Introdução e Conceitos básicos

Aula 1

1. **Apresentação da parte prática**

2. Conceitos básicos da teoria de erros

   I. Medidas e incertezas

   II. Propagação de erros

3. Início do Experimento 1 - MRU

   I. Medidas dos intervalos e tempos

   II. Cálculos das velocidades médias

Fenômenos Mecânicos (BCJ 0204)

Experimentos

- Na primeira aula prática, deverão ser formados grupos para a realização dos experimentos.

- Os experimentos serão realizados no laboratório segundo roteiro que será disponibilizado na página do TIDIA, no mínimo, uma semana antes do respectivo experimento.

- Cada aluno deve imprimir seu próprio roteiro, no entanto deverá ser entregue **somente 1** (um) roteiro preenchido por grupo.

- Nas aulas práticas é imprescindível a presença no laboratório, por isso, a **falta em 2 (experimentos) sem justificativa implicará em reprovação automática na disciplina**.

Apresentação da Disciplina

Fenômenos Mecânicos (BCJ 0204)

Relatórios

- Nesta disciplina, os chamados “Relatórios” são os roteiros preenchidos por cada grupo com os resultados dos experimentos (tabelas e gráficos) e perguntas que abrem discussões e conclusões.

- Os relatórios de cada grupo receberão uma nota, sendo que a média dos mesmos corresponderá a **<u>20% da nota final do curso</u>**.

Apresentação da Disciplina

Fenômenos Mecânicos (BCJ 0204)

Regras para reposição de experimentos

- Aqueles que perderam uma aula prática e **justificaram**, têm direito à reposição do respectivo experimento ao final do curso (vide cronograma).

- O aluno deverá solicitar ao seu professor **por e-mail** que deseja repor o experimento. O documento que justifica a falta em uma aula prática (atestado médico ou do empregador) deverá ser entregue no máximo no dia da reposição do experimento.

- **CUIDADO: ausência em 2 experimentos sem justificativa implica em reprovação na disciplina, independente da nota final!**

Apresentação da Disciplina

Fenômenos Mecânicos (BCJ 0204)

Trabalhando no laboratório

- Ao contrário das aulas de teoria, nas aulas práticas o principal aprendizado ocorre no momento de realização do experimento por um grupo coeso, organizado e focado nas tarefas.

- Não é permitido o uso de computadores, tablets, celulares ou outros aparelhos com conectividade durante o período de laboratório.

- Será permitido o uso de calculadoras científicas.

- No laboratório, será exigido o uso de jaleco, conforme regra da universidade.

Cronograma (Semana I)

Data	Aula	Atividade
18/02	1	- Introdução ao laboratório de Fenômenos Mecânicos - Conceitos de Medidas, Algarismos significativos, incerteza, propagação de erros
03/03	2	- Apresentação de dicas para elaboração de gráficos e obtenção dos coeficientes linear e angular e das respectivas incertezas - **Experimento 1**: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)
17/03	3	- Revisão sobre o cálculo da incerteza dos coeficientes angular e linear. Apresentação do conceito de linearização - **Experimento 2**: movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)
31/03	4	- Revisão dos conceitos relacionados ao experimento - **Experimento 3**: lei de Hooke, calibração de molas
14/04	5	- Revisão dos conceitos relacionados ao experimento - **Experimento 4**: colisões, conservação de momento linear, conservação de energia
05/05	6	Reposição de experimentos

Cronograma (Semana II)

Data	Aula	Atividade
25/02	1	- Introdução ao laboratório de Fenômenos Mecânicos - Conceitos de Medidas, Algarismos significativos, incerteza, propagação de erros
10/03	2	- Apresentação de dicas para elaboração de gráficos e obtenção dos coeficientes linear e angular e das respectivas incertezas - **Experimento 1**: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)
24/03	3	- Revisão sobre o cálculo da incerteza dos coeficientes angular e linear. Apresentação do conceito de linearização - **Experimento 2**: movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)
07/04	4	- Revisão dos conceitos relacionados ao experimento - **Experimento 3**: lei de Hooke, calibração de molas
28/04	5	- Revisão dos conceitos relacionados ao experimento - **Experimento 4**: colisões, conservação de momento linear, conservação de energia
05/05	6	Reposição de experimentos

Aula 1

Conceitos básicos da teoria de erros

I. Medidas e incertezas

II. Propagação de erros

Medidas e Incertezas

Medir é um procedimento experimental em que o valor de uma grandeza é determinado em termos do valor de uma unidade definida através de um padrão.

Uma medição começa com a especificação apropriada do mensurando e do procedimento de medição.

Como todo processo de medição é imperfeito, resulta que toda medida tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido.

Sendo assim, uma medida deve conter as seguintes informações:

1. **o valor da grandeza**
2. **a incerteza da medição**
3. **a unidade**

→ Sistemas de unidades

- MKS

Sistema metro-kilograma-segundo (MKS) que, mais tarde, deu origem ao Sistema Internacional de Unidades (SI) que é o sistema de unidades de físicas medidas mais utilizado na atualidade;

- CGS

É um sistema de unidades de medidas físicas, ou sistema dimensional, de tipologia LMT (comprimento, massa tempo), cujas unidades-base são o centímetro para o comprimento, o grama para a massa e o segundo para o tempo;

→ Sistema internacional de unidades (SI)

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de matéria	mol	mol

Tabela 2. Grandezas e unidades fundamentais do SI

→ Notação científica

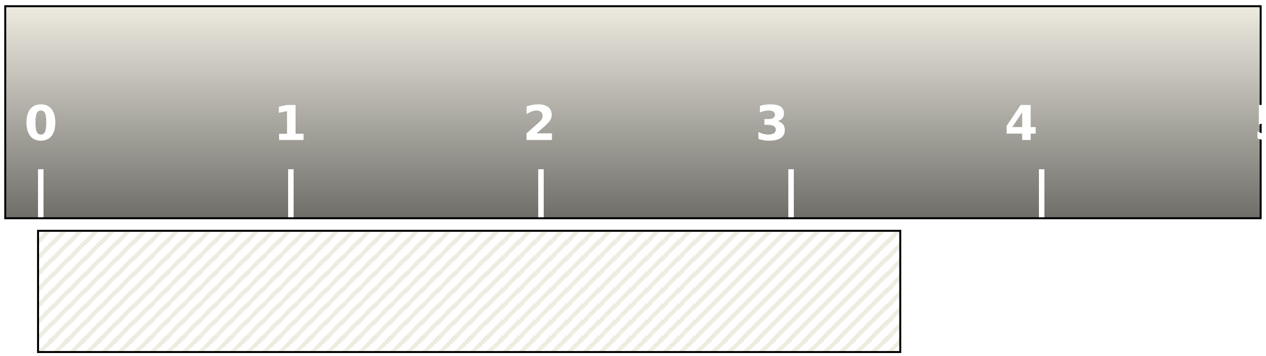
Ordem de grandeza	Prefixo	Abreviatura
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	µ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	cm
10^{-1}	deci	d
10^{1}	deca	da
10^{2}	hecto	h
10^{3}	quilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T

Tabela 1. Potências de dez e prefixos

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

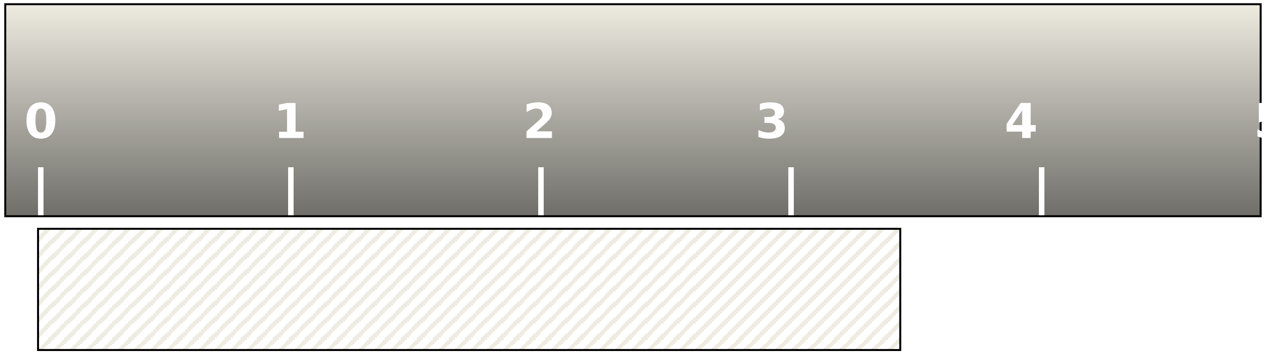
Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 3 cm e 4 cm;

→ Algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**

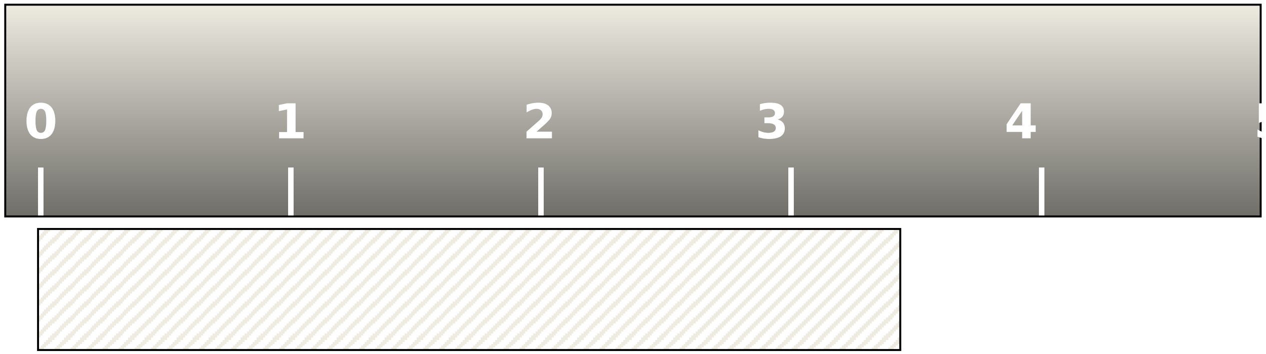


- O comprimento da barra está certamente entre 3 cm e 4 cm;
- Qual seria o algarismo que viria depois do 3?

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

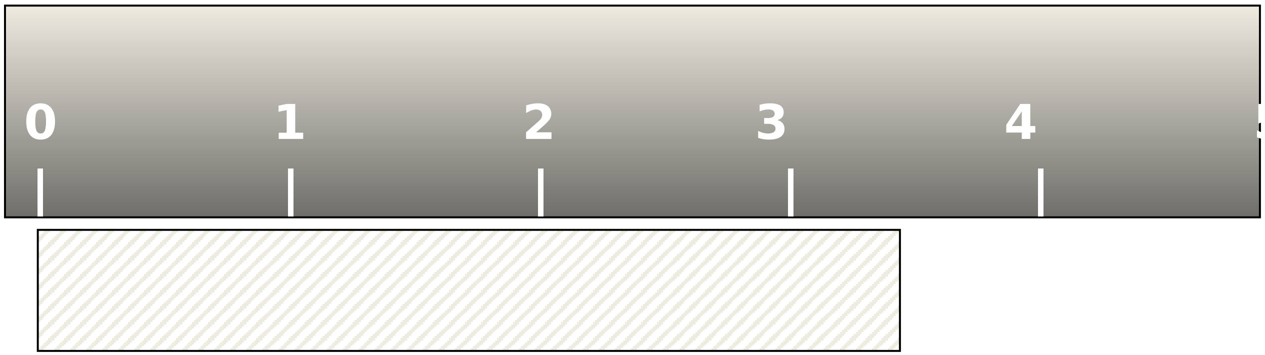
Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 3cm e 4cm;
- Qual seria o algarismo que viria depois do 3?
- Leitura possível: L=3,3cm (ou 3,4 cm ou, ainda, 3,6 cm).

Medidas e Incertezas

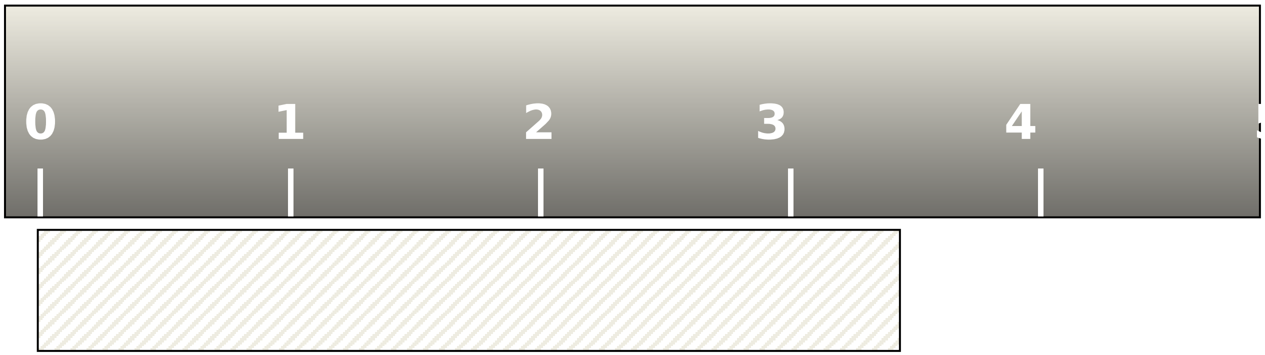
→ Algarismos significativos



algarismo duvidoso

$$L = \underbrace{3,3}_{\text{algarismos significativos}}\ \text{cm}$$

→ Algarismos significativos



algarismo duvidoso

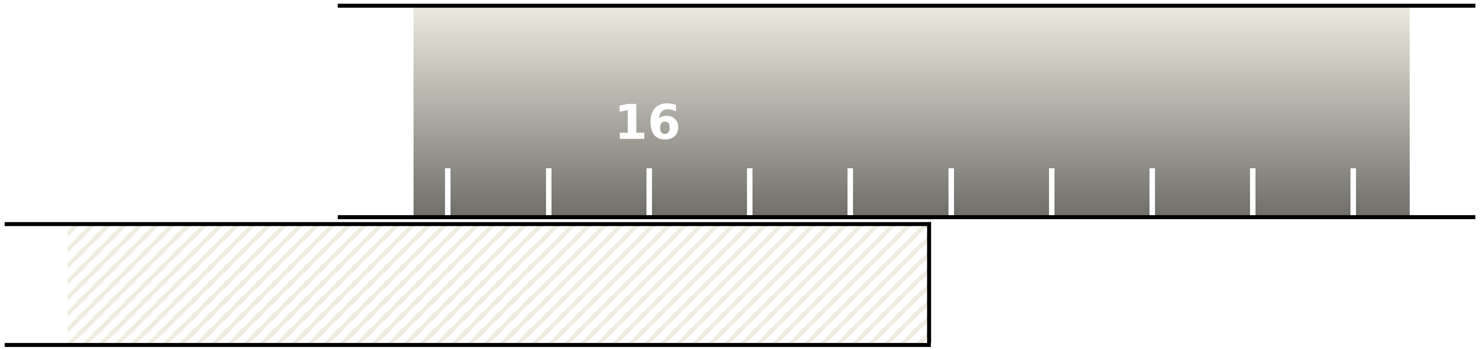
$L = \underbrace{3,3}_{\text{algarismos significativos}}\ \text{cm}$

- Regra geral: Os algarismos significativos de uma medida são todos os algarismos lidos com certeza mais o primeiro algarismo duvidoso;

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

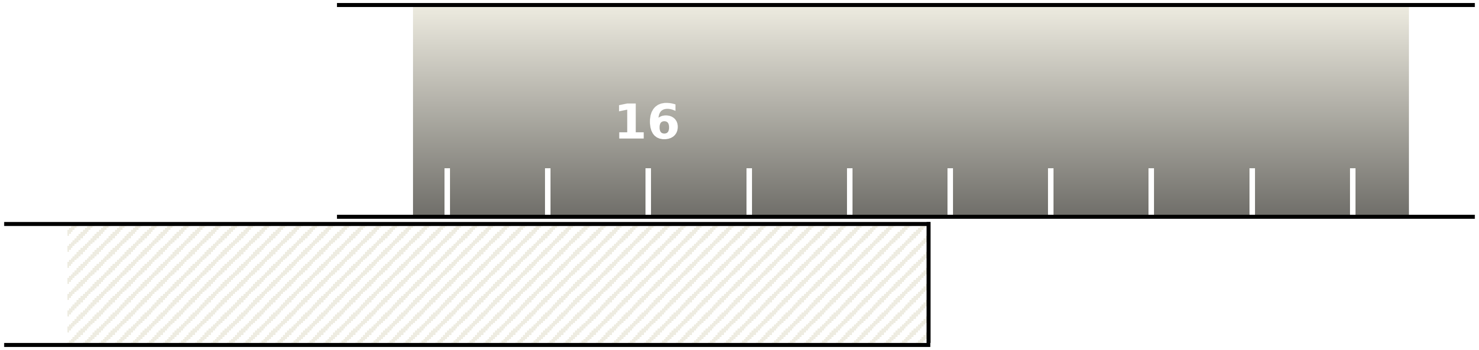
Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



- Leitura possível: L=16,28cm;

→ Algarismos significativos

Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



- Leitura possível: L=16,28cm;

- Na referida medida todos os algarismos são significativos;
- O algarismo 8 foi avaliado, porém, sendo ele o primeiro algarismo duvidoso, ele também é significativo;

→ Algarismos significativos

Exercício de fixação

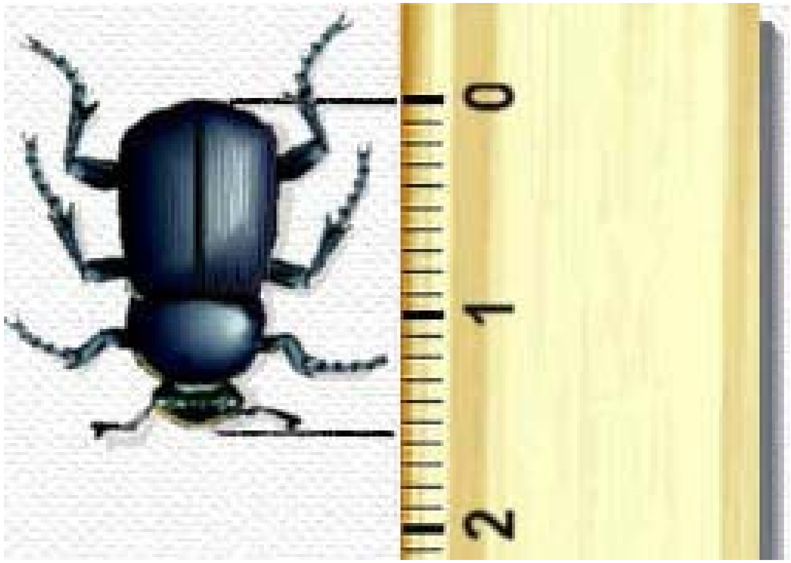


Figura 1. Medindo o tamanho de um besouro.

Qual das alternativas abaixo melhor representa a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Constantes numéricas

- São fatores como π = 3,141592...; e = 2,71828...; log2 = 0,3010299...; $\sqrt{2}$ = 1,4142...; etc., que eventualmente podem aparecer nas fórmulas. Por exemplo, o período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

- Estes números são tidos como exatos, pois são sempre conhecidos com maior precisão do que podemos medir as grandezas físicas. **Nos cálculos, estas constantes numéricas devem ser tomadas com um algarismo significativo a mais do que o fator com o menor número de algarismos significativos;**

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Constantes físicas

- São grandezas que constam em tabelas de constantes físicas;
- **Exemplos:** $c = 2{,}99792 \times 10^{8}$ m/s **(velocidade da luz no vácuo)**
  $h = 6{,}62607 \times 10^{-34}$ J.s **(constante de Planck)**

- Estas constantes foram obtidas a partir de medidas e, embora a precisão com a qual as mesmas sejam conhecidas seja limitada (em geral, seis a sete casas decimais), esta precisão é muito maior do que aquela com a qual em geral efetuamos as nossas medidas. Nos cálculos, estas constantes físicas devem ser tomadas com um algarismo significativo a mais do que o fator com o menor número de algarismos significativos;

→ Algarismos significativos
(Regras básicas)

- Ao efetuar qualquer operação matemática com grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos, é necessário exprimir o resultado segundo a norma de que o número obtido pode ter apenas <u>um algarismo duvidoso</u>;

- Assim sendo, é preciso arredondar o resultado obtido no primeiro algarismo duvidoso;

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

1. Se numa quantidade os algarismos que vierem após o primeiro algarismo duvidoso formarem números **superiores** a 5, 50, 500, 5000, etc., aumenta-se uma unidade o primeiro algarismo duvidoso e desprezam-se os demais;

Exemplos:

787,672 cm³ → 787,7 cm³

24,9287 g → 24,93 g

0,002619 A → 0,00262 A

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

2. Se os algarismos a serem desprezados numa quantidade formarem números **inferiores** a 5, 50, 500, 5000, etc., os algarismos significativos que restam não se modificam;

Exemplos:

761,05 mmHg → 761 mmHg

0,0931 cal/g.K → 0,09 cal/g.K

6,9305 dyn/cm² → 6,9 dyn/cm²

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

3. Se os algarismos a serem desprezados numa quantidade formarem números **iguais** a 5, 50, 500, etc., faz-se com que o algarismo duvidoso fique par (caso o algarismo que fica seja ímpar, soma-se a ele uma unidade para torná-lo par);

Exemplos:

2,78500 s → 2,78 s

0,0755 A → 0,076 A

539,50 cal/g A → 540 cal/g

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

- Os zeros à esquerda do número não são significativos. Exemplos:

1. **a medida 0,0023cm tem somente dois algarismos significativos,**
2. **a medida 0,348s tem apenas três algarismos significativos, e**
3. **a medida 0,0040000m tem cinco algarismos significativos.**

- Alguns autores não utilizam esta definição de algarismos significativos. No entanto, optou-se por ela por ser a definição adotada pela maioria dos autores consultados;

→ Algarismos significativos

(Definição e resumo das regras básicas)

- Algarismos significativos representam o número de algarismos que compõe o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda;

- Zeros à direita são significativos;

- O algarismo significativo mais à direita é denominado algarismo significativo duvidoso e é sobre ele que em geral reside a nossa incerteza;

→ Operações com algarismos significativos

(Adição)

- O resultado da adição de várias grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos é obtido, após efetuar a operação, arredondando-se a soma na casa decimal correspondente ao fator com o menor número de casas decimais;

Exemplos:

27,8 m + 1,326 m + 0,66 m = 29,786 m → 29,8 m;

11,45 s + 93,1 s +0,333 s = 104,883 s → 104,9 s;

→ Operações com algarismos significativos

(Subtração)

• A subtração é um caso particular da adição e, portanto, neste caso adota-se o mesmo critério apresentado no item anterior;

Exemplos:

18,2476 m - 16,72 m = 1,5276 m = → 1,53 m;

127,36 g – 68,297 g = 59,063 g → 59,06 g;

→ Operações com algarismos significativos
(Multiplicação)

- O produto de duas ou mais grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos deve possuir, em geral, o mesmo número de algarismos significativos da grandeza com o menor número de algarismos significativos;

Exemplos:

3,27251 cm x 1,32 cm = 4,3197132 cm^2 → 4,32 cm^2;

0,452 A x 2671 Ω = 1207,292 V → 1,21 x 10^3 V;

→ Operações com algarismos significativos (Divisão)

- A divisão é simplesmente um caso particular da multiplicação e, portanto, neste caso aplica-se a regra anterior;

Exemplos:

$$\frac{\mathbf{63{,}72\ cm}}{\mathbf{23{,}1\ s}} = 2{,}758441558\ \text{cm/s} = 2{,}76\ \text{cm/s};$$

$$\frac{\mathbf{0{,}451\ V}}{\mathbf{2001\Omega}} = 0{,}0002253873\ \text{A} = 2{,}25 \times 10^{-4}\ \text{A};$$

→ Operações com algarismos significativos

(Radiciação, potenciação, logaritmação, etc.)

- Nas demais operações, efetua-se a operação e mantém-se o número de algarismos significativos da grandeza operada;

- Em operações de uma medida direta ou indireta envolvendo constantes matemáticas (ou físicas), deve-se manter o número de algarismos significativos da medida;

- O critério utilizado para as operações de multiplicação e divisão foi adotado por simplicidade, havendo casos, na multiplicação, que podem aumentar em um o número de algarismos significativos do produto; na divisão, poderá ocorrer o contrário;

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$

b) $(8,75\ m/s)^2 =$

c) log 62,874 =

d) sen 27° =

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$ 3,096492738 m

b) (8,75 m/s)^2 = 76,5625 m^2/s^2

c) log 62,874 = 1,798471091

d) sen 27° = 0,453990499

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$ 3,096492738 = 3,096 m

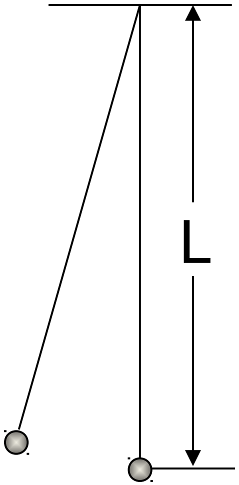
b) (8,75 m/s)^2 = 76,5625 = 76,6 m^2/s^2

c) log 62,874 = 1,798471091 = 1,7985

d) sen 27° = 0,453990499 = 0,45

→ Operações com algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: determinação da aceleração da gravidade através da utilização de um pêndulo simples



$$g=\frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

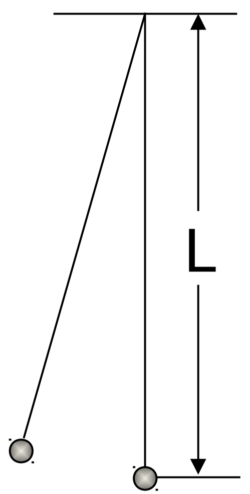
Supondo que foram feitas as seguintes medidas:
Período: T = 1,72 s
Comprimento do fio: L = 73,45 cm

E efetuando-se as operações algébricas, encontra-se:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

g = 980,1547367 cm/s^2 → Quantos desses algarismos são realmente significativos?

→ Operações com algarismos significativos



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Período: T = 1,72 s

Comprimento do fio: L = 73,45 cm

$$T^2 = (1,72)^2 = 2,9\bar{5}84\,s^2$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 73,4\bar{5}\,cm}{2,9\bar{5}84\,s^2} = 98\bar{0},1547367$$

$$g = 980\,cm/s^2$$

↳ Conclui-se, portanto, que o número correto de algarismos significativos para o valor da aceleração da gravidade neste caso é três.

Medidas e Incertezas

→ Transformação de unidades

- Ao realizar uma transformação de unidades para uma determinada grandeza física, o resultado final deve possuir o mesmo número de algarismos significativos da expressão original;

- Caso seja conveniente é possível utilizar potências de dez para expressar o resultado final;

Exemplo:

P = 675 lb = (675 x 4,448) N = 3002,4 N (1 lb = 4,448 N)
e, finalmente:

P = 3002,4 N → 3,00 x 10^3 N (três algarismos significativos)

Incerteza

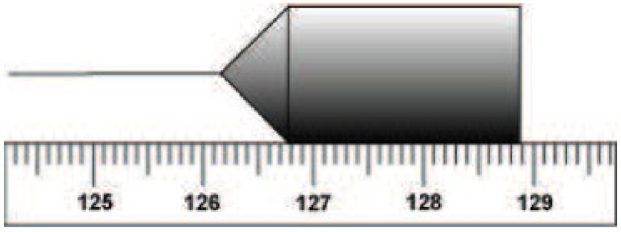
Medidas e Incertezas

Como expressar o resultado de uma medida?

Veja o seguinte exemplo:

A leitura da régua mostra 128,9 cm.
Podemos associar uma incerteza de 0.05 cm a esta medida.

Sendo assim, devemos escrever



$$L = 128{,}90 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Especifica o intervalo em que se tem confiança de ser onde a quantidade se encontra, entre 128,85 e 128,95.

Especifica o valor mais plausível da medida.

Em geral:

$$\boxed{\text{Valor medido de x} = x_{médio} \pm \delta x}$$

Algarismos significativos da Incerteza

Como δx é só uma estimativa da incerteza, não faz sentido expressá-lo com muita precisão.

Exemplo
É um ABSURDO expressar a medida da aceleração da gravidade como $g = 9{,}82 \pm 0{,}02385$ m.s^{-2} .

Mesmo em trabalhos de altíssima precisão, utilizam-se no máximo DOIS algarismos significativos para expressar a incerteza de uma medida.

No nosso caso, vamos trabalhar com apenas 1 algarismo significativo na incerteza, o que resulta em

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}02 \text{ m.s}^{-2} .$$

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:

A velocidade medida de um foguete é 6050,78 $m.s^{-2}$.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ?
- $\pm$ 3 ?
- $\pm$ 0,3 ?

Medidas e Incertezas

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:
A velocidade medida de um foguete é 6050,78 $m.s^{-2}$.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ? $\boxed{6050 \pm 30}$

  Faixa de confiança entre 6020 e 6080 $m.s^{-2}$

- $\pm$ 3 ? $\boxed{6051 \pm 3}$

  Faixa de confiança entre 6048 e 6054 $m.s^{-2}$

- $\pm$ 0,3 ? $\boxed{6050{,}8 \pm 0{,}3}$

  Faixa de confiança entre 6050,5 e 6051,1 $m.s^{-2}$

Medidas e Incertezas

Regras práticas para apresentação de resultados

- Para expressar a incerteza, use apenas 1 algarismo significativo, conforme discutido anteriormente;

- O último algarismo significativo do valor medido deve ser da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza;

- A notação científica pode ser usada para se evitar ambiguidades. Neste caso, deve-se usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza quanto para sua incerteza.

NOTAÇÃO ERRADA	NOTAÇÃO CORRETA
$5{,}30 \pm 0{,}0572$	$5{,}30 \pm 0{,}06$
$124{,}5 \pm 10$	120 ± 10
$0{,}00002002 \pm 0{,}0000005$	$(200 \pm 5)X10^{-7}$
$(45 \pm 2{,}6)X10^{1}$	$(45 \pm 3)X10^{1}$

Erro

Todo processo de medição tem imperfeições que dão origem a um erro em seu resultado.

O erro é definido como a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro (em geral, não acessível) do mensurando.

Teoria de erros

Conceitos básicos

Tipos de erros

Podem ser basicamente de dois tipos: **aleatório** e **sistemático**:

- **Erro aleatório**
  - Origem: variações imprevisíveis no processo de medida. Não pode ser compensado, mas pode ser reduzido, aumentando-se o número de observações ou repetições da mesma medida.
- **Erro sistemático**
  - Origem: má calibração do instrumento ou de um erro de medida repetitivo. Não pode ser eliminado, mas pode ser reduzido ou corrigido. Ex: uma balança mal aferida que apresenta sempre uma leitura 50 g maior do que o valor real do objeto medido.

Teoria de erros

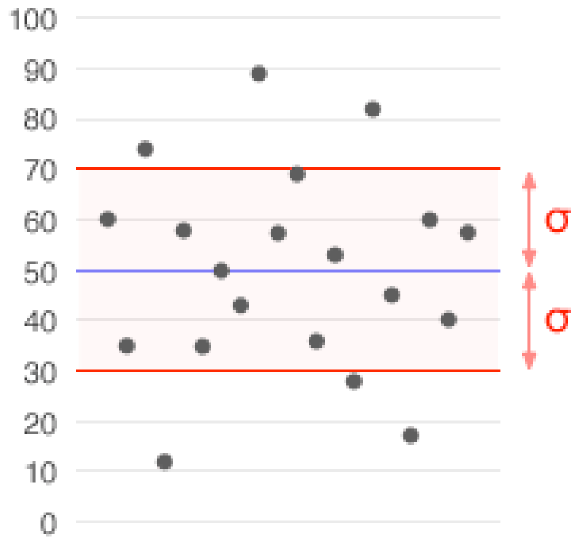
Conceitos básicos

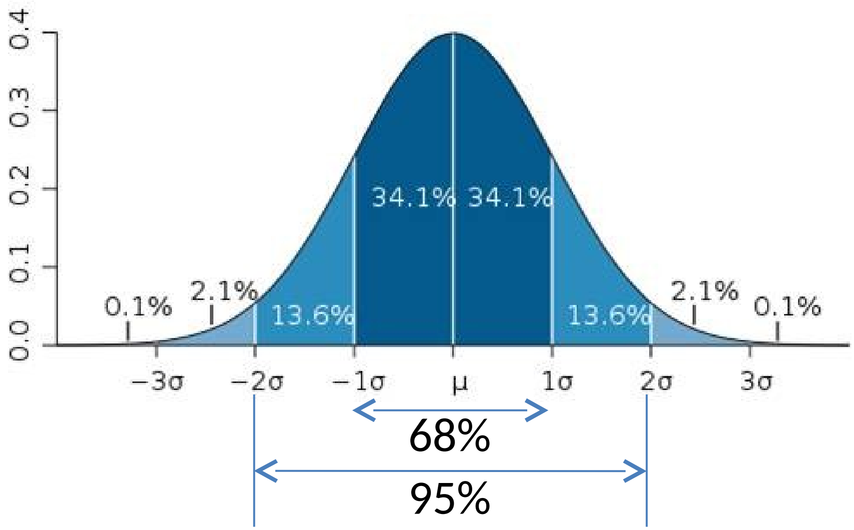
Incerteza

Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser atribuídos ao mensurando. A incerteza reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

Esse parâmetro pode ser um **desvio padrão** (ou um múltiplo dele) ou a **metade do intervalo de uma escala**.

Uma incerteza corresponde a um dado **nível de confiança**, ou seja, a probabilidade de encontrar o valor num determinado intervalo.





Teoria de erros

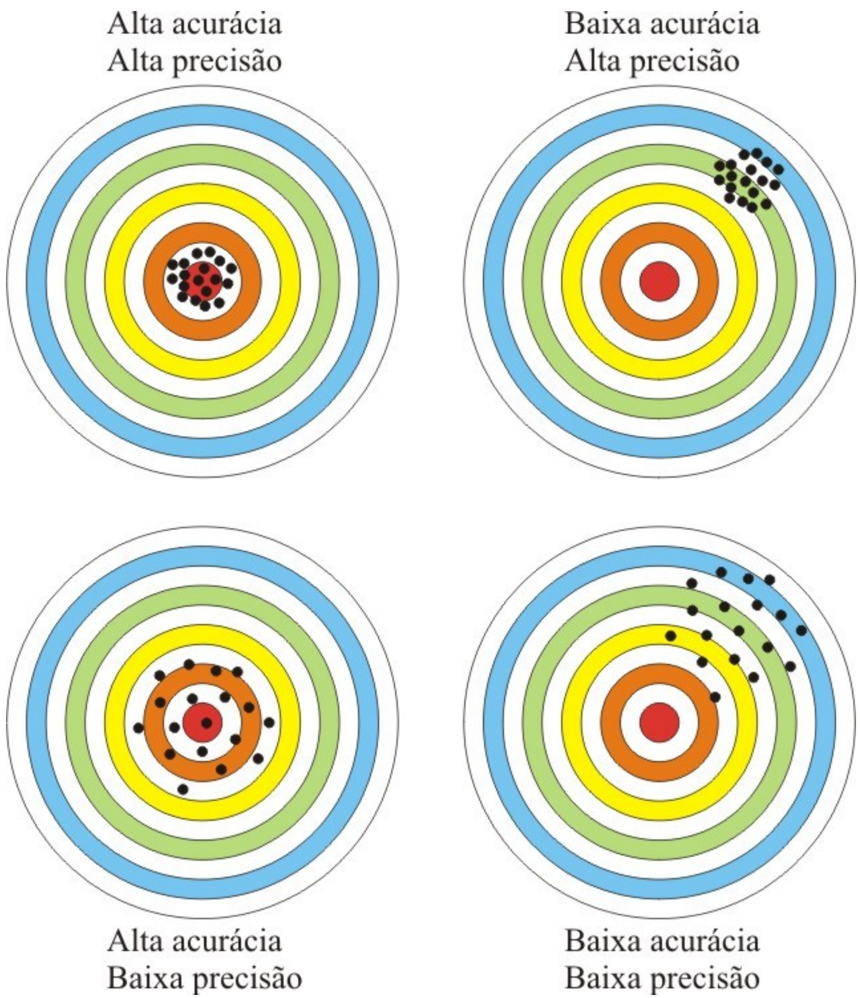
Conceitos básicos

Precisão

Medida de quão bem o valor de uma medida foi determinado, sem considerar se este está próximo ou não do valor real.
Também é uma medida da reprodutibilidade do resultado de um experimento.

Acurácia ou **exatidão**

Medida de quão próximo o valor medido está do valor verdadeiro da grandeza.



Como estimar incertezas

A incerteza pode ser de dois tipos, segundo o método utilizado para estimar o seu valor:

Avaliação tipo A

A incerteza é avaliada por meio de uma análise estatística de uma série de medidas.

Avaliação tipo B

A incerteza é avaliada por meio de métodos não estatísticos quando não se dispõe de observações repetidas.

Cálculo de incertezas

Avaliação tipo B

Caso em que o número de medições realizadas não é suficiente para uma análise estatística ou não é prático ou não é possível fazer esse tipo de análise.

Dependente do bom senso do operador que deve utilizar de outras fontes de informação para estimar a incerteza, tais como:

- Dados de medições anteriores
- Conhecimento sobre o instrumento utilizado
- Especificações do fabricante
- Dados de calibração

Exemplos:

- Metade da menor divisão de um instrumento
- Faixa de oscilação do ponteiro de um medidor analógico
- Faixa de variação do último algarismo de um medidor digital

Cálculo de incertezas

Avaliação tipo A

Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza e obtemos valores diferentes, a incerteza da medida certamente é MAIOR do que a menor divisão do aparelho de medição.

Exemplo:

Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2{,}00 \pm 0{,}05\ m$, medido com o cronômetro.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Precisamos de um tratamento estatístico nesses casos!

Cálculo de incertezas

Definições

- Estimativa do valor correto da grandeza medida ou Valor Médio

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

- Estimativa do Desvio Padrão de cada medida

$$\Delta x=\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$$

- Incerteza da média (de medidas independentes permitindo estatística)

$$\Delta\overline{x}=\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Cálculo de incertezas

De volta ao exemplo...

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Valor médio $$t_m = \frac{1}{N} \sum t_i \quad = 0{,}627\, s$$

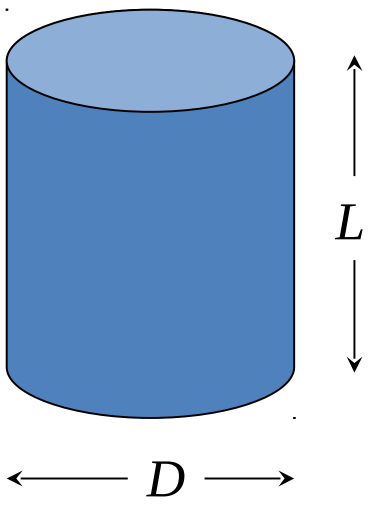
Incerteza da média $$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum (t_i - t_m)^2}{N(N-1)}} \quad = 0{,}010651\, s$$

Apresentação do Resultado: $$t = t_m \pm \sigma_m \quad = (0{,}63 \pm 0{,}01)\, s$$

Propagação de erros

Como determinar a incerteza de uma grandeza que é obtida por meio de um cálculo usando medidas diretas?

Exemplo: Vamos considerar um cilindro de diâmetro da base D e altura L.



Medindo D e L, o volume do cilindro será estimado por:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

Aí vem a seguinte questão:

Qual a incerteza envolvida nessa determinação indireta do volume?

O diâmetro e a altura são determinados experimentalmente e, consequentemente essas grandezas possuem incertezas associadas a sua determinação:

$$D = \bar{D} \pm \sigma_D, \qquad L = \bar{L} \pm \sigma_L$$

Propagação de erros

Vamos considerar um caso concreto

$$D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm} \qquad L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Considerando a expressão para a determinação do volume

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L \quad = \pi \frac{\left(5,00 \pm 0,05\right)^2}{4} \left(12,50 \pm 0,05\right) cm^3$$

O valor médio do volume é dado simplesmente pelos valores médios do diâmetro e da altura:

$$\bar{V} = \pi \frac{\left(5,0\right)^2}{4} \left(12,5\right) cm^3 = 245,44\, cm^3$$

Mas, qual a incerteza nessa determinação do volume?

Qual o valor que obteríamos se considerássemos os valores máximos do diâmetro, 5,05 cm, e da altura, 12,55 cm?
E se considerássemos os valores mínimos?

Assim, com esses dados de diâmetro e altura, podemos concluir que

$$V = \left(245 \pm 6\right) \text{ cm}^3$$

Propagação de erros

Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza na variável determinada indiretamente.

Existe um método mais rigoroso e apropriado para se encontrar a incerteza de uma variável determinada indiretamente.

Esse método é denominado PROPAGAÇÃO DE ERROS

Vamos considerar o caso de uma variável dependente geral

$$F(x, y, z, \ldots)$$

A incerteza em F é determinada indiretamente pela propagação dos erros das outras variáveis

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\sigma_z)^2 + \ldots}$$

Propagação de erros

Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \left(\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \left(\sigma_L\right)^2} \quad = \bar{V}\sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$= 245\sqrt{4\left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,5}\right)^2}$$

Resultando num erro propagado de **5 cm³**

$$V = \left(245 \pm 5\right)\ \mathrm{cm}^3$$

Exercício

Determine a aceleração gravitacional *g* considerando o exemplo do experimento de queda livre caseiro:

O tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de *h = 2,00 ± 0,05 m,* foi medido com o cronômetro do meu telefone celular.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Tratando os dados: $t = t_m \pm \sigma_m \quad D = \bar{D} \pm \sigma_D, \quad L = \bar{L} \pm \sigma_L$

Cálculo de g: $g = 2\frac{h}{t^2} \qquad \bar{g} = 2\frac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10,406\, m/s^2$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} = 0,425\, m/s^2$$

Apresentação do Resultado: $g = 10,4 \pm 0,4\ m/s^2$

Como fazer a propagação de erro “sem usar” derivada?

Regra prática

•Na prática operações como a **soma ou subtração, multiplicação ou divisão, etc.** a propagação das incertezas resume-se a operações matemáticas simples, ou regras práticas, dos operandos.

No quadro a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas.

Quadro resumo

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = x^m potência simples	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
w = ax multiplicação por constante	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax + b	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax^py^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x$ $b\sigma_x$ em radianos

Identifique o tipo de expressão que você precisa para determinar a incerteza.

Exemplo: Um objeto percorreu a distância de D = (2,4 ± 0,2) m em um tempo de t = (1,2 ± 0,1)s. Determine a velocidade média do objeto e sua incerteza.

$$v = \frac{D}{t} = \frac{2{,}4}{1{,}2} = 2$$

Para o cálculo da incerteza, observamos na tabela que:

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 \\ \sigma_v = v\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 0{,}23\end{gathered}}$$

Logo: ***v* = (2,0 ± 0,2) m/s**

Início Experimento 1 - MRU

1. Medir os intervalos entre os sensores do trilho
   I. Calcular valores médios
   II. Calcular incertezas

2. Medir os tempos em cada intervalo (3 repetições)
   I. Calcular valores médios
   II. Calcular incertezas

3. Calcular as velocidades médias em cada intervalo
   I. Calcular valores médios
   II. Fazer propagação de erros
   III. Calcular incertezas

Na próxima aula concluiremos o Experimento 1

O roteiro deve ser baixado do site: http://tidia-ae.ufabc.edu.br

Para a entrada no laboratório na próxima aula é OBRIGATÓRIO:

Que o estudante esteja usando o jaleco, roupas adequadas segundo as normas de segurança dos laboratórios .

Não esqueça de definir com seus colegas quem são os integrantes de seu grupo. Lembre-se que no final da aula deve ser entregue um único roteiro por grupo.

Referências

Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros.* Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.

Bevington, P. R., Robinson, D. K., *Data reduction and error analysis for the physical sciences,* McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 2003.

Serway, R. A., Jewett, Jr., J. W., *Princípios de Física vol. 1*, **cap. 1**, Ed. Cengage Learning.

Tabacniks, Manfredo Harri. *Conceitos básicos de teoria de erros*, Revisão 2009 (AAQ), IFUSP, 2009.

Guia para física experimental IFGW-Unicamp, 1997.

Sohaib Shamim and Sabieh Anwar, *Error Analysis in the Experimental Physics Lab,* LUMS School of Science and Engineering, September 8, 2010.