gráfico 1. Histograma representando graficamente os dados apresentados na Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3).



Como é possível perceber, o Histograma privilegia observar que os valores de aceleração da gravidade obtidos encontram-se, mais frequentemente, entre $7,5 \text{ m/s}^2$ e $11,25 \text{ m/s}^2$. Igualmente, o Histograma sugere que, apesar da grande dispersão dos

valores obtidos para a aceleração da gravidade, a média desses valores deve estar próxima a $10,0 \text{ m/s}^2$.

Média e Desvio padrão dos dados

Uma maneira ainda mais condensada de representar um conjunto de dados é a Média dos dados e o Desvio padrão dos dados. Sobre a média, não há mistério. Ela resulta da soma de todos os dados obtidos, dividida pelo número de dados. Geralmente, a média de uma grandeza é representada com um traço sobre o símbolo usado para representar a variável (ex.: a média dos valores da variável g é representada por \bar{g}). A seguir, indicamos como calcular a média dos n valores (com $n = 396$) atribuídos por Fernando à aceleração local da gravidade⁷:

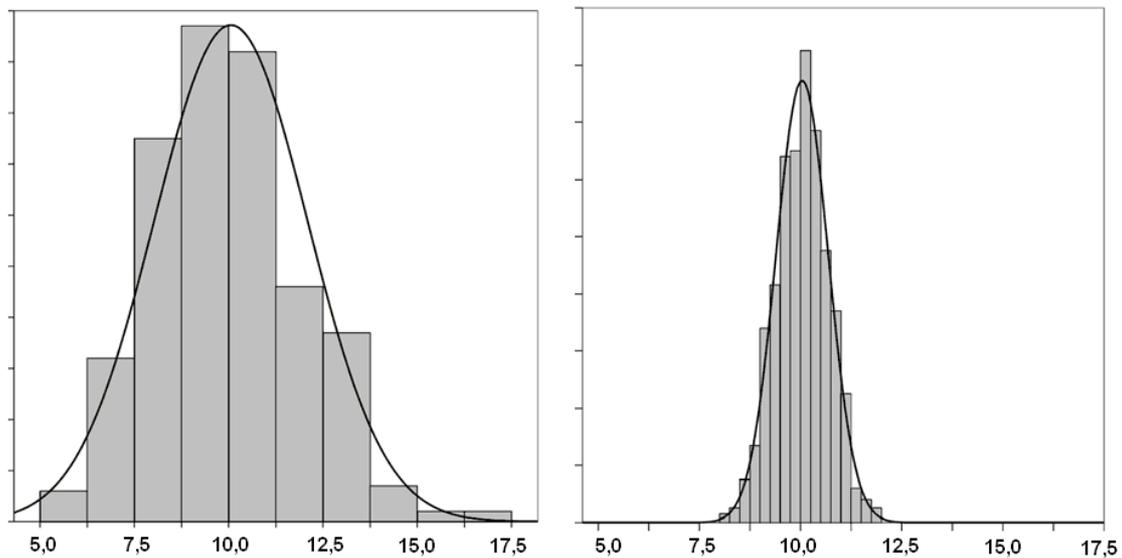
$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{n}$$

No caso do experimento conduzido por Fernando, o valor médio obtido para a aceleração da gravidade foi $\bar{g} = 10,0 \text{ m/s}^2$. Por outro lado, você deve concordar que, se informamos somente o valor médio das observações de Fernando, estamos omitindo uma informação muito importante: a variabilidade das suas observações. Em um histograma, a variabilidade está relacionada à largura da distribuição. Quanto mais larga for a distribuição, quanto mais dispersos estiverem os dados, maior é sua variabilidade. O Gráfico 2 representa bem essa questão. Como é possível perceber, o histograma da direita é mais estreito que o histograma da esquerda.

⁷ Quando temos em mãos uma Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3), calcular a média de uma variável fica um pouco mais simples. Em vez de fazer uma soma de todas as n observações (no caso, $n = 396$), fazemos uma soma sobre cada linha da tabela. Seja f_k a frequência do k -ésimo valor distinto que a variável g assume. Seja também m o número de linhas da Tabela de distribuição de frequências. Em outras palavras, seja m o número de valores distintos que a variável g assume nessa tabela. Nesse caso, você deve ser capaz de demonstrar que o valor médio \bar{g} também pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\bar{g} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_m g_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m} = \frac{\sum_{k=1}^m f_k g_k}{\sum_{k=1}^m f_k}$$

Gráfico 2. Comparação entre dois histogramas com valor médio igual a 10,0 e diferentes variâncias. Como é possível perceber, o histograma da direita é mais estreito. Portanto, a variabilidade dos seus dados é menor.



Para avaliar essa dispersão (ou seja, para avaliar o quanto o conjunto dos dados está afastado da média) usamos uma quantidade muito importante chamada desvio padrão.

O desvio padrão é uma medida da variabilidade de uma série de medidas.

O desvio padrão é uma maneira de medir a variabilidade de um conjunto de dados. Quanto maior for a flutuação estatística dos dados, quanto maior for sua imprecisão, maior será o desvio padrão. Assim, o desvio padrão é um elemento-chave na avaliação da confiabilidade de dados experimentais.

Enfim, o Desvio padrão dos dados é definido pela seguinte expressão⁸:

$$S_g = \sqrt{\frac{(g_1 - \bar{g})^2 + (g_2 - \bar{g})^2 + \dots + (g_n - \bar{g})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g_i - \bar{g})^2}{n - 1}}$$

Observe que, como o desvio padrão resulta de uma soma de diferenças elevadas ao quadrado, ele sempre será positivo. Igualmente, como ele resulta da raiz quadrada de

⁸ Igualmente, você deve ser capaz de demonstrar que o Desvio padrão dos dados pode ser obtido a partir de uma Tabela de distribuição de frequências pela seguinte expressão:

$$S_g = \sqrt{\frac{f_1(g_1 - \bar{g})^2 + f_2(g_2 - \bar{g})^2 + \dots + f_m(g_m - \bar{g})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_m - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m f_k(g_k - \bar{g})^2}{(\sum_{k=1}^m f_k) - 1}}$$

uma soma de termos ao quadrado, o desvio padrão preserva sempre a mesma unidade em que são expressos os dados (no caso dos dados coletados pelo professor Fernando, unidades de aceleração).

Apesar de não possuírem o mesmo apelo gráfico do Histograma, a média e o desvio padrão são geralmente informações mais fáceis de obter e são suficientes para especificarmos os valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma grandeza física. No exemplo do professor Fernando, encontrou-se o seguinte valor para o desvio padrão dos dados: $S_g = 2,0 \text{ m/s}^2$. A partir dessa informação, é razoável esperar que os dados estejam bastante condensados no intervalo de $\bar{g} - S_g$ a $\bar{g} + S_g$. Com efeito, observa-se, a partir do Histograma (Gráfico 1), que uma fração importante dos valores atribuídos a g encontra-se entre $8,0 \text{ m/s}^2$ e $12,0 \text{ m/s}^2$. Ou seja, é razoável esperarmos, ao realizar outra medição individual sob as mesmas condições, que o próximo valor observado de g ocorra entre $8,0 \text{ m/s}^2$ e $12,0 \text{ m/s}^2$. Esse intervalo pode ser representado de maneira compacta por $(10 \pm 2) \text{ m/s}^2$.

A redução da variabilidade

Como é possível perceber, tomadas individualmente, as observações feitas pelo professor Fernando são muito dispersas, pouco precisas, pouco confiáveis. Porém, uma maneira de melhorar a confiabilidade do resultado de uma medição é tomar por resultado a média de uma série de observações. Esse procedimento reduz as flutuações estatísticas, pois a

O resultado de uma medição será, preferencialmente, a média de uma série de observações.

média de uma série de observações experimentais sempre flutua menos que as observações individuais.

A Figura 6 representa três séries de observações imprecisas. Como é possível perceber, individualmente, as observações estão distantes do centro do alvo (que representa o valor verdadeiro do mensurando). Entretanto, se calcularmos o valor médio em cada

uma dessas séries de observações, perceberemos que essas médias são muito mais confiáveis (estão geralmente mais próximas ao valor verdadeiro e flutuam menos) que as observações individuais.

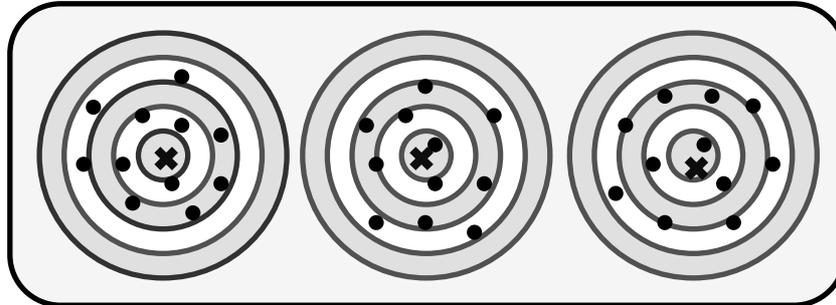


Figura 6. Os pontos pretos representam três rajadas de projéteis imprecisamente lançados contra cada alvo. As marcações em forma de “x” representam as médias das posições dos pontos atingidos por cada rajada de tiro. Como é possível perceber, apesar da imprecisão da rajada, as posições das médias tendem a ocorrer próximas ao centro do alvo. Isso ilustra por que motivo as médias tendem a ser mais confiáveis que observações individuais quando desejamos estimar o valor de um mensurando.

Assim, como existe um desvio padrão dos dados (que quantifica a dispersão desses dados em torno da média), podemos definir um desvio padrão da média, que quantifica a variabilidade dessa média. Enfim, é

O desvio padrão da média é uma medida da variabilidade dessa média.

possível demonstrar que o desvio padrão da média $S_{\bar{g}}$ se relaciona com o desvio padrão dos dados S_g pela seguinte expressão:

$$S_{\bar{g}} = \frac{S_g}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g_i - \bar{g})^2}{n(n-1)}}$$

No caso do experimento do professor Fernando, como o desvio padrão dos dados resultou $S_g = 2,0 \text{ m/s}^2$, com $n = 396$, temos $S_{\bar{g}} = 2,0/\sqrt{396} \cong 0,1 \text{ m/s}^2$. Portanto, é razoável esperar que, se o professor Fernando repetisse todas as 396 observações

novamente, a média das outras 396 observações ocorreria provavelmente dentro do intervalo que vai de $9,9 \text{ m/s}^2$ a $10,1 \text{ m/s}^2$. Esse intervalo pode ser representado de maneira compacta por $(10,0 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$.

A distribuição normal ou Gaussiana

A essas alturas é razoável que você esteja um pouco apavorado: Será que a avaliação da incerteza do tipo A sempre requer a realizar centenas de observações?! Evidentemente, o procedimento adotado pelo professor Fernando não é a melhor maneira de estimar a aceleração da gravidade. Em situações reais de laboratório, nós dificilmente realizaríamos tantas observações de uma grandeza. Em geral, o que fazemos é imaginar como deveria ser a distribuição de frequências para a grandeza que estamos observando. Ou seja, imaginamos qual histograma deveríamos obter se tivéssemos feito algumas centenas de medidas, mas quase nunca realizamos tantas observações!

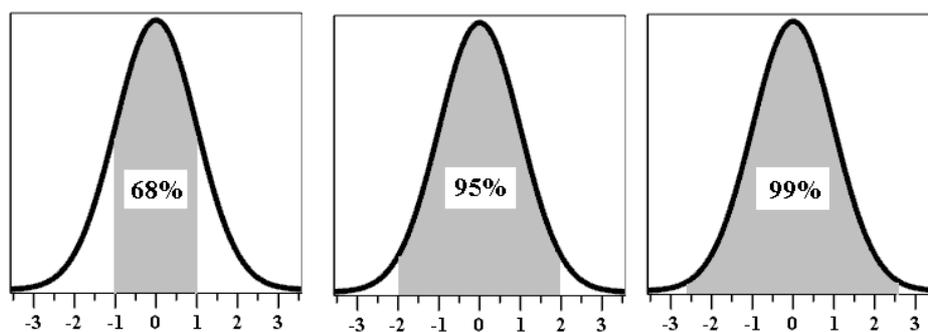
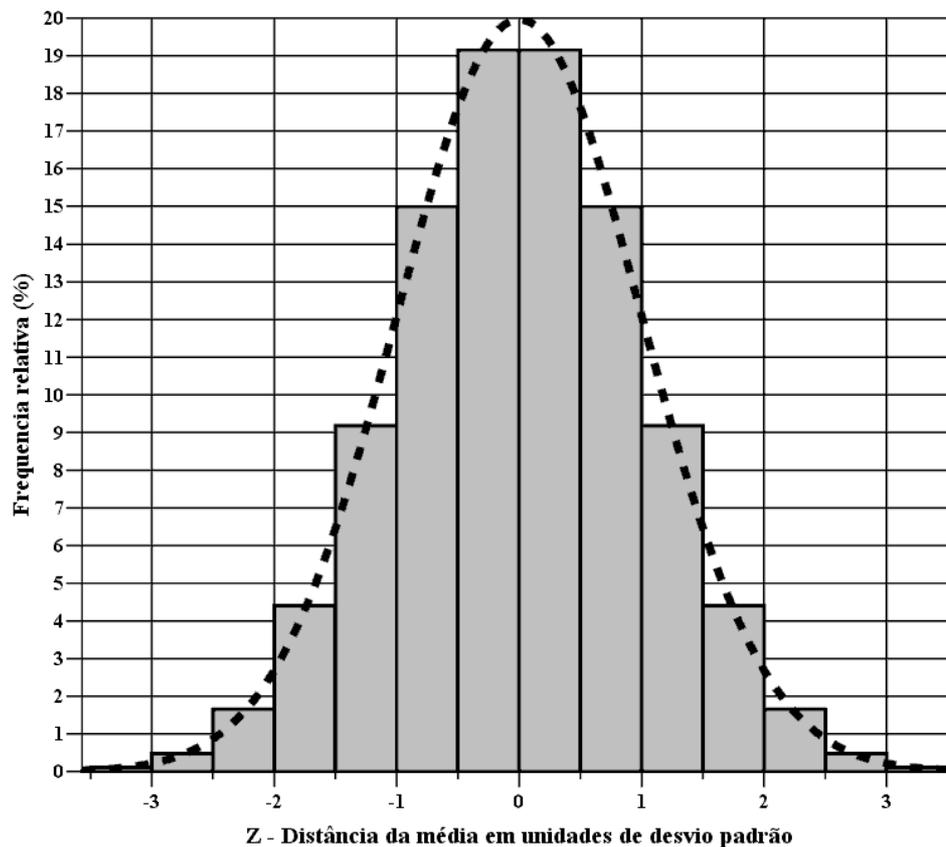
Para imaginar distribuições de frequência sem realizar centenas de observações repetidas, nós lançamos mão de distribuições consagradas na literatura às quais é razoável admitir que nossos dados pertençam. Dentre elas, a mais importante é a distribuição normal (também chamada distribuição gaussiana) que se encontra representada no Gráfico 3. Como é possível perceber a partir desse gráfico, a distribuição normal é suave e simétrica. Ela possui uma “forma de sino”, decrescendo rapidamente na medida em que nos afastamos de sua região central.

A distribuição normal é importante especialmente pelo seguinte motivo. O resultado de uma série de observações repetidas é preferencialmente a média dessa série de observações. Por outro lado, para um número suficientemente grande de observações, o conjunto das médias dessas observações se distribui de acordo com a distribuição normal. Por isso, é usual pressupormos que estamos lidando sempre com variáveis normalmente distribuídas. Para exemplificar essa situação, observe as semelhanças

entre o Histograma de uma distribuição gaussiana (Gráfico 3) e os histogramas representados no Gráfico 2.

Enfim, é muito raro que se faça um histograma de observações experimentais. Como geralmente podemos pressupor que estamos lidando com uma distribuição gaussiana, basta conseguirmos avaliar a média e seu desvio padrão dessa distribuição para termos uma boa ideia de como é o conjunto dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos à grandeza que estamos medindo.

Gráfico 3. Histograma representando uma Distribuição gaussiana.



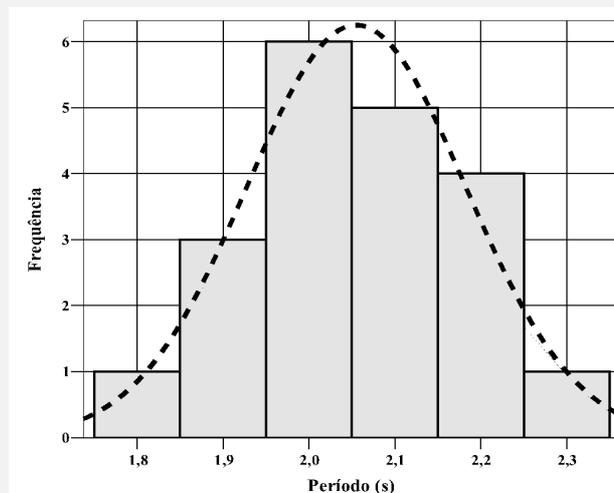
Além disso, sabemos que, para uma distribuição gaussiana, o intervalo $(\bar{X} \pm S_X)$ compreende 68% da distribuição. Igualmente, o intervalo $(\bar{X} \pm 2S_X)$ compreende 95% da distribuição (vide Gráfico 3). Assim, assumindo que a distribuição dos valores de aceleração da gravidade encontrados pelo professor Fernando é aproximadamente normal. Sem olhar para os histogramas, podemos afirmar que: (1) se o professor fizesse uma nova observação sob as mesmas condições, a chance de que o valor obtido se situe entre $8,0 \text{ m/s}^2$ e $12,0 \text{ m/s}^2$, é de 68%; (2) se o professor Fernando realizasse outros 396 lançamentos, a média dos novos lançamentos deve ocorrer entre $9,8 \text{ m/s}^2$ e $10,2 \text{ m/s}^2$ com 95% de confiança.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “Avaliação da incerteza do tipo A”.

1. O que é a flutuação estatística de dados experimentais? A que ela é devida?
2. Qual é a relação entre flutuação estatística e a confiabilidade do resultado de uma medição?
3. Discuta a seguinte afirmação: “A flutuação estatística é sempre resultado do desleixo do pesquisador, da sua falta de cuidado com a coleta de dados. Por isso, quanto maior for a flutuação estatística de um conjunto de dados, menor será sua confiabilidade”.
4. Por que o resultado de uma medição deve ser preferencialmente a média de uma série de observações?
5. Qual é o significado do desvio padrão de um conjunto de dados? Como se calcula esse desvio padrão?
6. Qual é o significado do desvio padrão da média de um conjunto de dados? Como se calcula esse desvio padrão?
7. O histograma abaixo (Gráfico 4) apresenta os resultados para a medição do período de um pêndulo físico.

Gráfico 4. Histograma representando um conjunto de medidas do período de um pêndulo físico.



- a. Organize uma tabela contendo os períodos medidos e a frequência de cada período medido.
- b. Quantas medidas foram realizadas?
- c. A partir da tabela organizada calcule a média, o desvio padrão do período e o desvio padrão da média do período, mostrando que resultam em 2,055 s, 0,1276 s e 0,0285 s respectivamente.
- d. É verdade que, em face desses resultados, é possível afirmar que o período médio do pêndulo é 2,06 s com incerteza de 0,03 s?

A avaliação da incerteza do tipo B

Segundo o Guia para Expressão da Incerteza na Medição (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a), em condições ideais, todas as incertezas em laboratório seriam avaliadas por procedimentos do tipo A. Como isso nem sempre é possível, é importante introduzir os métodos de avaliação da incerteza do tipo B, que dispensam a análise de estatística de observações repetidas. Geralmente causa algum constrangimento (mesmo aos especialistas da área da Física) o fato de que as avaliações da incerteza do tipo B, muito mais que as avaliações da incerteza do tipo A, dependem fundamentalmente da maturidade, da intuição e do conhecimento que o experimentador tem acumulado sobre seus instrumentos e procedimentos de medição. Contudo, é preciso destacar que avaliações do tipo A e do tipo B, quando executadas corretamente, são igualmente confiáveis na determinação da incerteza de uma medição.

Avaliações da incerteza do tipo B dispensam análise estatística de observações repetidas.

Quando usar uma avaliação do tipo B?

As avaliações da incerteza do tipo B são utilizadas principalmente quando é muito difícil realizar observações repetidas (ou quando não faz sentido realizar tais observações). Com efeito, há vários experimentos em Física que levam várias horas (até dias!) para serem realizados. Também há aqueles que consomem materiais tão caros que não é muito rentável repeti-los. Há também muitas medições que são rápidas e baratas, mas não apresentam variabilidade observável. Por exemplo, considere que desejamos medir o comprimento de um clipe de papel (Figura 7).

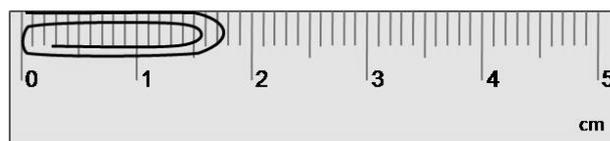


Figura 7. Medindo o comprimento de um clipe de papel com uma régua comum.

Em geral, quando uma pessoa avalia o comprimento de um clipe como esse em,

digamos, 17,5 mm, observando o mesmo clipe uma segunda vez, fará a mesma leitura. Dessa maneira, como uma lista de observações repetidas idênticas não traz nenhuma informação sobre

Algumas medições, quando repetidas, não apresentam flutuação estatística

a confiabilidade dessas observações, não faz sentido realizar uma avaliação do tipo A. Se insistíssemos em realizar uma avaliação da incerteza do tipo A com uma tabela de dados idênticos, chegaríamos necessariamente a um desvio padrão nulo! Como nenhuma grandeza experimental é completamente confiável, não poderíamos tomar o desvio padrão de um conjunto de dados idênticos como medida da sua incerteza. Para entender o que está acontecendo quando uma grandeza experimental não apresenta flutuação estatística perceptível, são úteis os conceitos de erro sistemático e erro aleatório.

Componentes aleatórias e sistemáticas do erro

Em um texto específico sobre os conceitos de erro e incerteza, destacamos que toda a grandeza experimental está sujeita a várias fontes de erro, tais como: calibração do instrumento, condições de uso e armazenamento, interação instrumento-objeto e o efeito de variáveis que não conseguimos (ou não desejamos) controlar. A esse respeito, quando estamos pensando em trabalhar com um conjunto de observações repetidas sob as mesmas condições, faz sentido organizar as fontes de erro em duas componentes chamadas: (1) erro aleatório e (2) erro sistemático.

Erro = Erro Aleatório + Erro Sistemático

Erro aleatório é, por definição, a componente do erro que varia entre observações repetidas sob as mesmas condições. Portanto, o erro aleatório é responsável pelas flutuações estatísticas. Quanto maior for a

O erro aleatório é responsável pelas flutuações estatísticas

componente aleatória do erro, maior será chance de observarmos flutuações estatísticas.

Erro sistemático é a componente que não varia entre observações repetidas, alterando

sistematicamente o resultado de uma medição sempre no mesmo sentido e da mesma quantidade. Nessa componente de erro, não há flutuação.

Para ilustrar o erro sistemático, considere que a régua com que medimos o clipe de papel (Figura 7), devido a uma imperfeição de fabricação, acrescente um milímetro a cada centímetro de tudo aquilo que ela mede. Dessa maneira, enquanto nossa leitura indica que o clipe possui 17,5 mm, ele possuirá realmente algo em torno de 16,5 mm.

Claro que, quando temos esse tipo de informação em mãos, somos obrigados a fazer uma correção. Ou seja, se soubéssemos que a régua em questão acrescenta *exatamente* um milímetro a cada centímetro, seríamos obrigados a corrigir todas as medidas obtidas com esse instrumento antes de publicá-las. Contudo, mesmo após efetuar tais correções, restará sempre alguma incerteza sobre a resolução, fabricação e calibração dos instrumentos de medida que estamos empregando. Ao lado disso, como é possível perceber, devido ao seu caráter sistemático, algumas componentes da incerteza no comprimento do clipe de papel não poderiam ser avaliadas adequadamente por uma série de observações repetidas desse comprimento⁹. Enfim, se a análise de flutuações estatísticas não resolve o problema, o que fazemos para avaliar a incerteza em situações como essa?

Como fazer uma avaliação do tipo B na prática?

Quando feita muito rigorosamente, a avaliação da incerteza do tipo B pode ser bastante complexa (a um nível raramente utilizado na prática tanto na pesquisa básica quanto na indústria). Por não considerarmos essencial que alunos de graduação dominem essa técnica, nós a apresentamos separada no Apêndice D ao final deste livro. Na prática, para uma avaliação do tipo B, basta saber que ela está sempre fundamentada na

⁹ É tentador fazer uma correspondência entre erro aleatório e incerteza do tipo A, entre erro sistemático e incerteza do tipo B. Contudo, o Guia (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a) destaca que, em algumas situações, essa correspondência não se sustenta. Por isso, prefere-se classificar a incerteza em função do procedimento usado para determiná-la (estatístico ou não) em vez da natureza sistemática ou aleatória das componentes de erro.

experiência prática acumulada pelos cientistas com seus instrumentos e procedimentos de medida. Em geral, os especialistas neste ou naquele procedimento têm uma ideia muito boa do quanto (não) podem confiar em seus instrumentos e procedimentos.

Considere por exemplo, o caso da régua, que é geralmente o instrumento de medida mais simples que temos ao nosso alcance. A menor divisão da escala da régua é de 1,0 mm. Algumas pessoas sustentam que a incerteza (do tipo B) de medições feitas com a régua é de 0,3 mm. Outros, mais conservadores, estimam essa mesma incerteza em 0,5 mm. Se você tiver curiosidade para saber como podemos chegar a esses valores, consulte o Apêndice D. Porém, como regra prática, basta saber que a incerteza de medidas feitas com instrumentos de escala como a régua é geralmente considerada igual à metade da menor divisão da escala.

Incerteza do tipo B de medidas com instrumentos analógicos: metade da menor divisão da escala.

No caso de instrumentos digitais (ex., alguns tipos de cronômetros, termômetros e balanças) não há escala e a regra prática de avaliação da incerteza precisa ser um pouco diferente. A menos que o fabricante dê uma informação diferente, considera-se tradicionalmente que a incerteza de medições feitas com instrumentos de leitura digital são iguais ao menor valor não-nulo que o mostrador é capaz de apresentar. Por exemplo, se o visor de um termômetro digital nos mostra a temperatura de 23,4 °C, consideramos

Incerteza do tipo B de medidas com instrumentos digitais: menor valor não-nulo do mostrador.

que sua incerteza é de 0,1 °C (a menos que o fabricante dê uma informação diferente). Igualmente, se uma balança digital nos mostra uma massa de 456,5 g, consideramos que a incerteza dessa medição é de 0,1 g.

Com essas regras práticas, você deverá ser capaz de avaliar a incertezas em medições nos casos em que uma avaliação do tipo A não puder ser feita.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Avaliação da incerteza do tipo B**”.

1. Qual é a diferença entre avaliações da incerteza do tipo A e avaliações da incerteza do tipo B?
2. Em quais situações pode ser utilizada uma avaliação da incerteza do tipo B?
3. O que distingue a componente aleatória da componente sistemática do erro de uma medida? Dê exemplos.
4. Qual é a incerteza de uma medição feita com um paquímetro (cujas menores divisões da escala é 0,1 mm)? Lembre-se que o paquímetro é um instrumento analógico.

Medições indiretas e propagação da incerteza

Medições indiretas

Os instrumentos de medida realmente necessários em um laboratório de mecânica são poucos, pois, munidos de uma trena, um cronômetro e uma balança, é possível realizar diversas medições. Isso ocorre porque as grandezas físicas estão relacionadas umas às outras e podemos inferir uma a partir das medidas de outras.

É muito comum realizarmos medições indiretas. Por exemplo, podemos determinar a velocidade média de um corpo dividindo seu deslocamento pelo intervalo de tempo correspondente. Da mesma maneira, é possível calcular a densidade de peças metálicas dividindo sua massa (medida com uma balança) pelo seu volume (medido com régua e paquímetro).

A realização de uma medição indireta sempre supõe um modelo matemático que descreva a relação entre as grandezas envolvidas. No contexto desta disciplina, não estamos interessados em um tipo qualquer de modelo matemático, mas somente naqueles que resultam de pressupostos físicos. Por exemplo, considere que desejamos determinar a aceleração da gravidade usando um pêndulo. Nesse caso, é possível deduzir das leis de Newton (acrescentados alguns pressupostos específicos) que, para um pêndulo simples, vale a seguinte relação:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nessa equação, T é o período do pêndulo, l é o comprimento e g é a aceleração local da gravidade. Isolando a aceleração da gravidade na expressão, obtém-se:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Assim, é possível determinar a aceleração local da gravidade com um pêndulo, medindo-se o comprimento do pêndulo (com uma trena, por exemplo) e seu período de

oscilação (com um cronômetro digital). Isso é um exemplo do que chamamos medição indireta.

Modelo matemático: Grandezas de entrada e de saída.

Como já foi antecipado, todas as medições indiretas supõem um modelo matemático, ou seja, uma relação matemática que permita determinar o valor de uma grandeza desconhecida a partir dos valores de outras grandezas conhecidas¹⁰. As grandezas conhecidas – cujos valores são inseridos no modelo matemático – são chamadas grandezas de entrada. A grandeza cujo valor se obtém a partir das grandezas de entrada é chamada grandeza de saída (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a). A relação entre grandezas de entrada e grandezas de saída em uma medição indireta encontra-se representada genericamente na Figura 8.



Figura 8. Representação da relação entre grandezas de entrada e grandezas de saída em uma medição indireta.

No exemplo do pêndulo simples – em que desejamos determinar a aceleração local da gravidade – o período T e o comprimento l (que podem ser determinados com trena e cronômetro) são grandezas de entrada. A aceleração da gravidade g , por sua vez, é a grandeza de saída.

Considere que estamos diante de um pêndulo com $(1,000 \pm 0,005)m$ de comprimento e $(2,00 \pm 0,01)s$ de período¹¹. Substituímos as melhores estimativas das grandezas de entrada $\bar{l} = 1,000 m$ e $\bar{T} = 2,00 s$ no modelo matemático para obter a melhor

¹⁰ Em mecânica experimental, estamos interessados particularmente nos modelos matemáticos que representam modelos científicos dos fenômenos mecânicos. Em outro texto de apoio, discutimos como relações matemáticas podem ser deduzidas das leis da física e como o conceito de modelo é fundamental para se compreender um pouco melhor a relação entre teoria e experimento. Assim, além da dimensão metrológica (discutida no presente texto de apoio), há uma dimensão filosófica (epistemológica) muito importante no conceito de modelo (que será apresentada cuidadosamente em um momento mais oportuno).

¹¹ Esses valores são fictícios.

estimativa da grandeza de saída: $\bar{g} = 4\pi^2\bar{l}/\bar{T}^2 = \pi^2 \cong 9,87 \text{ m/s}^2$. Enfim, tendo estimado a aceleração da gravidade, resta uma questão que não podemos deixar escapar:

Como é possível avaliar a incerteza do resultado obtido?

Propagação da incerteza: primeira abordagem

Nenhum procedimento experimental é completamente confiável e sempre há alguma incerteza associada aos valores das grandezas experimentais. Assim, todas as grandezas de entrada – desde que sejam obtidas experimentalmente – possuem alguma incerteza. Portanto, a grandeza de saída deve

A incerteza se propaga das grandezas de entrada para a grandeza de saída

possuir alguma incerteza também! Essa repercussão da incerteza das grandezas de entrada sobre a incerteza da grandeza de saída é chamada propagação da incerteza.

Há vários métodos para estimar a incerteza da grandeza de saída em uma medição indireta, mas dificilmente é exigido que o aluno conheça todos os métodos disponíveis.

Em geral, o professor escolhe o método que prefere e instrui seus alunos a trabalharem de acordo com ele. O mais simples de todos esses métodos de propagação da incerteza (ainda que seja um pouco mais limitado) é chamado método dos valores-limite. Devido à sua simplicidade e praticidade, escolhemos apresentá-lo em primeiro lugar. Três alternativas mais rigorosas para a propagação da incerteza são apresentadas nos Apêndices A, B e C. Consulte seu professor para saber qual método será adotado. Enfim, o método dos valores limites é apresentado passo a passo no Quadro 3.

Quadro 3. Método dos valores-limite para propagação da incerteza.

Passo 01 Juntar os dados	Determine o modelo matemático e os valores das grandezas de entrada com suas respectivas incertezas. No nosso exemplo, temos: $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ com $(1,000 \pm 0,005)\text{m}$ de comprimento e $(2,00 \pm 0,01)\text{s}$ de período.
Passo 02 O valor médio	Calcule a melhor estimativa da grandeza de saída substituindo as melhores estimativas das grandezas de entrada no modelo. No nosso exemplo: $\bar{g} = 4\pi^2\bar{l}/\bar{T}^2 \cong 9,8696 \text{ m/s}^2$

Passo 03 Limite superior	<p>Calcule o “limite superior” da grandeza de saída, somando ou subtraindo as incertezas das grandezas de entrada de maneira a obter o maior resultado possível. No nosso exemplo:</p> $g_{MAX} = 4\pi^2[\bar{l} + u(l)]/[\bar{T} - u(T)]^2 \cong 10,0189 \text{ m/s}^2$
Passo 04 Limite inferior	<p>Calcule o “limite inferior” da grandeza de saída, somando ou subtraindo as incertezas das grandezas de entrada de maneira a obter o menor resultado possível. No nosso exemplo:</p> $g_{MIN} = 4\pi^2[\bar{l} - u(l)]/[\bar{T} + u(T)]^2 \cong 9,7228 \text{ m/s}^2$
Passo 05 Diferença sobre 2	<p>A incerteza da grandeza de saída é aproximadamente igual à diferença entre os dois valores-limite obtidos dividida por dois. No nosso exemplo:</p> $u(g) \cong \frac{g_{MAX} - g_{MIN}}{2} \cong \frac{10,0189 - 9,7228}{2} \cong 0,14805 \text{ m/s}^2$
Passo 06 Arredondamentos	<p>Fazemos os devidos arredondamentos para expressar o valor da grandeza de saída com sua respectiva incerteza. No nosso exemplo, temos que a aceleração da gravidade é dada por:</p> $(9,9 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$

Como é possível perceber, o último passo envolve um arredondamento que é importante compreendermos muito bem! Embora existam critérios mais sofisticados para determinar com quantos algarismos deve ser registrada a incerteza da medição, sugerimos adotar que as incertezas sejam representadas somente com um algarismo não-nulo,

Ao fim da propagação, recomenda-se arredondar a incerteza para que ela apresente apenas um algarismo não nulo.

obtido por arredondamento. Por exemplo, se a incerteza em determinada grandeza y , obtida com várias casas decimais após a propagação é dada por $u(y) \cong 0,1572 \text{ cm}$, recomenda-se arredondá-la para o valor $u(y) \cong 0,2 \text{ cm}$. Com isso, o resultado de uma medição $\bar{y} \cong 67,0415 \text{ cm}$ deverá ser escrito com apenas um algarismo após a vírgula¹². Ou seja, $\bar{y} \cong 67,0 \text{ cm}$.

No exemplo do Quadro 3, obtivemos uma incerteza $u(g) \cong 0,14805 \text{ m/s}^2$. Segundo essa regra, devemos fazer primeiro $u(g) \cong 0,1 \text{ m/s}^2$ e, em seguida, arredondar a aceleração $\bar{g} \cong 9,8696 \text{ m/s}^2$ de maneira a apresentar a mesma quantidade de casas

¹² A necessidade de representar a incerteza e o resultado da medição com a mesma quantidade de algarismos após a vírgula foi discutida em texto anterior sobre incerteza e algarismos significativos.

decimais que sua incerteza: $\bar{g} \cong 9,9 \text{ m/s}^2$.

Outros métodos de propagação da incerteza

Apesar de ser mais simples, o método dos valores-limite não favorece identificar qual das grandezas de entrada contribui mais para a incerteza da grandeza da saída. Nos casos em que essa discussão é importante, recomendamos usar um dos três métodos alternativos apresentados e discutidos em apêndice a este livro. São estes:

1. **Resolução numérica da lei de propagação.** Trata-se de um procedimento numérico, apresentado no Apêndice A, que tem a vantagem de poder ser discutido e compreendido por estudantes sem conhecimentos de cálculo diferencial e integral.
2. **Resolução analítica da lei de propagação.** Trata-se de um procedimento que requer o cálculos de derivadas parciais, ou seja, o estudante que não tiver conhecimento suficiente de cálculo diferencial e integral precisará da ajuda do professor, para gerar a expressão analítica que lhe permitirá calcular a incerteza. Esse método é apresentado no Apêndice B.
3. **Uso de equações tabeladas.** A maneira mais usual de evitar a apresentação da lei de propagação é fazer com que os alunos usem e/ou memorizem uma pequena tabela com leis de propagação específicas para operações básicas (ver Apêndice C).

Como os três métodos acima são justificados rigorosamente a partir dos mesmos pressupostos, é esperado que, na maioria das situações de interesse, eles forneçam aproximadamente os mesmos resultados.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Medições indiretas e propagação da incerteza**”.

1. O que são grandezas de entrada e grandezas de saída?
2. Por que é importante saber calcular a propagação da incerteza das grandezas de entrada para as grandezas de saída?
3. Considere uma amostra sólida de um material desconhecido que tem sua massa estimada em $(5,435 \pm 0,002) g$ e volume $(1,73 \pm 0,08) cm^3$. Sabendo que densidade é definida como a razão entre a massa e o volume, determine a melhor estimativa e a incerteza da densidade desse material.
4. Segundo um fabricante de tubos cilíndricos de aço inoxidável, um dos produtos de sua linha apresenta diâmetro interno próximo a uma polegada (ou seja, $25,40 mm$) com $0,03 mm$ de incerteza. Considere que um comprimento de $(2,00 \pm 0,05) m$ desse tubo está preenchido por água potável com densidade estimada entre $1,000 g/cm^3$ e $1,004 g/cm^3$ com 95% de segurança (supondo uma distribuição normal). Determine a massa de água contida no tubo e sua respectiva incerteza.
5. Considere um pêndulo de comprimento l dado por $(1,52 \pm 0,02) m$ montado em um laboratório em que a aceleração local da gravidade g pertença ao intervalo $(9,87 \pm 0,06) m/s^2$ com 95% de segurança. A partir dessas informações e assumindo o modelo do pêndulo simples (segundo o qual $T = 2\pi\sqrt{l/g}$), responda às seguintes questões:
 - a. Qual é o valor esperado para o período desse pêndulo e qual é a incerteza desse valor?
 - b. Considere que um sujeito tenha realizado uma medição cuidadosa do período T desse pêndulo, obtendo como resultado $(2,498 \pm 0,002) s$. Esse resultado concorda com a predição feita no item anterior? Por que motivo? O que podemos concluir disso?

UNIDADE II – Relação Teoria-Experimento

Crítica à crença na comprovação científica

Em geral, os cursos de ciência ensinam mais a “fazer ciência” que a refletir sobre sua natureza. Mas qual estudante de Física nunca se perguntou o que é ciência, afinal? É possível dizer que, para o senso comum, a ciência é estritamente objetiva, não havendo nela espaço para especulações e opiniões pessoais; as teorias científicas são baseadas exclusivamente em observações experimentais rigorosas; o conhecimento científico é sempre comprovado por meio de experimentos (daí a expressão “comprovação científica” tão cara aos comerciais de xampu e pasta de dente). Mas será que o senso comum está correto a respeito da ciência?

Neste texto de apoio, questionamos a existência da comprovação científica, ou seja, colocamos em dúvida se há fundamento em dizer que o conhecimento científico pode ser comprovado por meio de experimentos. Como será possível perceber, embora os questionamentos apresentados neste texto sejam de natureza filosófica, eles têm profundas implicações práticas para o trabalho nos laboratórios didáticos.

Do senso comum à sala de aula

Não é difícil reconhecer que as visões de ciência de senso comum estão presentes nos laboratórios didáticos de Física. Veja, por exemplo, essa conclusão tipicamente redigida por um estudante com respeito a um experimento tradicional no curso de mecânica (as informações entre colchetes geralmente não estão presentes, mas podem ser subentendidas do contexto):

“A partir desse experimento [realizado com um carrinho específico], comprovamos a segunda lei de Newton, ou seja, que a força resultante produz [em

qualquer corpo] uma aceleração inversamente proporcional à sua massa ($\vec{F}_R = m\vec{a}$)”.

Como é possível perceber, essa conclusão está totalmente apoiada sobre o discurso da comprovação científica, ou seja, na crença de que as leis científicas são comprovadas com base em experimentos. Conclusões semelhantes são escritas todos os dias por praticamente todos os estudantes e são encorajadas pela maioria dos professores, mas onde está o equívoco?

Um motivo para abandonar a crença na “comprovação científica”

Se formos rigorosos – como qualquer cientista deve ser – perceberemos que a afirmação feita pelo estudante no exemplo anterior é uma generalização apressada e sem fundamento lógico.

Comprovar uma lei universal a partir de um experimento particular não tem fundamento lógico!

Vamos deixar isso bem claro: as leis de Newton são afirmações universais (ou seja, elas não dependem de um contexto específico, mas são sustentadas com respeito a quaisquer corpos de massa m sobre os quais se aplica uma força resultante \vec{F}_R); o experimento realizado, por sua vez, é específico (foi utilizado um carrinho particular). Com efeito, mesmo se, no caso específico, a força resultante se mostrar proporcional à aceleração, não podemos garantir a validade desse enunciado para outros corpos em outras circunstâncias e outras regiões do espaço e do tempo (Figura 10).

Generalização sem Fundamento

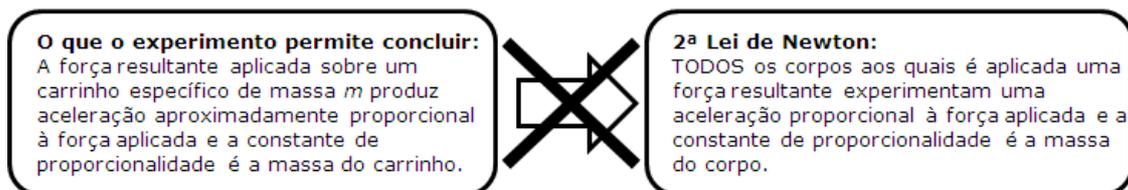


Figura 10. Representa a diferença fundamental entre o que um experimento específico permite concluir e o enunciado (geral) de uma lei universal.

Assim, comprovar uma lei universal a partir de um experimento particular não tem fundamento lógico. Para ilustrar a falta de fundamento desse tipo de generalização (que tenta comprovar uma lei ou afirmação geral a partir de um experimento particular), considere a situação em que queremos saber a cor do cabelo de todos os estudantes de uma turma de 20 alunos. Nesse caso, quantos estudantes dessa turma seria preciso observar para comprovar rigorosamente a afirmação geral de que “Todos os alunos são morenos”? Considere que tenham sido sorteados 5 alunos dessa turma e esses cinco alunos têm cabelo escuro. É possível generalizar, afirmando que todos os alunos da turma têm a mesma cor de cabelo? Seguramente não, pois você não tem nenhuma garantia de que os outros alunos serão morenos também.



Figura 11. Representação da turma de estudantes. Como é possível perceber, os cinco alunos observados são morenos, mas o restante da turma não é.

Seguindo esse mesmo raciocínio, quantos objetos é preciso lançar em queda livre para comprovar rigorosamente que, desprezada a resistência do ar, **TODOS** os corpos caem na superfície da Terra com a mesma aceleração? Vamos supor que você tenha observado a queda de 12 corpos distintos e que todas as quedas ocorreram com a mesma aceleração. É possível considerar confirmada experimentalmente a afirmação de que **TODOS** os corpos caem com a mesma aceleração na superfície da Terra? Rigorosamente, não. Afinal, é possível que, em um lançamento seguinte, um corpo não respeite essa lei.

Enfim, acreditamos ter deixado claro neste argumento que a comprovação científica (ou seja, a comprovação experimental de afirmações gerais), é mais um mito popular que não sobrevive a uma análise lógica rigorosa. Sua única vantagem sobre o papai Noel e o coelho da Páscoa é que, cedo na nossa infância, nós nos damos conta que essas coisas não existem. A crença na comprovação científica, entretanto, tende a sobreviver por mais tempo.

Da comprovação à refutação

Feita a crítica acima, resta a seguinte questão: Se não existe comprovação científica, qual é a relação entre teoria e experimento na ciência? Ou ainda, dito de uma maneira mais operacional, “se eu não posso afirmar que esse experimento comprova a lei X, o que eu escrevo na conclusão no meu relatório experimental?!”. A saber, essa questão da relação entre teoria e experimento tem diversas respostas e todas elas têm suas limitações. Para compreender uma das respostas possíveis, retomemos o exemplo da turma de alunos morenos.

Considere que seguimos observando a cor do cabelo dos alunos e que encontramos um aluno loiro! Quando isso acontece, constatamos que a afirmação geral de que todos os alunos são morenos é FALSA! Em tese, o mesmo

aconteceria se, com um experimento rigoroso,

Em ciência é possível dizer “sua afirmação é FALSA!” com base em observação experimental

encontrássemos um corpo em queda livre que caia com aceleração diferente de g .

Tendo encontrado esse corpo especial, não poderíamos mais afirmar que TODOS os corpos próximos à superfície da Terra caem com a mesma aceleração (igual a g).

Assim, embora não exista comprovação científica (procedimento experimental para provar que afirmações científicas são VERDADEIRAS), existe refutação científica. Em ciência, é possível dizer “isto é FALSO” com base em observação experimental!



Figura 12. Afirmações científicas não são comprovadas experimentalmente, mas podem ser testadas por meio de experimentos.

Seguindo esse raciocínio, reconhecemos ser incorreto dizer que o conhecimento científico é confiável porque suas afirmações são comprovadas experimentalmente. Contudo, as explicações científicas são eventualmente submetidas a testes experimentais rigorosos em que podem ser refutadas¹³. Dessa maneira, as afirmações que sobrevivem aos testes experimentais não são necessariamente verdadeiras, mas aceitas temporariamente como proposições cientificamente válidas.

Como não existe comprovação científica, é incorreto dizer que o conhecimento científico é confiável porque é cientificamente provado!

Refutação: ingenuidade ou sofisticação?

Até aqui deve estar claro que a refutação não tem as mesmas deficiências lógicas da crença na comprovação científica. Entretanto, é preciso reconhecer algumas limitações das visões de ciência baseadas exclusivamente na refutação. Considere, por exemplo, a seguinte conclusão redigida por um estudante após realizar um experimento tradicional no laboratório de mecânica:

“A partir do presente experimento [realizado com um carrinho específico], a segunda lei de Newton foi testada rigorosamente, tendo sobrevivido ao teste”.

Do ponto de vista lógico, não há nada de errado com essa conclusão. Porém, observando-a com cuidado, é possível perguntar “o que aconteceria se, nesse

¹³ É importante destacar aqui que nem todos os testes científicos são estritamente experimentais. Há, por exemplo, experimentos de pensamento (muito utilizados por Einstein) e testes de consistência interna que são fundamentalmente teóricos, mas muito importantes para o desenvolvimento da ciência. Não abordamos a questão dos testes teóricos detalhadamente aqui porque estamos mais concentrados na relação teoria-experimento e na crítica à comprovação científica.

experimento didático, a força resultante não se mostrasse proporcional à aceleração? Estaria conclusivamente refutada a 2ª lei de Newton com esse experimento? A comunidade científica seria obrigada a descartar essa lei imediatamente?”. É certo que não.

Com efeito, seríamos muito ingênuos se acreditássemos que todo o conhecimento científico está igualmente sujeito a crítica e que todos os pesquisadores estão sempre abertos a abandonar as crenças (leis, teoremas, teorias) consideradas fundamentais pela

Seríamos muito ingênuos se acreditássemos que todo o conhecimento científico está igualmente sujeito a crítica

comunidade científica. Na prática, existem convenções que costumam ser respeitadas em ciência: regras (geralmente não escritas) dizendo quais são as afirmações centrais nas teorias (e que devem ser mantidas) e quais são auxiliares (que podem ser testadas e modificadas). Por exemplo, no contexto dos experimentos didáticos de mecânica, as leis de Newton são irrefutáveis por convenção. Ou seja, nenhum cientista do século XXI pode ser levado a sério ao considerar refutadas as leis de Newton a partir de um experimento didático de mecânica mesmo se o resultado desse experimento sugerir a refutação.

No fundo, as razões que levam os cientistas a preservar o núcleo das teorias alterando somente as afirmações periféricas são mais históricas que lógicas. Afinal, se as leis da mecânica de Newton têm sido bem sucedidas por tantos séculos, por que acreditar que um estudante qualquer, realizando um experimento elementar, poderia refutar essas leis tão bem corroboradas? Assim, a atitude mais racional que se pode ter diante de um resultado que esteja ameaçando uma lei geral é transmitir a refutação para alguma hipótese auxiliar. Ou seja, se os resultados obtidos no seu experimento estão em desacordo com o que prevê a teoria (por exemplo, se a força resultante parece não ser

proporcional à aceleração), corrija seu procedimento, suas hipóteses auxiliares, suas idealizações, mas não mexa nas leis de Newton!

Retornemos agora à conclusão redigida pelo estudante após realizar um experimento didático sobre as leis de Newton. Segundo esse estudante, as leis de Newton foram “rigorosamente testadas”, porém, rigorosamente falando, elas são aceitas como verdadeiras por convenção. Logo, não são testáveis nem refutáveis (por convenção, por decisão da comunidade científica) independente do resultado que possa ocorrer no experimento.

Enfim, a ingenuidade que estamos discutindo agora está em acreditar que tudo o que se afirma em ciência é igualmente refutável por meio de experimentos, que todas as afirmações científicas são experimentalmente testáveis e que, individualmente, um pesquisador treinado ou um estudante iniciante pode por abaixo a construção teórica de toda uma comunidade em uma só tacada! A rigor, a refutação é praticada geralmente dentro dos limites de certas convenções estabelecidas (explícita ou tacitamente) pela comunidade científica.



Figura 13. Nem todas as afirmações científicas são igualmente testáveis. A refutação é praticada geralmente dentro dos limites de certas convenções.

Considerações finais

Neste texto, exploramos da maneira mais didática possível alguns aspectos do debate filosófico em torno da relação entre teoria e experimento em ciência. Como é possível perceber, essa discussão não é muito elementar, mas insistimos nela por possuir fortes implicações sobre o trabalho no laboratório didático. Afinal, o que podemos concluir de um experimento didático? É verdade que experimentos são comprovações das teorias?

Tradicionalmente, os experimentos didáticos são preparados como se fosse possível e necessário comprovar as teorias experimentalmente. Como se o papel do laboratório didático fosse comprovar o que se diz na aula teórica. Como é possível perceber, a crença na comprovação experimental sequer tem fundamento lógico e precisa ser abandonada se quisermos ser rigorosos.

Como alternativa à visão de ciência baseada na comprovação científica, apresentamos um ponto de vista baseado nos conceitos de refutação e convenção. O papel em sala de aula desses dois conceitos será explorado em outro texto de apoio. Por agora, esperamos ter deixado claro neste texto a importância de abandonar definitivamente o discurso da comprovação científica.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Crítica à crença na comprovação científica**”.

1. Por que devemos abandonar a crença na comprovação científica?
2. O que é refutação? Qual é a importância desse conceito?
3. Todo o conhecimento científico está igualmente sujeito a crítica? Justifique sua resposta com argumento e exemplos.
4. Cite dois tipos de conclusão que jamais podemos tirar de um experimento singular. Por que essas conclusões são proibidas?
5. Após realizar um experimento sobre a força de atrito estático, um grupo de estudantes concluiu que “A partir dos dados experimentais, é comprovado que o módulo da força de atrito estático máxima é sempre proporcional ao módulo da força normal e não depende da área de contato entre as superfícies envolvidas”. Que problemas há com essa conclusão? Redija um breve parágrafo a respeito dessa afirmação (de 5 a 10 linhas).
6. Após realizar o experimento de lançamento horizontal, um grupo de estudantes concluiu que “A partir dos dados experimentais, é possível comprovar que a aceleração com que todos os corpos caem na superfície da Terra independe da sua massa”. Que problemas há com essa conclusão? Redija um breve parágrafo a respeito dessa afirmação (de 5 a 10 linhas).
7. Após realizar três experimentos diferentes dos laboratórios de mecânica, um grupo de estudantes concluiu que “A partir dos dados coletados nos experimentos realizados, está provado que a força resultante \vec{F}_R produz, em qualquer corpo de massa m , uma aceleração tal que $\vec{F}_R = m\vec{a}$ ”. Que problemas há com essa conclusão? Redija um breve parágrafo a respeito dessa afirmação (de 5 a 10 linhas).

Da comprovação à modelagem científica

Síntese das ideias anteriores

A questão da relação entre teoria e experimento é fundamental em um laboratório didático e está intimamente relacionada com as conclusões que podemos (e não podemos) tirar de um experimento após sua realização. No texto “Crítica à crença na comprovação científica”, foi feita uma crítica dura à ideia de que o conhecimento científico é comprovado experimentalmente. Demonstramos que, a rigor, a crença na comprovação científica não possui sustentação lógica e precisa ser abandonada. Em seguida apresentamos elementos para uma visão de ciência menos ingênua. O argumento realizado no referido texto de apoio pode ser resumido nas seguintes afirmações:

1. A crença de que é possível comprovar uma teoria geral a partir de experimentos particulares não tem sustentação lógica e precisa ser abandonada. Ou seja, não tem fundamento dizer, com base experimental, que esta ou aquela teoria ou lei é definitivamente verdadeira. Todos os enunciados em ciência são potencialmente temporários.
2. Em ciência, não existe comprovação, mas refutação experimental. Ou seja, as afirmações científicas, embora não possam ser positivamente comprovadas, podem ser testadas com base em experimentos.
3. Nem todas as afirmações científicas são igualmente refutáveis. Testes científicos são realizados sempre dentro dos limites de certas convenções – regras (geralmente não escritas, implícitas entre os cientistas) dizendo quais são as afirmações fundamentais nas teorias (e que devem ser mantidas) e quais são auxiliares (que podem ser testadas e modificadas).

Assim, a visão de ciência apresentada e defendida neste livro como alternativa à crença ingênua na comprovação científica está baseada em dois conceitos: refutação (descarte de hipóteses com base experimental) e convenção (conjunto de regras aceitas tacitamente pela comunidade científica que orientam o trabalho do pesquisador)¹⁴.

O que (não) podemos concluir de um experimento?

As três afirmações acima, originadas na filosofia da ciência, possuem fortes implicações práticas para o trabalho no laboratório de ensino – principalmente no que diz respeito às conclusões que podemos tirar de um experimento didático. Segundo essas afirmações:

1. Não tem sustentação lógica concluir que o resultado obtido em um experimento didático (ou qualquer outro tipo de experimento científico) possa comprovar uma teoria ou lei. Assim, afirmações do tipo “com este experimento, comprovamos a lei...” não tem o menor fundamento!
2. Nem todas as afirmações científicas são igualmente testáveis e refutáveis. Na prática, existem convenções que protegem os princípios, leis e teorias consideradas mais fundamentais. Por isso, não faz muito sentido concluir que “as leis de Newton foram testadas rigorosamente nesse experimento e sobreviveram ao teste”, pois, mesmo se o teste apontasse para algum tipo de anomalia, há convenções que nos proibem de considerar refutadas as leis de Newton no contexto dos experimentos didáticos de mecânica.

Até agora, deixamos bem claro quais tipos de conclusão não são possíveis em um experimento didático. Porém, o que podemos efetivamente concluir ao final de uma atividade experimental?! No presente texto de apoio vamos responder a essa questão apresentando uma ferramenta de trabalho que será muito útil para orientar as análises

¹⁴ O leitor iniciado perceberá que a visão de ciência apresentada neste texto de apoio (e que permeia todo este livro) é herdeira do pensamento de Imre Lakatos (1993).

dos dados e a redação de conclusões experimentais. Nosso ponto de partida é o conceito de modelo científico.

O que é um modelo científico?

O conceito de modelo é empregado de diversas maneiras e faz parte do vocabulário diário da maioria dos cientistas. Tendo em vista a diversidade de usos desse conceito, é praticamente impossível estabelecer uma definição que não seja alvo de discussão¹⁵.

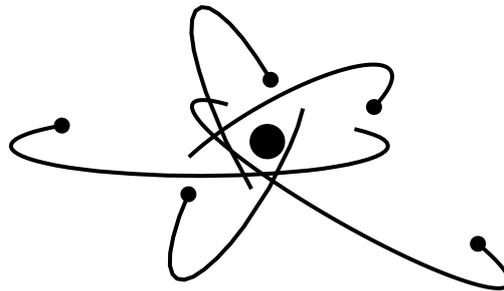


Figura 14. A representação planetária do átomo (com elétrons orbitando em torno do núcleo em trajetórias elípticas) é um exemplo de modelo.

Como primeiro passo, podemos considerar que modelos são representações idealizadas de fenômenos ou objetos reais. Mas o que isso significa? Considere, por exemplo, que suspendemos um cilindro de madeira em uma mola (veja Figura 15) e, puxando o cilindro para baixo, observamos que ele entra em movimento. Como fazemos para explicar esse movimento?

Geralmente, quando representamos um sistema desse tipo, adotamos os seguintes pressupostos: (1) a massa da mola é

Modelos são representações idealizadas de fenômenos ou objetos reais.

nula; (2) a única característica relevante do corpo suspenso é sua massa (ignorando, por exemplo, sua forma geométrica ou o material de que é feito); e (3) a força elástica

¹⁵ Foge ao escopo deste livro esmiuçar a diversidade de empregos do conceito de modelo na literatura. Para maior aprofundamento sobre o uso desse conceito na relação entre teoria e experimento, recomenda-se o livro *Teoria e Realidade* (BUNGE, 2008).

aplicada no gancho pela mola satisfaz a equação $\vec{F}_E = -k\vec{x}$ (lei de Hooke), em que \vec{F}_E é a força elástica, k é a constante elástica e \vec{x} é a deformação da mola.

Essas hipóteses podem ser chamadas idealizações e estão sempre presentes quando elaboramos um modelo científico.

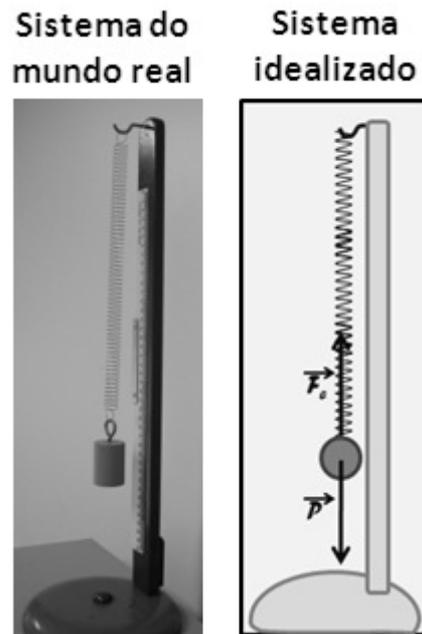
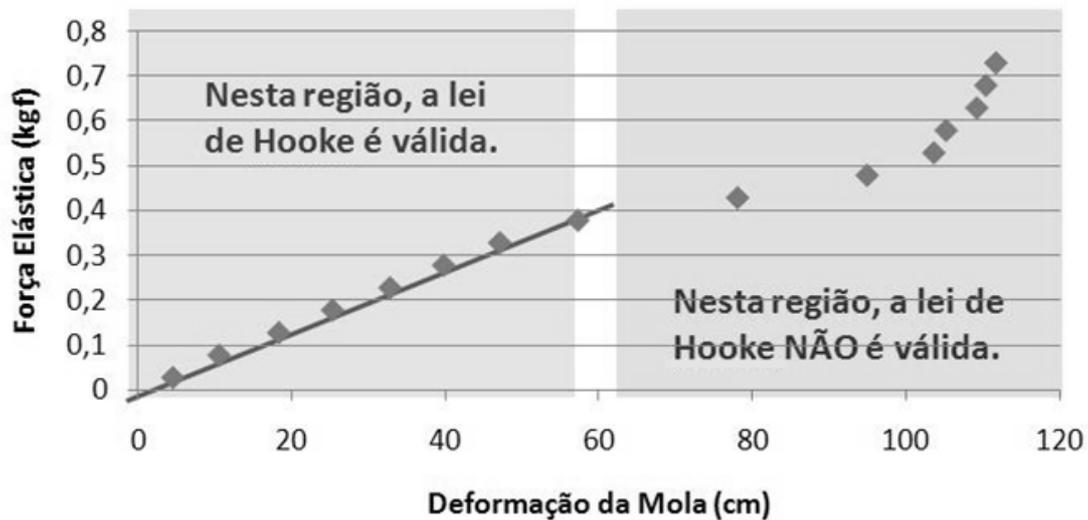


Figura 15. Modelos são representações idealizadas de sistemas e fenômenos físicos que têm lugar no mundo real. Nesse exemplo, o sistema em questão composto por um cilindro de madeira (pintado de verde) que está suspenso em uma mola. Observe que o mundo real é sempre mais rico em detalhes que os modelos idealizados que utilizamos para representá-lo.

Por ser uma representação idealizada da realidade, cada modelo científico só é válido dentro de certos limites práticos. Ou seja, todo modelo possui um domínio de validade. Modelos não são simplesmente falsos ou verdadeiros, mas são válidos ou não para este ou para aquele propósito, para este ou para aquele grau de precisão. Considere, por exemplo, a mola em que se suspende um cilindro de madeira. Se a carga suspensa na

mola for pequena, ela se comportará segundo a lei de Hooke ($\vec{F}_E = -k\vec{x}$). Porém, se a mola for excessivamente deformada, a lei de Hooke perderá sua validade (Gráfico 5).

Gráfico 5. Gráfico da relação entre força elástica e deformação de uma mola real.



O Gráfico 5 ilustra a limitação do domínio de validade da lei de Hooke para uma determinada mola. Segundo essa lei, o módulo da força elástica F_E exercida por uma mola deve ser proporcional à deformação x da mola ($F_E = kx$). Em laboratório, medimos a força elástica exercida por uma mola em função da sua deformação. Como é possível perceber, o gráfico mostra que, ultrapassado certo limite, a lei de Hooke deixa de ser satisfeita. Ou seja, essa lei é, na verdade, uma idealização de validade limitada.

Além de assumir pressupostos relativamente específicos à situação concreta em estudo, modelos científicos articulam pressupostos teóricos gerais. O movimento do corpo que oscila preso à mola, por exemplo, não se descreve simplesmente admitindo verdadeira a Lei de Hooke. Para compreender efetivamente esse movimento, é preciso reconhecer que a força resultante aplicada nesse corpo é igual ao produto da sua massa pela sua aceleração (2ª lei de Newton).

É somente juntando essas duas classes de informações (pressupostos específicos e gerais) que podemos concluir alguma coisa a respeito do fenômeno em estudo. Por exemplo, assumindo que a força exercida pela mola é dada pela lei de Hooke, que a massa da mola é desprezível em relação à massa do corpo suspenso, que o campo gravitacional é uniforme (idealizações específicas) e juntando a tudo isso a segunda lei de Newton (afirmação universal) concluímos que o sistema massa-mola deve oscilar com período T determinado pela massa suspensa m e pela constante elástica k da mola¹⁶:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Enfim, modelos são os mediadores da relação entre teoria e experimento. Ao incorporar idealizações, eles permitem

Modelos realizam a ligação entre teoria e experimento

perceber como as afirmações teóricas universais (por exemplo, as leis de Newton) se vinculam a cada situação da realidade. Enfim, é somente porque trabalhamos com modelos que podemos utilizar teorias universais para explicar fenômenos específicos.

Um exemplo do uso de modelos no laboratório de mecânica.

Em Física, há diversos tipos de modelos. Neste livro, estamos especialmente interessados em modelos da mecânica que se expressem em uma relação matemática entre grandezas

Foco deste livro: Modelos da mecânica que se expressem em uma relação matemática entre grandezas observáveis em laboratório.

observáveis experimentalmente. Essa relação será fundamental para toda análise dos dados e será chamada modelo matemático. O período de um oscilador massa-mola em função da massa suspensa e da constante elástica da mola é um exemplo de modelo matemático ($T = 2\pi\sqrt{m/k}$). Outro exemplo é a expressão para o alcance de um projétil

¹⁶ A demonstração rigorosa da equação do período a partir da lei de Hooke e da 2ª lei de Newton será omitida neste texto. Porém, encorajamos que você pergunte ao seu professor como realizar essa dedução.

lançado horizontalmente em função da sua velocidade inicial e da altura de lançamento ($A = v\sqrt{2H/g}$).

Todos os modelos matemáticos da física experimental são deduzidos de pressupostos teóricos que podem ser classificados em gerais e específicos. Ou seja, alguns desses pressupostos são leis ou teoremas universais enquanto outros são idealizações ou aproximações adotadas especificamente para este ou aquele experimento. Assim, entre os ingredientes utilizados para obter o modelo matemático, destacamos: (1) afirmações gerais (princípios e/ ou leis universais); (2) afirmações específicas (aproximações e idealizações).

Para ver como esses conceitos funcionam na prática, considere que desejamos determinar o coeficiente de atrito estático entre um bloco de madeira e uma rampa metálica inclinável. Chamaremos ângulo crítico o ângulo θ_c em que o bloquinho (em repouso) está na iminência de deslizar (Figura 16).

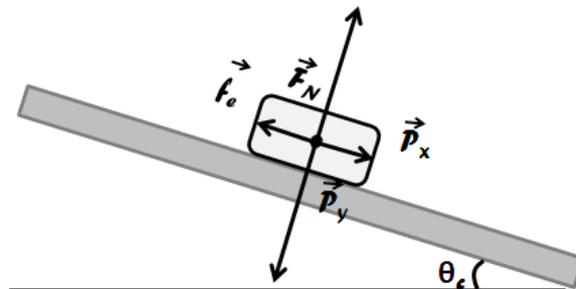


Figura 16. Representação de um bloco em repouso sobre uma rampa de inclinação variável. Quando a rampa atinge o ângulo crítico, a força de atrito estático é máxima e o corpo está na iminência de deslizar.

A partir das leis de Newton (afirmações gerais), levando em consideração que o bloco de madeira encontra-se em repouso sobre a rampa, é necessário que a soma vetorial das forças aplicadas no bloco seja igual a zero. Assim:

$$f_{eMax} = Psen\theta_c$$

$$F_N = Pcos\theta_c$$

Ao resolver problemas envolvendo atrito estático, é usual assumirmos que o valor da força máxima de atrito estático é proporcional ao módulo da força normal por uma constante μ (isto é, independente do módulo da força normal) chamada coeficiente de atrito estático ($f_{eMax} = \mu F_N$). Essa afirmação, oriunda da Tribologia (ciência que estuda o atrito), tem domínio de validade restrito, sendo um enunciado menos geral que as leis de Newton e, por isso, ela pode ser considerada uma afirmação específica. Com ela:

$$\mu F_N = Psen\theta_c$$

$$F_N = Pcos\theta_c$$

Enfim, dividindo uma equação pela outra, resulta o modelo matemático: $\mu = tan\theta_c$. Essa última equação é muito importante porque permite determinar o coeficiente de atrito estático a partir de um ângulo de fácil medição. Enfim, os passos que conduziram ao modelo matemático podem ser representados resumidamente no Quadro 4. Nele, encontram-se as informações mais importantes do modelo no que diz respeito ao experimento didático: (1) o modelo matemático, expressão matemática que orienta todo o processo de análise dos dados; e (2) as afirmações gerais e específicas utilizadas para produzir essa equação.

Por que é importante distinguir os pressupostos utilizados na elaboração do modelo matemático? A razão é simples: pressupostos gerais estão usualmente protegidos por convenções (ninguém na comunidade científica vai, seriamente, desconfiar das leis de Newton a partir de um experimento didático de mecânica!), entretanto, os pressupostos particulares (principalmente as idealizações) podem ser testados e refutados com base experimental.

Quadro 4. Pressupostos empregados na dedução de um modelo matemático para o deslizamento de um bloco sobre um plano de inclinação variável.

<p>Afirmações Gerais Leis, teoremas e princípios universais.</p>	Leis de Newton.
<p>Afirmações Específicas Aproximações, idealizações e pressupostos particulares.</p>	O módulo da força de atrito estático máxima é proporcional ao módulo da força normal, sendo μ a constante de proporcionalidade (denominada coeficiente de atrito estático).
<p>Modelo matemático Relação matemática entre grandezas experimentais deduzida das afirmações gerais e específicas.</p>	$\mu = tg\theta_c$, em que θ_c é o ângulo do plano com a horizontal para o qual o bloco está na iminência de deslizar.

É assim que a modelagem científica vai nos ajudar a tirar conclusões dos experimentos didáticos: ao separar os “ingredientes” do modelo em específicos (refutáveis) e gerais (não-refutáveis) estamos antecipando as conclusões que podemos tirar. Se, os resultados experimentais estiverem em desacordo com o modelo matemático, podemos concluir que alguma das idealizações não é válida para a situação em estudo. Se os resultados experimentais estiverem de acordo com o modelo matemático, as idealizações podem ser consideradas satisfatórias e a situação em estudo está dentro do domínio de validade do modelo construído.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Da comprovação à modelagem científica**”.

1. O que é um modelo científico? Dê exemplo.
2. O que são idealizações? O que é o domínio de validade de um modelo?
3. Demonstre que o alcance A de um projétil lançado horizontalmente (sob certas idealizações) deve ser dado pela expressão $A = v\sqrt{2H/g}$, em que H é a altura de lançamento, v é a velocidade inicial e g é a aceleração da gravidade.
 - a. Analise sua própria demonstração e identifique quais idealizações são necessárias para sustentar que o alcance de um projétil real lançado no laboratório satisfaça o modelo matemático deduzido.
 - b. Complete o Quadro 5 distinguindo os pressupostos gerais e específicos adotados nessa dedução.
 - c. A partir do Quadro 5, discuta os limites do domínio de validade do modelo matemático $A = v\sqrt{2H/g}$. Em que circunstância essa relação entre grandezas experimentais não se verificaria?

Quadro 5. Esquema da dedução do modelo matemático proposto para o alcance de um projétil lançado horizontalmente.

Afirmações Gerais	
Afirmações Específicas	
Modelo matemático	$A = v\sqrt{2H/g}$, em que A é o alcance do projétil, H é a altura de lançamento, v é a velocidade inicial e g é a aceleração da gravidade

UNIDADE III – Análise Gráfica**Introdução à análise gráfica**

Gráficos são instrumentos de análise muito importantes em diversas áreas do conhecimento. Eles são ferramentas fundamentais quando desejamos extrair informação de dados experimentais. Em Física, quando possuímos dados sobre duas variáveis relacionadas — tais como tempo e posição de um corpo em queda livre — um gráfico pode ser elaborado para tornar visível a função que relaciona essas duas variáveis. Assim, é possível dizer que o objetivo de uma análise gráfica é determinar a relação funcional entre duas grandezas experimentais. Para deixar claro o que se deve fazer em análise gráfica, dividimos o procedimento de análise em cinco passos (Quadro 6).

Quadro 6. A análise gráfica em cinco etapas.

Propor uma relação funcional	O primeiro passo é anterior à análise gráfica propriamente dita. Nele, elabora-se, a partir de pressupostos (gerais e específicos), um modelo matemático. Ou seja, obtém-se uma relação quantitativa entre grandezas que podem ser observadas experimentalmente.
Representar os dados em um diagrama de dispersão	Em seguida, marcamos na área do gráfico os pontos que representam os dados colhidos no experimento.
Realizar o ajuste da função proposta	Nessa etapa, ajustamos a função determinada pelo modelo matemático de maneira a fazê-la passar o mais próximo possível dos dados dispostos no gráfico.
Avaliar a qualidade do ajuste	Se a qualidade do ajuste não for boa, será necessário propor outro modelo matemático (revendo os pressupostos teóricos adotados) ou repetir a aquisição dos dados.
Interpretar o resultado	Enfim, deve-se dizer qual é o significado físico da função ajustada.

Cada etapa da análise tem a sua importância e todas devem ser realizadas com muita atenção. Equívocos cometidos nas etapas iniciais tendem a se “propagar” deixando o resultado final visivelmente prejudicado. Enfim, faça uma análise bem feita desde o princípio para não precisar voltar ao início.

Um exemplo: Mergulho em um recipiente de xampu

Considere a seguinte questão: “O que podemos afirmar a respeito do movimento de um corpo que mergulha em um meio viscoso”? Para respondê-la a partir de dados experimentais, propomos utilizar: uma proveta preenchida com xampu, uma pequena esfera de ferro (cujo movimento nós tentaremos descrever), um pequeno ímã (para retirar a esfera do fundo da proveta) e os instrumentos de medida adequados (veja Figura 17).

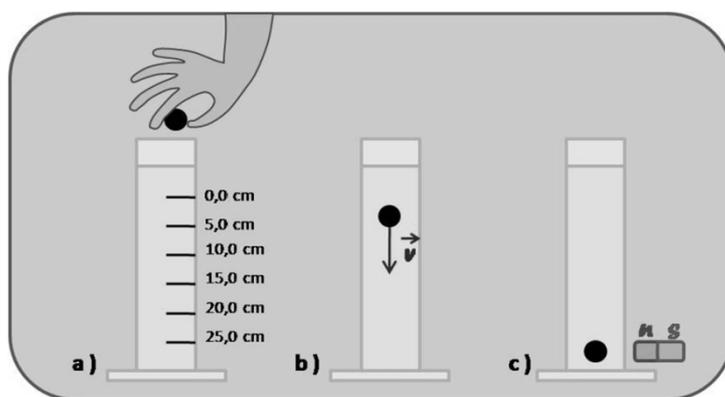


Figura 17. Nesta imagem, são representados três momentos da realização do experimento. Da esquerda para a direita: (a) representa o lançamento da esfera de metal – em destaque, as marcações feitas a cada 5,00 cm com o auxílio de uma régua; (b) após o lançamento, a esfera cai com velocidade v ; (c) ao final do movimento, retiramos a esfera de ferro do fundo da proveta com o auxílio de um ímã.

A descrição do movimento da esfera pode ser realizada se medirmos sua posição ao longo do tempo. Dessa maneira, levamos a bolinha ao topo da coluna de xampu com o auxílio do ímã, e, soltando-a, medimos o tempo que ela leva para realizar deslocamentos de 5,0 a 25,0 cm. Esse procedimento foi repetido cinco vezes para cada deslocamento e os valores obtidos para o tempo de queda foram registrados e encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4. Dados referentes ao movimento da esfera no xampu.

Deslocamento (cm)	Tempo de deslocamento (s)
$5,0 \pm 0,3$	$1,75 \pm 0,04$
$10,0 \pm 0,3$	$3,30 \pm 0,06$
$15,0 \pm 0,3$	$4,97 \pm 0,02$
$20,0 \pm 0,3$	$6,47 \pm 0,02$
$25,0 \pm 0,3$	$7,84 \pm 0,01$

Obtendo uma relação funcional: O modelo matemático

O passo anterior à análise gráfica propriamente dita é a escolha de pressupostos (gerais e específicos) dos quais seja possível deduzir uma equação que relacione grandezas observáveis experimentalmente – no nosso caso, estamos interessados em uma relação entre deslocamento e tempo de queda da esfera.

Nossos pressupostos gerais serão as três leis de Newton. Para o movimento específico que desejamos estudar, podemos pressupor que existem três forças sendo exercidas: (1) duas forças constantes, a força peso e o empuxo de Arquimedes; e uma (2) força de resistência ao movimento. A força peso é constante e está orientada sempre para baixo, depende da massa da esfera e da aceleração local da gravidade; o empuxo de Arquimedes depende do volume imerso do corpo, da densidade do fluido e da aceleração da gravidade local. A força de resistência ao movimento se deve a uma interação da esfera com o meio viscoso (xampu) e é tão mais intensa quanto maior for o módulo da velocidade relativa entre a esfera e esse meio. Como a esfera ganha velocidade a partir do repouso, estamos lidando com um movimento em que a força resultante é variável. Diagramas representando a variação da velocidade e da força resultante ao longo do tempo podem ser visualizados na Figura 18.

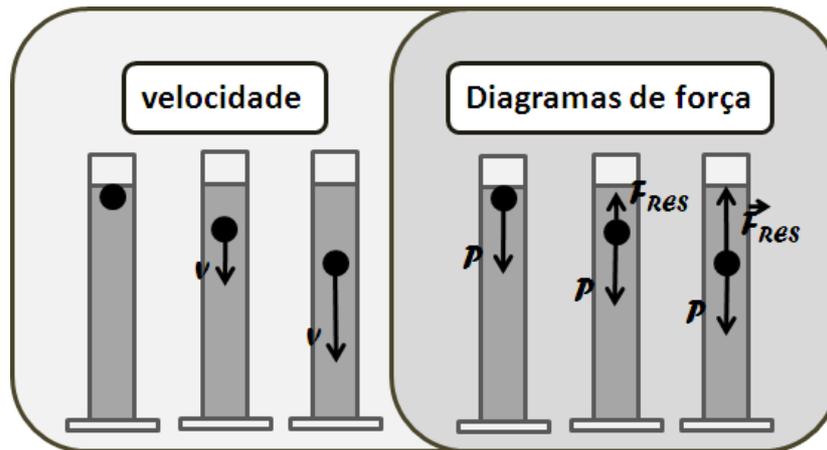


Figura 18. Representa a velocidade da esfera e as forças exercidas nela ao longo do seu movimento. Por simplicidade o que nomeamos como P já é a força resultante da soma da força peso com o empuxo de Arquimedes. Como é possível perceber, estamos pressupondo que, na medida em que a esfera ganha velocidade, a força de resistência ao movimento aumenta até equilibrar a força peso.

Movimentos sujeitos a forças dependentes da velocidade não costumam ser simples de se descrever e explicar. Entretanto, o movimento da esfera em meio viscoso, por mais complexo que seja, possui uma característica: ele tende a uma velocidade terminal. Isso ocorre porque, na medida em que a esfera ganha velocidade, a força de resistência ao movimento se torna progressivamente mais intensa até o momento em que se iguala (em módulo) à força que aponta para baixo. A partir desse instante, a força resultante sobre a esfera é nula e, a partir das leis de Newton, podemos deduzir que a esfera realiza um movimento retilíneo uniforme (MRU).

Assim, se observamos o movimento desde o início, vamos perceber uma variação não-linear da velocidade, entretanto, se observarmos o movimento após ter atingido a velocidade terminal, perceberemos um MRU, para o qual vale a relação:

$$\Delta x = v_{terminal} \Delta t$$

Todo esse procedimento de elaboração de um modelo que explique o movimento da

esfera encontra-se representado no Quadro 7.

Quadro 7. Pressupostos empregados na dedução de um modelo matemático para o movimento de uma esfera em meio viscoso.

Afirmações Gerais Leis, teoremas e princípios universais	Leis de Newton.
Afirmações Específicas Aproximações, idealizações e pressupostos particulares	As únicas forças exercidas na esfera são a força peso, o empuxo de Arquimedes e uma força de resistência ao movimento que se torna mais intensa com o aumento do módulo da velocidade da esfera. O movimento é observado após a velocidade terminal ter sido atingida.
Modelo matemático Relação entre grandezas experimentais deduzida das afirmações gerais e específicas	$\Delta x = v_{terminal}\Delta t$, em que Δx é o deslocamento da esfera, Δt é o intervalo de tempo decorrido desse deslocamento e $v_{terminal}$ é a velocidade terminal atingida.

A partir do modelo matemático descrito acima, percebemos que a relação entre deslocamento e tempo decorrido deve ser linear, ou seja, se os pressupostos adotados estiverem corretos, o gráfico de deslocamento *versus* tempo deve ser aproximadamente uma reta (veja a Figura 19).

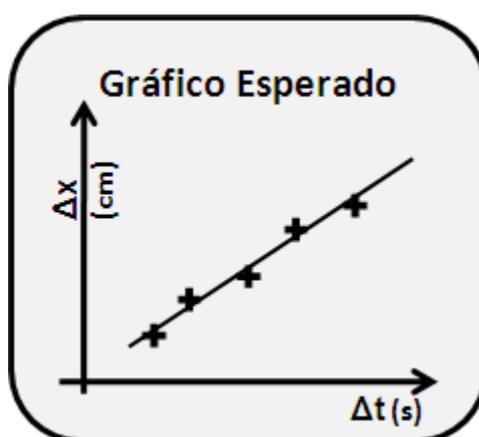


Figura 19. Gráfico esperado como resultado da análise segundo o modelo matemático expresso no Quadro 7. Se os pressupostos adotados no modelo estiverem corretos a relação entre deslocamento e tempo deve ser representável

por uma reta passando pela origem.

Assim, o modelo matemático nos permite antecipar como será o gráfico. Se não obtivermos a reta esperada, há necessariamente algo que precisa ser corrigido, por exemplo, é possível que algum dos pressupostos (específicos) adotados no modelo não seja válido nesse experimento. Outra explicação é que você pode ter se equivocado na coleta de dados ou na própria elaboração do gráfico. Em todo caso, é preciso voltar atrás e rever o que foi feito.

Representando os dados

A partir do modelo matemático, propomos construir um gráfico de deslocamento *versus* tempo. Como primeiro passo da análise, é preciso construir o diagrama de dispersão para os dados experimentais. Com respeito ao diagrama de dispersão, lembre-se de utilizar o espaço disponível da melhor maneira possível. Um gráfico é como uma fotografia do plano cartesiano. Quando vamos tirar uma fotografia de alguém, nós geralmente escolhemos o melhor enquadramento de maneira a ocupar toda a área disponível com aquilo que desejamos mostrar, certo? Da mesma maneira, antes de construir o diagrama de dispersão, é preciso escolher o “enquadramento” de modo a dar o máximo de visibilidade aos pontos (Figura 20).



Figura 20. Para mostrar melhor os detalhes do corpo do pássaro, tiramos a

fotografia de maneira que o pássaro ocupe todo o espaço disponível da imagem.

Para construir este gráfico, temos a nossa disposição algumas folhas de papel milimetrado com aproximadamente 200 x 120 mm. Com o objetivo de aproveitar a área do gráfico da melhor maneira possível, comparamos as dimensões do papel com a extensão dos dados e escolhemos as escalas mais adequadas. Feito isso, os dados experimentais foram finalmente representados em uma folha de papel milimetrado. O resultado pode ser visualizado na Figura 21.

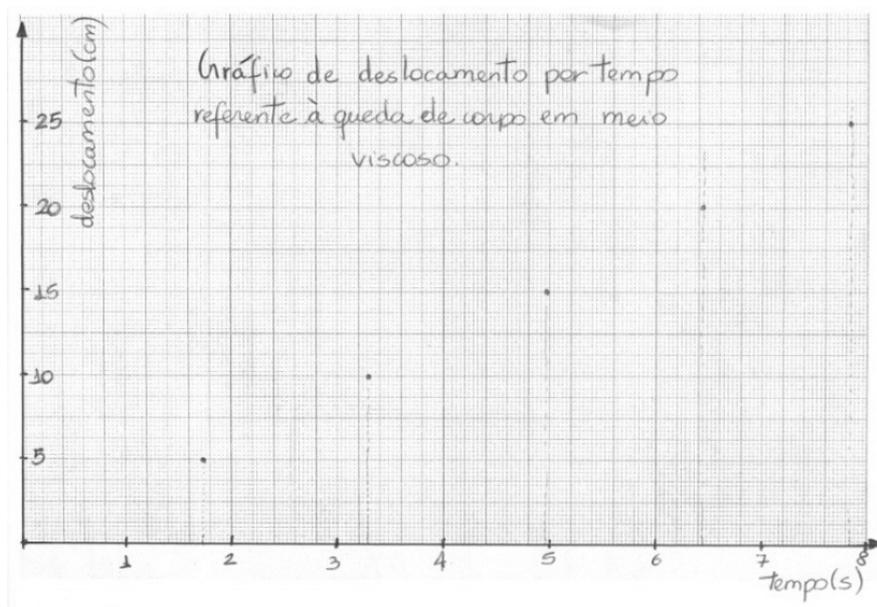


Figura 21. Imagem do diagrama de dispersão “deslocamento por tempo referente à queda de corpo em meio viscoso”.

Antes de finalizar essa primeira etapa, confira se seu gráfico possui: (1) título completo; (2) nomes das grandezas físicas nos eixos – com unidades indicadas entre parênteses; (3) indicação da escala ao longo dos eixos. Nenhuma ligação entre os pontos deve ser construída neste momento!

Ajustando o modelo matemático aos dados experimentais

O que significa ajustar o modelo matemático aos dados? Significa determinar os valores

dos parâmetros da equação do modelo de maneira a fazê-la passar o mais próximo possível dos pontos no gráfico – sem necessariamente tocá-los (usualmente a equação ajustada não passa efetivamente por qualquer um dos pontos experimentais, mas passa próximo a eles).

O modelo matemático com o qual estamos trabalhando é $\Delta x = v_{terminal}\Delta t$. Como é possível perceber, essa equação envolve uma velocidade terminal desconhecida. Assim, ajustar essa equação aos dados significa determinar a velocidade terminal tal que o modelo matemático passe o mais próximo possível dos dados experimentais¹⁷.

Para analisar estes dados, vamos realizar um ajuste “a olho”. Essa técnica é a mais rudimentar de todas, mas é extremamente simples de se compreender e executar. Traçaremos, com o auxílio de uma régua, a reta que, em nossa opinião, passa o mais próximo possível de cada ponto no gráfico sem necessariamente tocar os pontos (neste caso, como é o usual, a reta não coincide com nenhum dos pontos experimentais, mas passa muito perto que qualquer um deles!). O resultado desse ajuste pode ser visualizado na Figura 22.

O passo seguinte da análise é determinar os parâmetros da reta. Assim, a partir do gráfico, calculamos a declividade conforme a Figura 22. A saber, a declividade é igual à velocidade terminal. Em um caso mais geral, se a equação do ajuste for $f(x) = ax + b$, a declividade será igual ao parâmetro “a”. É importante destacar que na determinação dos parâmetros da reta NÃO nos valemos dos pontos experimentais, mas de dois dos pontos que pertencem à melhor reta traçada.

¹⁷ Ao determinar a velocidade terminal a partir do gráfico, estamos determinando o valor de uma grandeza a partir de dados experimentais, portanto, a velocidade obtida por esse procedimento possui uma incerteza que se deve à incerteza na medição dos deslocamentos Δx e dos intervalos de tempo Δt . A saber, existem métodos estatísticos que permitem estimar a incerteza dos parâmetros de uma função como essa. Porém, apesar da questão da incerteza de grandezas experimentais ser fundamental, não discutiremos esses métodos neste livro. Para algum aprofundamento sobre como avaliar a incerteza em uma situação como essa, sugerimos Silva *et al.* (1999).

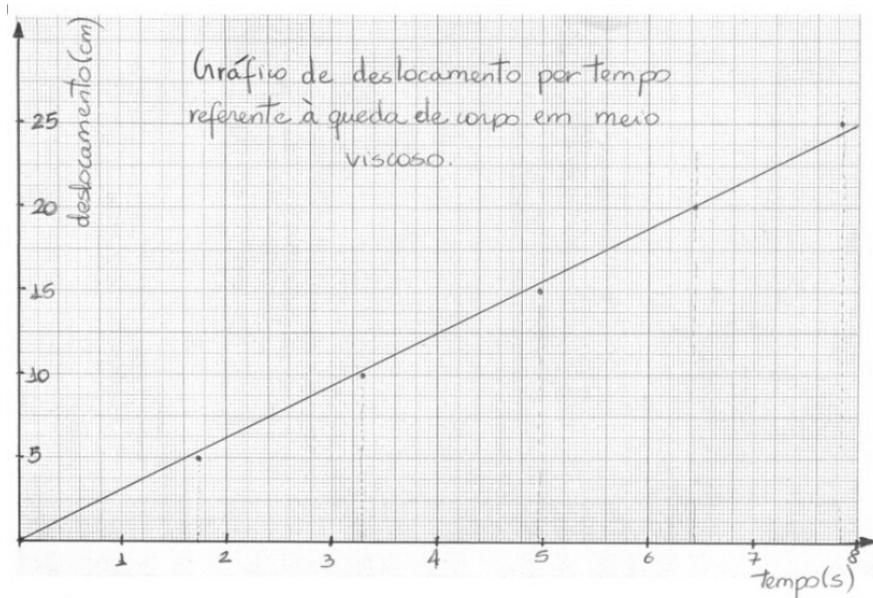


Figura 22. Imagem do gráfico intitulado “deslocamento por tempo referente à queda de corpo em meio viscoso”. Observe que a reta traçada “a olho” passa próximo de todos os pontos sem a obrigação de tocá-los.

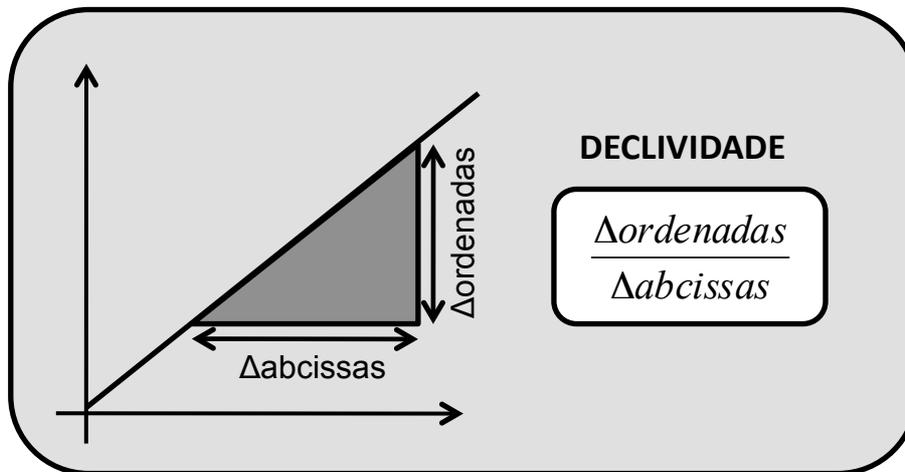


Figura 23. A declividade é igual ao parâmetro “a” que multiplica a variável independente na equação $f(x) = ax + b$.

No caso mais geral do ajuste de uma reta do tipo $f(x) = ax + b$, pode ser necessário determinar o coeficiente b , chamado parâmetro independente. Para determinar seu valor, é preciso observar a altura do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas (Figura 24).

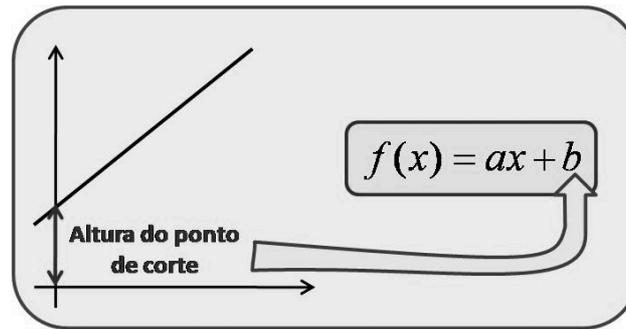


Figura 24. O parâmetro “b”, que corresponde ao termo constante da função $f(x) = ax + b$, pode ser obtido diretamente a partir da altura do ponto de corte da reta sobre o eixo das ordenadas.

Observe também que os parâmetros ajustáveis geralmente possuem unidades físicas que podem ser extraídas de uma análise dimensional do modelo matemático e devem ser corretamente registradas. No nosso exemplo (Figura 22), o par de pontos mais afastados que pertencem à reta traçada no gráfico são tais que $\Delta ordenadas = 25,0 \text{ cm}$ e $\Delta abcissas = 8,0 \text{ s}$. Portanto, a declividade da reta traçada (ou seja, a velocidade terminal atingida pela esfera) que melhor se ajusta aos dados experimentais é aproximadamente igual a $3,1 \text{ cm/s}$.

Como é possível perceber, a determinação do parâmetro que melhor ajusta o modelo matemático aos dados experimentais é equivalente a realizar uma medição indireta da grandeza representada nesse parâmetro (no caso, a velocidade terminal). Como se tem destacado ao longo desse curso, é muito importante que, ao declarar o resultado de qualquer medição, seja declarada, também, a incerteza associada a esse resultado. Assim, seria necessário informar a incerteza da nossa melhor estimativa da velocidade terminal. Porém, para dar mais clareza aos procedimentos de análise gráfica, optou-se por não discutir neste texto como estimar a incerteza de um parâmetro obtido do ajuste de uma função a dados experimentais.

Avaliando a qualidade do ajuste

Em outro momento, discutiremos maneiras mais sofisticadas de avaliar a qualidade do ajuste de uma função. Por enquanto, podemos ter uma ideia dessa qualidade observando que os pontos experimentais não estão muito distantes da reta traçada. No nosso caso, consideramos que os pontos estão próximos o suficiente para que o ajuste seja considerado satisfatório.

Interpretando os resultados

Ao finalizar a análise, é preciso declarar o significado físico dos parâmetros estimados e da relação funcional adotada no ajuste. Neste caso, a análise gráfica permite-nos concluir que:

1. A velocidade do corpo pode ser considerada constante ao longo do movimento, ou seja, a pequena esfera metálica mergulha no xampu realizando um movimento retilíneo uniforme no trecho observado conforme previsto pelo modelo.
2. A velocidade terminal atingida pela esfera metálica é aproximadamente igual a $3,1 \text{ cm/s}$.

Enfim, existem dois tipos de conclusão que se pode tirar dessa análise. A primeira diz respeito ao sucesso do modelo em explicar o movimento da esfera no recipiente com xampu. A segunda é uma medição indireta, ou seja, obtivemos uma medida de velocidade a partir de medidas de deslocamento e tempo.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Introdução à análise gráfica**”.

1. Quais são as cinco etapas da análise gráfica segundo o texto? O que deve ser feito em cada uma dessas etapas?
2. Qual é o significado de se ajustar uma função aos dados experimentais?
3. Qual é o significado da declividade de uma reta que relacione duas grandezas físicas? Como essa declividade deve ser obtida a partir do gráfico?
4. Quais são os dois principais tipos de conclusão que se pode tirar de uma análise gráfica?
5. Considere um caso de atropelamento seguido de morte em que o motorista se encontra detido para julgamento. Segundo o inquérito policial, o motorista tinha razões para matar a vítima. A defesa, contudo, argumenta que o motorista não tinha sequer visto a vítima e que a alta velocidade do impacto se justificaria por ele estar dormindo ao volante. Para avaliar essa questão, um perito em acidentes de trânsito realizou uma análise das gravações em câmeras de segurança em que foi possível identificar a posição em função do tempo do veículo antes da batida (veja Tabela 5). A saber, no início da gravação ($t = 0$ s) o veículo passa pela origem do sistema de coordenadas adotado pelo perito ($x = 0$ m). Sabe-se também que, pelas condições de visibilidade da região onde o ocorreu o acidente, era esperado que o motorista reagisse à presença da vítima entre os instantes $t = 0,60$ s e $t = 0,80$ s.

Tabela 5. Dados referentes ao movimento de queda de um corpo.

Tempo (cs)	20 ± 1	40 ± 1	60 ± 1	80 ± 1	100 ± 1	120 ± 1
Posição (m)	$4,7 \pm 0,1$	$9,1 \pm 0,1$	$13,8 \pm 0,1$	$18,4 \pm 0,1$	$23,4 \pm 0,1$	$28,9 \pm 0,1$

- a. A partir dos dados apresentados na Tabela 5, elabore um gráfico de posição por tempo. Lembre-se de colocar título nos gráficos, nomes e unidades nos eixos!
- b. O que se pode afirmar sobre o movimento do carro? A reação do motorista foi de acelerar, frear ou manter a velocidade?
- c. Qual era a velocidade do veículo entre $t = 0$ s e $t = 0,60$ s?

Linearizando relações não-lineares

Relações não-lineares

No texto de introdução à análise gráfica, foi discutido um experimento em que a relação entre as grandezas físicas envolvidas era linear, ou seja, poderia ser reduzida a uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$. Porém, nem todas as relações entre grandezas físicas são estritamente lineares (Figura 25). Várias grandezas se relacionam umas com as outras por expressões que envolvem leis de potência, logaritmos, exponenciais, polinômios...

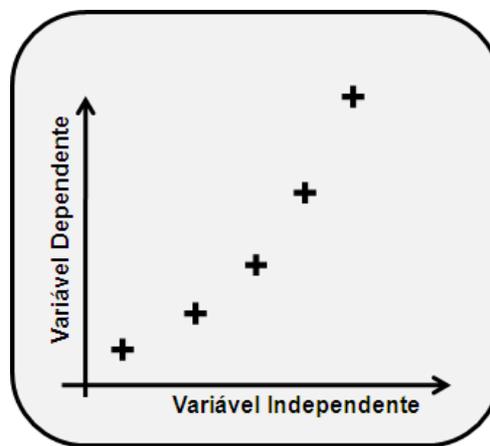


Figura 25. Exemplo de relação visivelmente não-linear.

Quando estamos lidando com grandezas que mantêm relação linear, temos uma série de vantagens práticas. Uma delas: é muito simples avaliar visualmente a qualidade do ajuste de uma função linear, pois uma reta é sempre fácil de identificar (veja a Figura 26). Uma parábola, por outro lado, por ser facilmente confundida com uma curva do tipo $f(x) = ax^4$; em alguns trechos, um logaritmo pode ser confundido com uma expressão do tipo $f(x) = a\sqrt{x}$. Outra vantagem ainda mais importante é que traçar uma reta e inferir os valores dos seus parâmetros a partir de um gráfico em papel milimetrado é muito mais fácil que traçar uma não-reta e inferir parâmetros a partir dela. Assim, ao menos em princípio, tratar grandezas físicas que mantêm relações não-

lineares dificultaria a realização da análise gráfica.

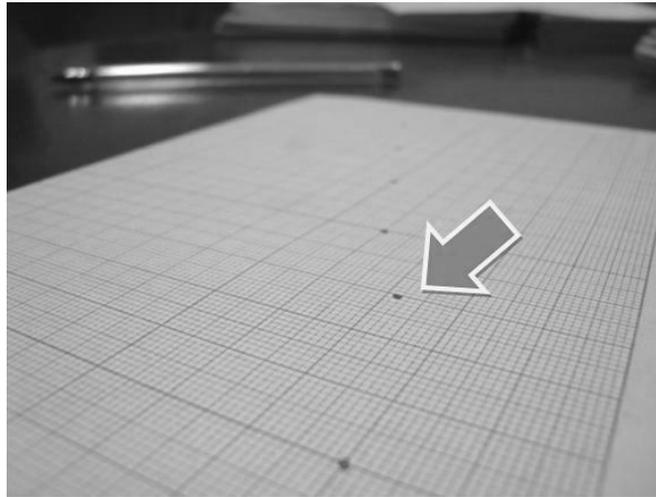


Figura 26. É fácil avaliar se a relação entre duas grandezas pode ser descrita por uma função linear inclinando o papel e observando se os pontos se alinham. Nesta foto, é possível perceber que todos os pontos estão quase que perfeitamente alinhados, exceto o segundo de baixo para cima (indicado por uma seta). Esse desvio (praticamente imperceptível para quem olha o gráfico frontalmente) precisa ser interpretado. Ele pode ter ocorrido por flutuação estatística, mas também pode representar algum efeito real ou até por falta de perícia de quem tomou os dados.

Procedimentos de linearização

Embora muitas grandezas físicas mantenham relações não-lineares, é possível linearizá-las usando escalas não-lineares. O que isso significa? Isso quer dizer que, em alguns casos, é possível obter um gráfico linear (reta) mesmo quando a relação entre as grandezas físicas envolvidas for não-linear.

Para compreender essa situação um pouco melhor, imagine que suspendemos uma massa m em uma mola de constante elástica k . Considere, também, a expressão para o período de oscilação em um sistema massa-mola ideal:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Como a massa suspensa em uma mola é relativamente fácil de controlar em laboratório, vamos considerar que a massa m é variável independente e que o período T é variável dependente: $T = T(m)$. A relação para o período em função da massa não é linear porque a variável independente m aparece sob uma raiz quadrada.

Na Tabela 6, são apresentados dados referentes a um oscilador real que se aproxima significativamente do sistema massa-mola ideal. A rigor, as incertezas de cada medida apresentada na tabela deveriam ser informadas. Estamos optando por omitir essas incertezas para dar mais clareza aos procedimentos de linearização.

Tabela 6. Dados referentes ao período do sistema massa-mola em função da massa.

Massa (g)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0
Período (s)	0,363	0,513	0,628	0,726	0,811	0,888	0,959	1,026

Os dados apresentados na Tabela 6 foram representados em um diagrama de dispersão (Gráfico 6). Como é possível perceber, e o gráfico obtido expressa uma relação que não é descrita adequadamente por uma relação linear (os pontos não estão alinhados). Para contornar essa não-linearidade, propomos definir uma nova variável $\xi \equiv \sqrt{m}$. Nesse caso, tem-se que:

$$T(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \xi$$

Essa nova equação é linear, ou seja, o gráfico do período T contra a raiz quadrada da massa ($\xi \equiv \sqrt{m}$) deve ser uma reta que passa pela origem e possui declividade igual a $2\pi/\sqrt{k}$. Com efeito, ao fazermos um gráfico do período contra a raiz quadrada da

massa suspensa (Gráfico 7) os pontos ficam todos alinhados, formando uma reta.

Gráfico 6. Período pela massa suspensa em um sistema massa-mola (escala linear).

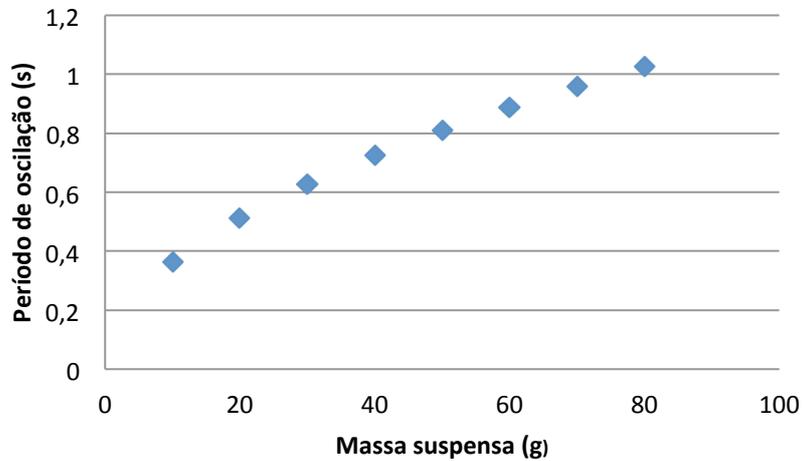
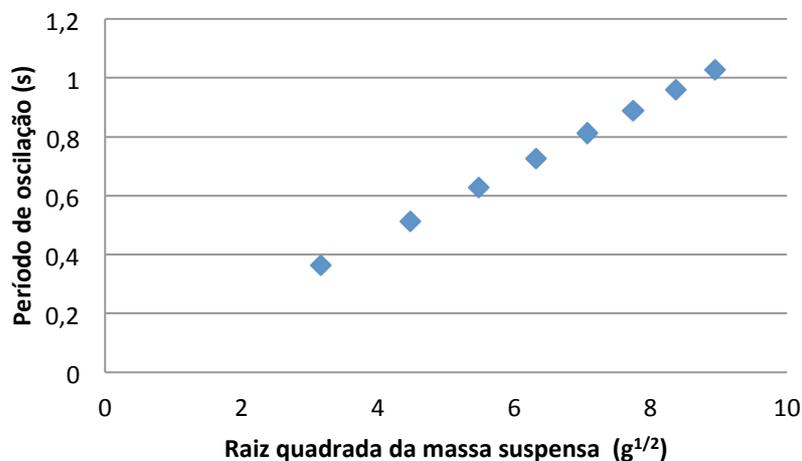


Gráfico 7. Período do oscilador pela raiz quadrada da massa suspensa (escala não-linear).



Procedimentos desse tipo, que nos permitem representar relações não-lineares com uma reta, são chamados procedimentos de linearização. Há geralmente mais de uma maneira de linearizar uma relação não-linear. A propósito, no exemplo em questão, o gráfico do período ao quadrado pela massa também deve resultar em uma reta.

Linearização e escala logarítmica

Os procedimentos de linearização preferidos nos laboratórios didáticos de Física envolvem logaritmos. Métodos desse tipo são muito usuais e se aplicam a uma variedade de situações. Considere, por exemplo, que estamos lidando com modelo matemático do tipo $y(x) = ax^n$ (tal modelo matemático é usualmente denominado “lei de potência”). Salvo no caso trivial em que $n = 1$, essa equação descreve uma relação não-linear. Se tomarmos o logaritmo dos dois lados da equação, obteremos $\log y = \log a + n \log x$. Para tornar ainda mais claros os nossos objetivos com esse procedimento, vamos definir $Y \equiv \log y$ e $X \equiv \log x$. Assim, podemos escrever:

$$Y(X) = \log a + nX$$

Como é possível perceber, embora $y(x)$ seja não-linear, a função $Y(X)$ é linear! Em termos mais práticos, essa manipulação quer dizer que, se a relação entre duas grandezas for do tipo $y(x) = ax^n$, o gráfico de $\log y$ versus $\log x$ deve ser uma reta com declividade igual a n e ponto de corte no eixo das ordenadas igual a $\log a$.

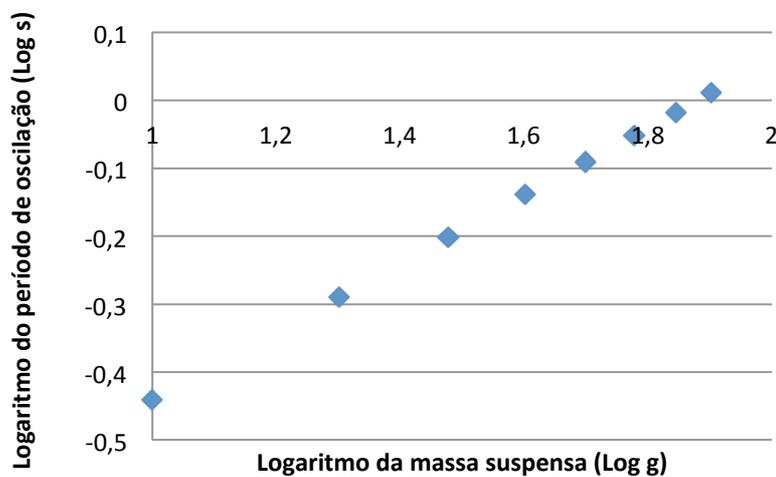
Retomemos o caso do oscilador massa-mola (Tabela 6). Dado que a função $T(m) = 2\pi\sqrt{m/k}$ pode ser escrita sob a forma $y(x) = ax^n$, o gráfico de $\log T$ versus $\log m$ deve ser uma reta com declividade $\frac{1}{2}$ e ponto de corte igual a $\log(2\pi/\sqrt{k})$. O gráfico de $\log T$ versus $\log m$ encontra-se no Gráfico 8. A partir dele, é possível perceber que a declividade da reta apresentada é aproximadamente igual a $\frac{1}{2}$ conforme esperado.

Agora, vamos considerar outro exemplo. Imagine que estamos lidando com um modelo matemático que possui a seguinte forma geral: $w(t) = ae^{bt}$. Se tomarmos o logaritmo dos dois lados da equação, teremos $\log w = \log a + bt$. Definindo $W \equiv \log w$, podemos escrever:

$$W(t) = \log a + bt$$

Assim, como é possível perceber, se as grandezas w e t mantêm uma relação exponencial do tipo $w(t) = ae^{bt}$, então o gráfico de $\log w$ contra t deve ser uma reta com declividade b e ponto de corte (no eixo das ordenadas) igual a $\log a$. Enfim, esses métodos de aplicar logaritmo ao modelo matemático são bastante gerais e podem ser aplicados em uma diversidade de situações para linearizar “leis de potência” e relações exponenciais.

Gráfico 8. Logaritmo do período do oscilador pelo logaritmo da massa suspensa.



Como descobrimos a relação entre as variáveis?

É importante destacar que, para realizar qualquer procedimento de linearização, é preciso ter alguma ideia anterior de qual é a relação entre as grandezas envolvidas.

Procedimentos de linearização não permitem descobrir a relação entre variáveis a partir dos dados, mas testar uma relação que, por intuição ou razão teórica, é possível pressupor.

A rigor, procedimentos de linearização não permitem descobrir a relação entre variáveis a partir dos dados.

No exemplo explorado ao longo deste texto, partimos do pressuposto de que a relação entre período e massa do oscilador construído em laboratório era do tipo $T(m) = a\sqrt{m}$. Essa informação não foi fornecida pelos dados, mas foi retirada do modelo que

propusemos para o oscilador e que implica a expressão $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

O que o procedimento de linearização nos permite fazer é testar a relação pressuposta com base em dados experimentais. Ou seja, se a relação entre período e massa do oscilador for muito diferente de $T(m) = a\sqrt{m}$, então os pontos no gráfico não ficarão alinhados após o procedimento de linearização. Se, após a transformação via logaritmo, os pontos que formam o gráfico não estiverem razoavelmente alinhados, há algo errado. Há algo que precisa ser corrigido.

Não é possível comprovar uma relação entre variáveis experimentais a partir de uma análise gráfica. Sozinhos, os dados não falam. Eles não informam, por exemplo, se a relação entre as grandezas em questão é exponencial, logarítmica, polinomial... Essa relação, usualmente, nós a temos em mente antes mesmo de realizar o experimento. A relação entre grandezas experimentais até pode ser intuída pela observação dos dados, mas nunca chega a ser imposta exclusivamente por eles. A rigor, o que fazemos com relação aos dados é um teste. Nosso conhecimento de Física, particularmente nossa habilidade em elaborar modelos da mecânica, nos permitiu propor o modelo em que $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Esse modelo foi testado por meio de uma análise gráfica e sobreviveu ao teste. Ou seja, o modelo pode ser considerado válido por descrever razoavelmente bem os resultados experimentais.

Avalie sua compreensão!

Responda às questões a seguir sobre o texto de apoio “**Linearizando relações não-lineares**”.

1. O que é uma relação linear? E uma relação não-linear?
2. Por que é importante reduzir relações não-lineares a relações lineares em uma análise gráfica?
3. Descreva brevemente o processo de linearização de uma função do tipo $f(x) = ax^2$.
4. Descreva brevemente o processo de linearização de uma função do tipo $f(x) = a\sqrt{x}$.
5. É possível descobrir a relações entre duas grandezas físicas exclusivamente a partir dos dados experimentais? Justifique sua resposta.
6. Geralmente, quando desejamos analisar movimentos de queda vertical, elaboramos gráficos de posição x por tempo ao quadrado t^2 . Isso é feito porque, se $\Delta x = at^2/2$ é válida, então o gráfico obtido deverá ser uma reta que passa pela origem e possui declividade igual à metade da aceleração. Os dados apresentado na Tabela 7 se referem ao movimento de um corpo em queda vertical que não parte do repouso. Ou seja, $\Delta x \neq at^2/2$. As incertezas foram omitidas.

Tabela 7. Dados referentes ao movimento de queda vertical de um corpo com velocidade inicial diferente de zero.

Tempo (s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Posição (cm)	39,8	89,4	148,6	217,6	296,2	384,6

- a. Construa um gráfico de posição por tempo ao quadrado.
 - b. Como é possível perceber, o gráfico de posição por tempo ao quadrado não é uma reta, mas uma curva semelhante a $f(x) = \sqrt{x}$. Explique esse resultado. Por que a transformação proposta no item anterior não linearizou os dados?
7. Considere os planetas do sistema solar. Com boa aproximação, os períodos orbitais T e suas distâncias médias D ao Sol se relacionam pela 3ª lei de Kepler: $T^2/D^3 = k$. A partir da lei da gravitação universal e das três leis de Newton, assumindo algumas idealizações, é possível demonstrar que a constante k na lei de Kepler depende somente da massa do Sol (M) e da constante da gravitação universal (G): $k = 4\pi^2/GM$. Com isso, a 3ª lei de Kepler pode ser escrita da seguinte forma:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} D^3$$

Como é possível perceber, a relação entre período e distância média prevista na 3ª lei de Kepler é não-linear. Porém, um gráfico do período ao quadrado pela distância média ao cubo deve se assemelhar a uma reta que passa pela origem com declividade $k = 4\pi^2/GM$. Assim, sabendo o valor da constante da gravitação universal (que pode ser determinada em laboratório), é possível inferir a massa do Sol a partir do movimento dos planetas!

Na Tabela 8 são listados os períodos orbitais de três planetas do sistema solar e suas respectivas distâncias médias ao Sol em unidades do Sistema Internacional. As incertezas foram omitidas.

Tabela 8. Períodos de translação dos planetas no sistema solar e suas respectivas distâncias médias ao Sol.

Planeta	Período (10^7 s)	Distância média ao Sol (10^{11} m)
Mercúrio	0,760	0,579
Vênus	1,941	1,082
Terra	3,156	1,496

- A partir dos dados apresentados na Tabela 8, elabore um gráfico do período orbital ao quadrado pela distância média ao cubo. Trace a reta que passa pela origem e mais bem se ajusta aos dados. Em seguida, determine a constante k da lei de Kepler a partir do gráfico.
- Tendo obtido a constante k da lei de Kepler, considerando $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, estime a massa do Sol (A saber, a massa do Sol é aproximadamente igual a $1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$).

APÊNDICE A

Método numérico para propagação da incerteza

Neste apêndice, apresentamos um procedimento numérico alternativo que é tão válido quanto a expressão analítica da lei de propagação de incerteza (LIMA JUNIOR e SILVEIRA, 2011a). Como essa alternativa pode ser discutida e compreendida sem o ferramental matemático necessário à da lei de propagação, vemos nele uma enorme vantagem para cursos de Física introdutória.

O modelo matemático linear

Como primeiro passo para compreender esse procedimento alternativo, considere um modelo matemático linear, ou seja, considere que duas grandezas físicas mantêm uma relação do tipo $y = ax$. Nessa relação, x é a grandeza de entrada, y é a grandeza de saída e a é uma constante conhecida exatamente (que não contribui para a incerteza de y). Assim, toda a incerteza de y se deve à incerteza de x .

Por exemplo, considere que x representa o diâmetro de uma circunferência e y o seu comprimento. Nesse caso, podemos escrever $y = ax$, com $a = \pi$. Considere também que o diâmetro da circunferência em questão foi determinado com régua, resultando $(21,34 \pm 0,05)$ cm.

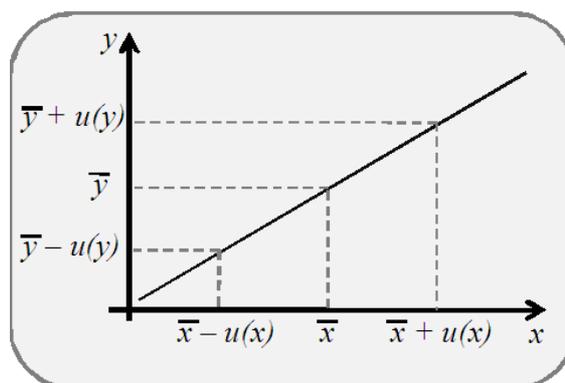


Figura A.1. Observe que, se a relação entre y e x é linear, a determinação da incerteza que se propaga de x para y se reduz a um problema geométrico

elementar.

Como você já sabe, o gráfico de uma relação linear é sempre uma reta. Observando o gráfico representado na Figura A.1, percebe-se que ao intervalo determinado pela incerteza $u(x)$ em torno da melhor estimativa \bar{x} corresponde um intervalo no eixo y . Esse intervalo determina a incerteza $u(y)$ que se propaga de x para y .

Como é possível perceber, a determinação da incerteza $u(y)$ é relativamente simples e pode ser feita segundo demonstrado nas Figuras de A.2 a A.4.

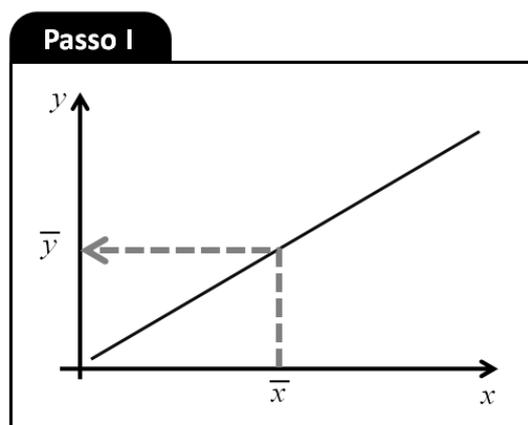


Figura A.2. O primeiro passo é obter \bar{y} substituindo o valor \bar{x} no modelo matemático. É importante manter uma quantidade grande de algarismos no resultado dessa operação. No exemplo em questão, fazemos $\bar{y} = \pi \cdot 21,34 \cong 67,0416 \text{ cm}$.

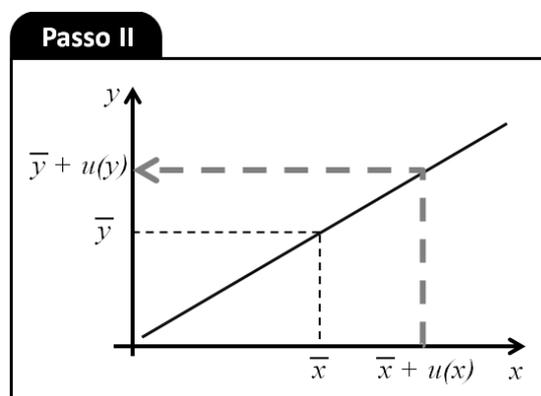


Figura A.3. O segundo passo é obter $\bar{y} + u(y)$ a partir de $\bar{x} + u(x)$, ou seja, somamos o resultado da medição da grandeza de entrada \bar{x} à sua incerteza $u(x)$ e

substituímos o valor obtido no modelo matemático. No exemplo em questão, fazemos $\bar{y} + u(y) = \pi \cdot (21,34 + 0,05) = \pi \cdot 21,39 \cong 67,1987 \text{ cm}$.

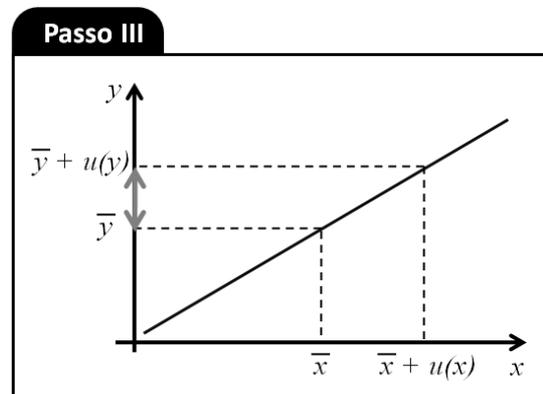


Figura A.4. O terceiro passo é calcular a diferença entre $\bar{y} + u(y)$ (obtido no passo 2) e \bar{y} (obtido no passo 1). Com isso, no nosso exemplo, obtém-se $u(y) \cong 0,1571 \text{ cm}$. Importante! A incerteza deve ser sempre um valor positivo. Por isso, se ao final desse processo você obtiver um resultado negativo, considere que a incerteza propagada é o módulo desse resultado.

Embora existam critérios mais sofisticados para determinar com quantos algarismos deve ser registrada a incerteza da medição, sugerimos adotar que as incertezas sejam representadas somente com um algarismo não-nulo. Ou seja, arredondamos $u(y) \cong 0,1571 \text{ cm}$

Recomendamos que as incertezas sejam representadas com um algarismo não-nulo somente.

para $u(y) \cong 0,2 \text{ cm}$. Com isso, o resultado da medição $\bar{y} \cong 67,0416 \text{ cm}$ deverá ser escrito com apenas um algarismo após a vírgula¹⁸. Ou seja, $\bar{y} \cong 67,0 \text{ cm}$. Enfim, $(67,0 \pm 0,02) \text{ cm}$ é a expressão compacta do resultado e da incerteza da medição do comprimento da circunferência cujo diâmetro é $(21,34 \pm 0,05) \text{ cm}$.

A reta tangente

Considere que a função $y = f(x)$ representa uma relação matemática não-linear qualquer entre duas grandezas experimentais e que o gráfico dessa função é uma curva

¹⁸ A necessidade de representar a incerteza e o resultado da medição com a mesma quantidade de algarismos após a vírgula foi discutida em texto anterior sobre incerteza e algarismos significativos.

suave. Essa relação pode ser um polinômio ($y = ax^2 + bx + c$), uma função exponencial ($y = ae^{bx}$), uma função logarítmica ($y = a \log bx$) ou qualquer outra função suave que represente grandezas experimentais.

A melhor estimativa da grandeza de entrada, representada por \bar{x} , determina um ponto da curva com respeito ao qual é possível traçar uma reta tangente a essa curva conforme a Figura A.5.

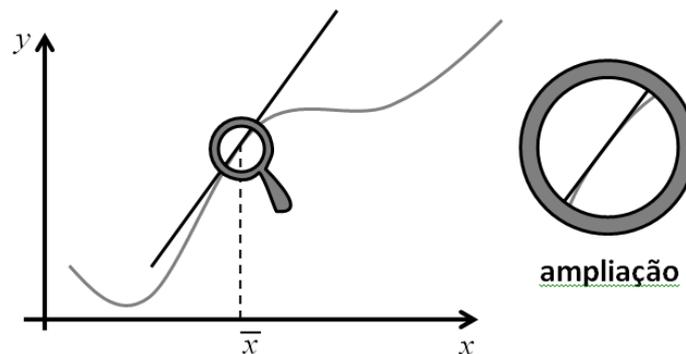


Figura A.5. Observe que, na vizinhança do ponto com respeito ao qual foi traçada a reta tangente, essa reta se aproxima relativamente bem da própria curva.

Como é possível perceber, a reta que é tangente à curva no ponto de coordenada \bar{x} está bastante próxima de todos os outros pontos da curva na vizinhança de \bar{x} . Assim, dizemos que a reta tangente à curva é uma boa aproximação à curva nessa região. Entretanto, quando nos afastamos muito de \bar{x} , percebemos que a reta tangente e a curva se afastam. Fora da vizinhança de \bar{x} , a reta tangente não é uma boa aproximação à curva.

Portanto, desde que estejamos trabalhando na vizinhança de \bar{x} , podemos substituir a curva determinada pela função $y = f(x)$ por uma reta tangente à curva nesse ponto. Ou seja, na vizinhança de \bar{x} , por mais exótica que seja a função suave $f(x)$, podemos aproximá-la por uma reta!

Por mais exótica que seja a função $f(x)$ na vizinhança de \bar{x} , podemos aproximar essa função por uma reta!

Propagação de incerteza no caso não-linear

Desde que estejamos trabalhando na vizinhança de \bar{x} , ou seja, desde que $u(x)$ seja

bastante pequeno, temos garantido que o modelo matemático (por mais exótico que seja) pode ser considerado aproximadamente linear. Ou seja, vale o procedimento para obtenção de $u(y)$ a partir de $u(x)$ que descrevemos há pouco.

A título de ilustração, considere que desejamos determinar a área A da face circular de uma peça metálica a partir do seu diâmetro d , que, medido com um paquímetro, resultou $(17,468 \pm 0,005) \text{ cm}$. Nesse caso, podemos escrever:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

Evidentemente, estamos lidando agora com uma relação não-linear. Porém, na vizinhança do ponto $\bar{d} = 17,468 \text{ cm}$ podemos considerá-la linear. Com isso, procedemos assim:

1. O primeiro passo é obter \bar{A} substituindo o valor \bar{d} no modelo matemático. É importante manter uma quantidade grande de algarismos no resultado dessa operação. No exemplo em questão, fazemos $\bar{A} = \pi/4 \cdot 17,468^2 \cong 239,64935 \text{ cm}^2$.
2. O segundo passo é obter $\bar{A} + u(A)$ a partir de $\bar{d} + u(d)$, ou seja, somamos o resultado da medição da grandeza de entrada \bar{d} à sua incerteza $u(d)$ e substituímos o valor obtido no modelo matemático. No exemplo em questão, fazemos $\bar{A} + u(A) = \pi/4 \cdot 17,473^2 \cong 239,78656 \text{ cm}^2$.
3. O terceiro passo é calcular o módulo da diferença entre $\bar{A} + u(A)$ (obtido no passo 2) e \bar{A} (obtido no passo 1). Com isso, no nosso exemplo, obtém-se $u(A) \cong 0,13721 \text{ cm}^2$.

Representando a incerteza com somente um algarismo não-nulo e arredondando o resultado da medição para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que a incerteza, obtemos $(239,6 \pm 0,1) \text{ cm}^2$.

Propagação no caso de mais de uma variável

Para estimar a incerteza da medição de uma grandeza que depende de muitas variáveis de entrada, é preciso levar em consideração um fato que não podemos demonstrar agora: diferentes parcelas da incerteza da medição de uma mesma grandeza se somam aos quadrados, e o resultado dessa soma é o quadrado da incerteza propagada¹⁹.

Assim, quando nos depararmos com uma situação em que há mais de uma grandeza de entrada e somente uma grandeza de saída, o quadrado da incerteza da grandeza de saída é determinado pela soma dos quadros das contribuições das incertezas de cada variável.

Por exemplo, considere que estamos diante de um pêndulo com $(1,000 \pm 0,005)m$ de comprimento e $(2,00 \pm 0,01)s$ de período²⁰. Acrescentando essas informações ao modelo matemático do pêndulo simples ($g = 4\pi^2 l/T^2$), as contribuições de $u(l)$ e $u(T)$ para a incerteza $u(g)$ devem ser calculadas da seguinte maneira:

- Seja $u_T(g)$ a contribuição do período T para a incerteza $u(g)$. Para obter essa contribuição, fixamos as outras variáveis e fazemos variar somente o período.
 1. Calculamos a melhor estimativa da variável de saída substituindo as melhores estimativas das variáveis de entrada no modelo matemático. Ou seja, $\bar{g} = 4\pi^2 \bar{l}/\bar{T}^2 = 9,86960 \text{ m/s}^2$.
 2. Repetimos o mesmo cálculo acrescentando a incerteza $u(T)$ ao valor \bar{T} e mantendo todo o resto inalterado. Ou seja, $\bar{g} + u_T(g) = 4\pi^2 \bar{l}/[\bar{T} + u(T)]^2 = 9,77164 \text{ m/s}^2$.
 3. O terceiro passo é calcular a diferença em módulo entre $\bar{g} + u_T(g)$ (obtido no passo 2) e \bar{g} (obtido no passo 1). Com isso, no nosso exemplo, obtém-se $u_T(g) = 0,09796 \text{ m/s}^2$.

¹⁹ A compreensão mais rigorosa dessa questão exigiria a demonstração, também rigorosa, da lei geral de propagação da incerteza, que foge ao escopo deste apêndice.

²⁰ Esses valores são fictícios.

- Seja $u_l(g)$ a contribuição do comprimento l para a incerteza $u(g)$. Para obter essa contribuição, fixamos as outras variáveis e fazemos variar somente o comprimento.
 1. Já foi calculada a melhor estimativa da variável de saída: $\bar{g} = 9,86960 \text{ m/s}^2$.
 2. Repetimos o mesmo cálculo acrescentando a incerteza $u(l)$ ao valor \bar{l} e mantendo todo o resto inalterado. Ou seja, $\bar{g} + u_l(g) = 4\pi^2[\bar{l} + u(l)]/\bar{T}^2 = 9,91895 \text{ m/s}^2$.
 3. O terceiro passo é calcular a diferença em módulo entre $\bar{g} + u_l(g)$ (obtido no passo 2) e \bar{g} (obtido no passo 1). Com isso, no nosso exemplo, obtém-se $u_T(g) = 0,04935 \text{ m/s}^2$.
- Ao final, as contribuições da incerteza de cada grandeza de entrada para a incerteza na medição da grandeza de saída é calculada por uma soma de quadrados semelhante ao que se faz para obter o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo a partir do teorema de Pitágoras. Ou seja, $u^2(g) = u_T^2(g) + u_l^2(g)$. Com isso: $u(g) = 0,10969 \text{ m/s}^2$.

Enfim, fazendo os devidos arredondamentos, resulta desse procedimento que a aceleração da gravidade é aproximadamente dada por $\bar{g} = 9,9 \text{ m/s}^2$ com incerteza $u(g) = 0,1 \text{ m/s}^2$. Igualmente, comparando as quantidades $u_T(g) = 0,09796 \text{ m/s}^2$ e $u_l(g) = 0,04935 \text{ m/s}^2$, podemos avaliar que o período T é a grandeza de entrada que mais contribui para a incerteza da aceleração local da gravidade. Com isso, você deve ter aprendido a propagar incertezas e interpretar essa propagação.

APÊNDICE B**Expressão analítica para a lei de propagação**

É geralmente a partir do segundo ou terceiro semestre que os alunos dos cursos de graduação em ciências, engenharia e matemática dominam cálculo diferencial o suficiente para estimar a incerteza propagada a partir da expressão analítica conhecida como “lei de propagação da incerteza” (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a). Contudo, para os alunos que ainda não dominam derivadas, a expressão analítica da lei de propagação da incerteza fica sem sentido. Por isso, evita-se ensinar e cobrar em laboratórios de mecânica experimental esse tipo de procedimento.

Para compreender do que trata essa lei de propagação, considere primeiro o seguinte modelo matemático genérico que relacione uma grandeza de saída y às n grandezas de entrada x_1, x_2, \dots, x_n :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Seja \bar{x}_i a melhor estimativa da i -ésima grandeza de entrada e $u(x_i)$ sua incerteza de medição. Assumindo que a correlação entre as n grandezas de entrada pode ser desprezada e que o modelo matemático $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja aproximadamente linear na região de interesse, é possível estimar a incerteza $u(y)$ da grandeza de saída pela seguinte lei de propagação:

$$u^2(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 u^2(x_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^2 u^2(x_2) + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^2 u^2(x_n)$$

O exemplo do pêndulo simples

Considere que estamos diante de um pêndulo com $(1,000 \pm 0,005)m$ de comprimento e $(2,00 \pm 0,01)s$ de período²¹ que se comporte aproximadamente como um pêndulo simples. A propósito, a lei propagação da incerteza, aplicada ao modelo matemático do pêndulo simples ($g = 4\pi^2 l / T^2$), fornece:

²¹ Esses valores são fictícios.

$$u^2(g) = \left[4\pi^2 \frac{1}{\bar{T}^2}\right]^2 u^2(l) + \left[4\pi^2 \frac{2\bar{l}}{\bar{T}^3}\right]^2 u^2(T)$$

Sem nos deixar intimidar pela aparente complexidade dessa equação, substituímos nela:

(1) as melhores estimativas $\bar{l} = 1,000 \text{ m}$ e $\bar{T} = 2,00 \text{ s}$; e (2) as incertezas de medição $u(l) = 0,005 \text{ m}$ e $u(T) = 0,01 \text{ s}$ das grandezas de entrada. Com isso, obtemos:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{2,00^2}\right]^2 0,005^2 + \left[4\pi^2 \frac{2 \cdot 1,000}{2,00^3}\right]^2 0,01^2 \cong \pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2$$

$$\therefore u(g) \cong \sqrt{\pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2} \cong 0,1103 \text{ m/s}^2$$

Enfim, arredondando $u(g)$ para apresentar somente um algarismo não-nulo e arredondando \bar{g} para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que $u(g)$, temos que a aceleração local da gravidade pode ser expressa por $(9,9 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$. Ou seja, no nosso exemplo, o valor (verdadeiro) da aceleração local da gravidade provavelmente pertence ao intervalo de $9,8 \text{ m/s}^2$ a $10,0 \text{ m/s}^2$. Igualmente, comparando os termos da soma de quadrados $\pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2$, somos capazes de perceber que o período T , com $u(T) = 0,01 \text{ s}$, é a grandeza de entrada que mais contribui para a incerteza da aceleração local da gravidade. Com isso, você deve ter aprendido a propagar incertezas e interpretar essa propagação.

APÊNDICE C

Expressões tabeladas para propagação da incerteza

Dentre os procedimentos de avaliação da incerteza da medição que não envolvem explicitamente derivadas parciais, o mais popular é o recurso a expressões tais como as apresentadas na Tabela C1. Tais expressões tabeladas são simplesmente casos particulares da forma analítica da lei de propagação da incerteza (veja apêndice B). Portanto, assim que aprendem a resolver derivadas parciais, os alunos devem ser capazes deduzir sozinhos os resultados apresentados na Tabela C1. Neste apêndice, apresentamos algumas expressões para propagação de incerteza e ilustramos como combiná-las para dar conta de situações mais complexas.

Tabela C1. Algumas expressões tabeladas para propagação da incerteza.

	Operação	Incerteza propagada pela operação
2 grandezas	Soma ou subtração: $X = A \pm B$.	$u^2(X) = u^2(A) + u^2(B)$.
	Multiplicação de variáveis: $X = A \cdot B$.	$u^2(X) = A^2 \cdot u^2(B) + B^2 \cdot u^2(A)$.
	Divisão: $X = A/B$.	$u^2(X) = (1/B)^2 \cdot u^2(A) + (A/B^2)^2 \cdot u^2(B)$.
1 grandeza	Multiplicação por uma const. n : $X = nA$.	$u(X) = n \cdot u(A)$.
	Potência: $X = A^n$, com n const.	$u(X) = nA^{n-1} \cdot u(A)$.
	Exponenciação: $X = e^{nA}$, com n const.	$u(X) = ne^{nA} \cdot u(A)$.

As expressões da Tabela C1 estão agrupadas em duas categorias. Na primeira, encontram-se as expressões com duas grandezas de entrada. Na segunda, as expressões com somente uma grandeza de entrada. Como é possível perceber, a propagação de incerteza é geralmente uma soma de quadrados. Contudo, nos casos em que há somente uma grandeza de entrada, esses quadrados podem ser simplificados. Para garantir que a incerteza propagada $u(X)$ seja sempre uma quantidade positiva, alguns fatores foram registrados em módulo (veja as três últimas linhas da Tabela C1).

Um exemplo elementar: Estimando valores de área

Considere que queremos avaliar a superfície S de uma chapa de alumínio retangular com dimensões $x = (120,00 \pm 0,05)cm$ e $y = (90,00 \pm 0,05)cm$. Da Tabela C1, sabe-se que a incerteza da superfície $S = x \cdot y$, por se tratar de uma multiplicação entre duas variáveis, pode ser obtida por meio da expressão $u^2(S) = x^2 \cdot u^2(y) + y^2 \cdot u^2(x)$.

Logo, $u(S) = \sqrt{120^2 \cdot 0,05^2 + 90^2 \cdot 0,05^2} = 7,5 cm^2$. Enfim, arredondando a incerteza para o primeiro valor inteiro superior, a superfície da placa metálica pode ser estimada em $(1,0800 \pm 0,0008) m^2$.

Um exemplo menos elementar: O pêndulo simples

Considere que estamos diante de um pêndulo com $(1,000 \pm 0,005)m$ de comprimento e $(2,00 \pm 0,01)s$ de período²² que se comporte aproximadamente como um pêndulo simples. Desejamos determinar a aceleração da gravidade a partir do comprimento e período desse pêndulo segundo o modelo matemático $g = 4\pi^2 l/T^2$. Como é possível perceber, não há na Tabela C1 nenhuma expressão que forneça diretamente a incerteza de g . Em situações como essa, geralmente podemos encontrar uma equação de propagação combinando equações tabeladas.

O procedimento consiste em dividir o modelo matemático em operações mais simples para as quais a propagação seja conhecida. Por exemplo: (1) em primeiro lugar, é feita a potência T^2 para obter $\alpha \equiv T^2$; (2) em seguida, divide-se o comprimento l por α para obter $\beta \equiv l/\alpha$; (3) enfim, multiplica-se β pela constante $4\pi^2$ para obter a grandeza de saída $g = 4\pi^2\beta$ desejada. Para cada um desses passos, a propagação está bem especificada, faltando somente juntar tudo em uma expressão única. Esse procedimento encontra-se representado na Tabela C2.

²² Esses valores são fictícios.

Tabela C2. Encontrando a lei de propagação da incerteza para o modelo matemático do pêndulo simples ($g = 4\pi^2 l/T^2$).

Passo	Operação	Propagação
01	$\alpha = T^2$ (potência)	$u(\alpha) = 2T \cdot u(T)$.
02	$\beta = l/\alpha$ (divisão)	$u^2(\beta) = (1/\alpha)^2 \cdot u^2(l) + (l/\alpha^2)^2 \cdot u^2(\alpha)$.
03	$g = 4\pi^2 \cdot \beta$ (multip. por cons.)	$u(g) = 4\pi^2 \cdot u(\beta)$.

Substituindo as expressões de propagação uma na outra para obter $u(g)$ como função de $u(T)$ e $u(l)$, obtemos exatamente o que resultaria de resolver as derivadas parciais na forma analítica da lei de propagação da incerteza (Apêndice B):

$$u^2(g) = \left[4\pi^2 \frac{1}{\bar{T}^2}\right]^2 u^2(l) + \left[4\pi^2 \frac{2\bar{l}}{\bar{T}^3}\right]^2 u^2(T)$$

Sem nos deixar intimidar pela aparente complexidade dessa equação, substituímos nela:

(1) as melhores estimativas $\bar{l} = 1,000 \text{ m}$ e $\bar{T} = 2,00 \text{ s}$; e (2) as incertezas de medição $u(l) = 0,005 \text{ m}$ e $u(T) = 0,01 \text{ s}$ das grandezas de entrada. Com isso, obtemos:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{2,00^2}\right]^2 0,005^2 + \left[4\pi^2 \frac{2 \cdot 1,000}{2,00^3}\right]^2 0,01^2 \cong \pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2$$

$$\therefore u(g) \cong \sqrt{\pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2} \cong 0,1103 \text{ m/s}^2$$

Enfim, arredondando $u(g)$ para apresentar somente um algarismo não-nulo e arredondando \bar{g} para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que $u(g)$, temos que a aceleração local da gravidade pode ser expressa por $(9,9 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$. Igualmente, comparando os termos da soma de quadrados $\pi^4 \cdot 0,005^2 + \pi^4 \cdot 0,01^2$, somos capazes de perceber que o período T , com $u(T) = 0,01 \text{ s}$, é a grandeza de entrada que mais contribui para a incerteza da aceleração local da gravidade. Com isso, você deve ter aprendido a propagar incertezas e interpretar essa propagação.

APÊNDICE D

Procedimentos do tipo B: Uma visão mais detalhada

Segundo o Guia (JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a), avaliações do tipo B devem ser baseadas em toda a informação disponível sobre os instrumentos e procedimentos utilizados. Por exemplo:

- a) dados coletados anteriormente;
- b) experiência ou conhecimento geral sobre o comportamento e propriedades de materiais e instrumentos;
- c) resolução de leitura do instrumento;
- d) especificações do fabricante;
- e) dados disponíveis em certificados de calibração;
- f) incerteza associada a valores de referência.

Em síntese, a avaliação da incerteza do tipo B consiste em três passos:

- a) Identificar, no conjunto das informações disponíveis sobre procedimentos e instrumentos de medição, aquelas que provavelmente estão relacionadas à produção de incerteza da medição;
- b) Escolher uma distribuição de probabilidades mais razoável em vista das informações disponíveis;
- c) Ajustar os parâmetros da distribuição às informações disponíveis para produzir uma quantidade que possa ser interpretada como desvio padrão.

O terceiro passo é importante porque, tanto em procedimentos do tipo A quanto em procedimentos do tipo B, a incerteza da medição sempre poderá ser interpretada como um desvio padrão. O exemplo a seguir ilustra uma avaliação da incerteza do tipo B, destacando como esse procedimento de avaliação é fundamentalmente dependente de hipóteses que o experimentador lança a partir do seu conhecimento, experiência e

intuição.

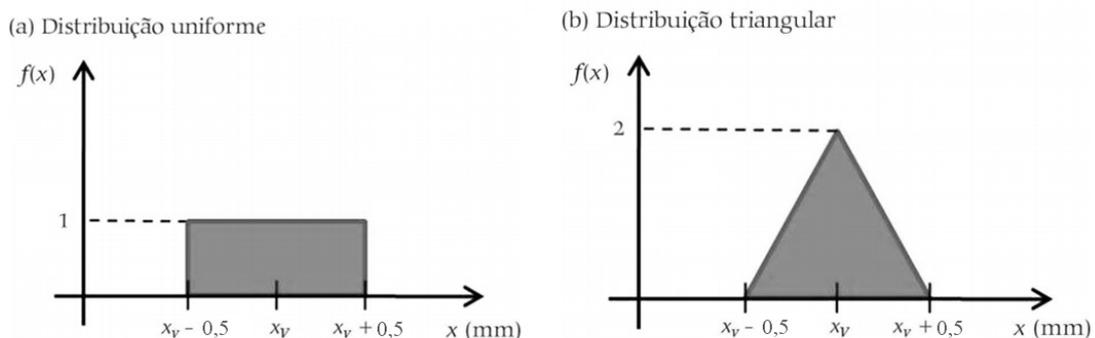
Exemplo 01: Medições feitas com régua e paquímetro

Em primeiro lugar, vamos retomar nosso exemplo da Figura D.1, em que desejávamos avaliar o comprimento de um clipe de papel. Apesar de ser muito simples, essa situação é importante porque o argumento desenvolvido para tratá-la pode ser estendido facilmente a qualquer medição que envolva escalas analógicas.

Passo 01 (Identificando informações relevantes). Como é possível perceber, há pelo menos duas informações relevantes que nos permitiriam avaliar a confiabilidade do resultado de medições feitas com instrumentos da família da régua: (1) o material com o qual é feito esse instrumento (geralmente réguas e paquímetros de plástico são mais deformáveis e são fabricados com calibração menos confiável); e (2) a largura da menor divisão da escala desses instrumentos (na régua, geralmente igual a 1 mm).

Passo 02 (Escolhendo uma distribuição de probabilidades). Além da mais consagrada distribuição gaussiana de probabilidades apresentada em texto anterior (Gráfico 3), existem duas distribuições importantes na literatura (Gráfico D.1) eventualmente utilizadas em avaliações da incerteza do tipo B. À esquerda, encontra-se a chamada distribuição uniforme. À direita, a distribuição triangular.

Gráfico D.1. Exemplos de distribuições de probabilidade que também podem ser utilizadas na avaliação da incerteza do tipo B.



Como é possível perceber, se compararmos duas distribuições da mesma largura, sendo

uma retangular e outra triangular, a distribuição triangular está mais concentrada (menos dispersa) em torno do seu valor médio. Portanto, seu desvio padrão deve ser menor. A saber, os desvios padrão das distribuições retangular e triangular relacionam-se com a largura da base L pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{retangular} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{triangular} = \frac{L}{2\sqrt{6}}$$

Em palavras, escolher uma distribuição triangular em detrimento de uma distribuição retangular significa que temos motivos para acreditar que a confiabilidade do dado que estamos obtendo é maior. Mas como essas propriedades podem nos ajudar na escolha de uma dessas distribuições? Se levarmos em consideração que instrumentos de plástico são menos confiáveis que instrumentos de metal, faz sentido escolhermos a distribuição triangular para estes e a distribuição retangular para aqueles.

Passo 03 (Ajustar parâmetros independentes). O único parâmetro independente das distribuições retangular e triangular é a largura da base. Poderíamos considerar que, apesar das dúvidas que podemos ter sobre o comprimento do clipe de papel (Figura D.1), nossa dúvida nunca excede um milímetro. Assim, a largura da base das distribuições (Gráfico D.1) podem ser consideradas aproximadamente dadas por $L = 1 \text{ mm}$. Inserindo essa informação nas equações do desvio padrão, obtemos: (1) para medições de um comprimento x com régua de plástico, admitindo-se a distribuição retangular, uma incerteza $u(x) = 0,3\text{mm}$; e (2) para medições com régua de metal, admitindo-se uma distribuição triangular, uma incerteza $u(x) = 0,2\text{mm}$.

A justificativa para que tradicionalmente se avalie os valores de incerteza, devido à resolução de instrumentos analógicos, pela metade da menor divisão da escala desses instrumentos (0,5 mm no caso das duas régua, ao invés de 0,3 mm ou 0,2 mm) deve-se

a um juízo de valor que considera que superestimar uma incerteza é preferível (por ser mais conservador) do que subestimá-la. Como é possível perceber, o processo de avaliação da incerteza do tipo B, muito mais que avaliações do tipo A, pode se tornar bastante especulativo na medida em que exige levantar hipóteses (sempre criticáveis) que se justificam com base em conhecimento, experiência, intuição do experimentador e juízos de valor.

Exemplo 02: Lendo certificados de fabricação e calibração

Como segundo exemplo, considere que o certificado de fabricação de um cilindro metálico informa que ele possui massa igual a 1,000 kg com incerteza expandida em três desvios padrão de 0,008 kg, portanto ao nível de abrangência de quase 100% (vide o Gráfico 3). Em outras palavras, 0,008 kg é igual ao triplo do desvio padrão. Nesse caso, a avaliação é muito simples! Dividimos 0,008 kg por três e recuperamos a informação desejada: o desvio padrão que caracteriza a incerteza sobre a massa do cilindro. Se o fabricante tivesse informado que a incerteza é de 0,008 kg com 95% de abrangência, pressupondo que ele se referia a uma distribuição normal, poderíamos concluir que a incerteza desse valor de massa é aproximadamente igual a 0,004 kg (vide novamente Gráfico 3).

Exemplo 04: Medições com instrumentos digitais

É conveniente procurar no manual do instrumento a informação do fabricante sobre a incerteza da medição. Acontece muitas vezes que tal incerteza, segundo o próprio fabricante, é maior do que a menor diferença possível entre duas leituras do instrumento. Explicando melhor, o visor de um termômetro de infravermelho permite leituras em graus Célsius com um algarismo decimal (por exemplo, 15,7° C), mas o fabricante pode informar que a incerteza é de 0,2° C.

Caso não se tenha tal informação e considerando que nossas avaliações de incerteza

devem ser preferencialmente conservadoras (isto é, que persigam uma superavaliação da incerteza ao invés de subavaliá-la) é conveniente adotar a menor diferença possível entre duas leituras do instrumento como tal. Ou seja, em um cronômetro digital que apresente, no visor, um resultado expresso até milésimo de segundo (por exemplo, 3,458 s), adota-se como incerteza 0,001 s.

Considerações finais

Ao contrário do que os exemplos escolhidos neste texto podem sugerir, procedimentos de avaliação da incerteza do tipo B costumam ser bastante rigorosos em contextos que exijam tal rigor. Nossos exemplos foram escolhidos para serem simples de compreender e relevantes a laboratórios de ensino (onde precisão geralmente não é a principal preocupação). Para uma visão mais completa sobre as avaliações da incerteza do tipo B, recomendamos a leitura dos textos oficiais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUNGE, M. **Teoria e realidade**. São Paulo: Perspectiva, 1974.

JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. **Evaluation of measurement data**: guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). Sèvres: BIPM, 2008a.

JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. **International vocabulary in metrology**: basic and general concepts and associated terms (VIM) (3 ed.). Sèvres: BIPM, 2008b.

LAKATOS, I. **Metodologia de los programas de investigación científica**. Madrid: Alianza Editorial, 1993.

LIMA JUNIOR, P.; SILVEIRA, F. L. Sobre as incertezas do tipo A e B e sua propagação sem derivadas: uma contribuição para a incorporação da metrologia contemporânea aos laboratórios de Física Básica superior. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 2, p. 1-6, 2011a.

SILVA, W. P. et al. Geração de incertezas de funções redutíveis ao primeiro grau ajustadas pelo método dos mínimos quadrados. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 3, 1999.

VUOLO, J. **Fundamentos da teoria de erros**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.