Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

INTRODUÇÃO AO LABORATÓRIO DE FENÔMENOS

Prof. Alysson Fábio Ferrari
alysson.ferrari (at) ufabc (pt) edu (pt) br

Universidade Federal do ABC


POWERS OF
10

Notação Científica

Notação Científica é uma forma conveniente de escrever números muito pequenos, ou muito grandes.

$10^{-4} = 0{,}0001$

$10^{-3} = 0{,}001$

$10^{-2} = 0{,}01$

$10^{-1} = 0{,}1$

$10^{0} = 1$

$10^{1} = 10$

$10^{2} = 100$

$10^{3} = 1.000$

$10^{4} = 10.000$

$$27836463{,}34934893789 \times 10^{n}$$

n $\qquad$ n

$n \quad n < 0$ $\qquad$ $n \quad n > 0$

Notação Científica

A primeira vantagem de usar a notação científica é tornar mais fácil representar números muito grandes ou muito pequenos.

0,000000000000000000003435 $=3,435 \times 10^{-20}$

4766500000000000000000000 $=4,7665 \times 10^{+23}$

Números grandes e pequenos não vão faltar no estudo da física!

Avogadro's number	N_A	6.022142×10^{23} particles/mol
Boltzmann's constant	k	1.380650×10^{-23} J/K
Bohr magneton	$m_B = e\hbar$	$9.2740095 \times 10^{-24}$ J/T
Coulomb constant	$k = 1/4\pi\varepsilon_0$	$8.987551788 \times 10^{9}$ N·m²/C²
Compton wavelength	$\lambda_c = h/m_e c$	$2.42631024 \times 10^{-12}$ m
Fundamental charge	e	1.602176×10^{-19} C
Gas constant	$R = N_A k$	8.31447 J/mol·K = 1.987 22 cal/mol·K
		$= 8.20578 \times 10^{-2}$ L·atm/mol·K
Gravitational constant	G	6.6742×10^{-11} N·m²/kg²
Mass, of electron	m_e	9.109382×10^{-31} kg
		$= 510.9989$ keV/c^2
of proton	m_p	1.672622×10^{-27} kg

Notação Científica

Nomes e símbolos convencionais para algumas potências de dez.

Potências de Dez	Número	Símbolo
10^{-18}	0.000000000000000001	a (atto)
10^{-15}	0.000000000000001	f (femto)
10^{-12}	0.000000000001	p (pico)
10^{-9}	0.000000001	n (nano)
10^{-6}	0.000001	µ (micro)
10^{-3}	0.001	m (mili)
10^{-2}	0.01	c (centi)
10^{-1}	0.1	d (deci)
10^{0}	1	
10^{1}	10	da (deca)
10^{2}	100	h (hecto)
10^{3}	1000	k (quilo)
10^{6}	1000000	M (mega)
10^{9}	1000000000	G (giga)
10^{12}	1000000000000	T (tera)
10^{15}	1000000000000000	P (peta)
10^{18}	1000000000000000000	E (exa)

1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m

1 kg = 1000 g = 10^{3} g

1 nm =
= 0,000000001 m
= 10^{-9} m

Vai ser importante também saber manipular números em notação científica.

$$\sqrt{\frac{(4\times 10^5)\times(1.5\times 10^{15})}{3\times 10^8}} = \left(\frac{4\times 1{,}5}{3}\times\frac{10^5\times 10^{15}}{10^8}\right)^{1/2}$$

$$= \left(2\times 10^{5+15-8}\right)^{1/2} = \left(2\times 10^{12}\right)^{1/2} = 2^{1/2}\times\left(10^{12}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\times 10^6 \simeq 1{,}41\times 10^6$$

$$\sqrt{\frac{(4\times 10^5)\times(1.5\times 10^{15})}{3\times 10^7}} = \left(2\times 10^{13}\right)^{1/2}$$

$$= \left(20\times 10^{12}\right)^{1/2} = 20^{1/2}\times\left(10^{12}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{20}\times 10^6 \simeq 4{,}47\times 10^6$$

Notação Científica

Para aprender mais...

- Apêndice B do livro-texto (Serway, Princípios da Física 1) contêm uma seção sobre Notação Científica, incluindo alguns exercícios.
- Vídeos: como este assunto é parte do conteúdo do ensino médio e de vestibulares, você encontrará dezenas de vídeos no Youtube explicando notação científica, erros comuns, exemplos adicionais, etc...
- Existe um vídeo clássico chamado "Powers of Ten" que mostra as diferentes escalas de comprimento estudadas pela ciência moderna.

PARTE 1:
O QUE SIGNIFICA MEDIR?

Unidades e Dimensões

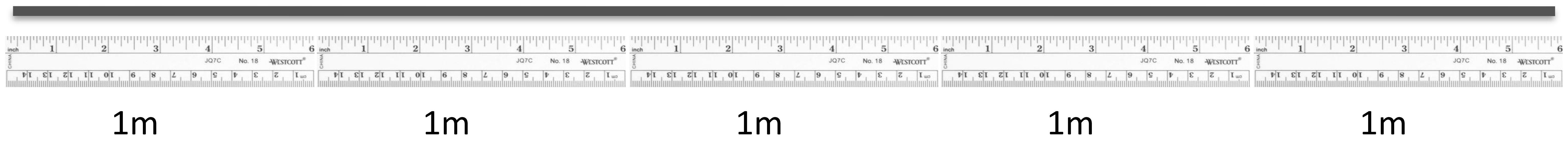
- Algumas quantidades podem ser representadas diretamente por um **número**.
- Por exemplo: o número de moléculas de gás num compartimento.
- Tais grandezas são ditas **adimensionais** ou **sem dimensão**.
- Geralmente, são grandezas relacionadas a uma contagem, ou são obtidas pela *razão* entre grandezas dimensionais.
- Não são em geral as quantidades em que estaremos interessados para estudar física!

Unidades e Dimensões

- A maioria das grandezas de interesse não é bem especificada por um número apenas!
- Por exemplo: não faz sentido dizer que um fio mede 5.
- Faz sentido dizer que um fio mede 5m, ou 5 jardas. Mas o que isso significa?

Unidades e Dimensões

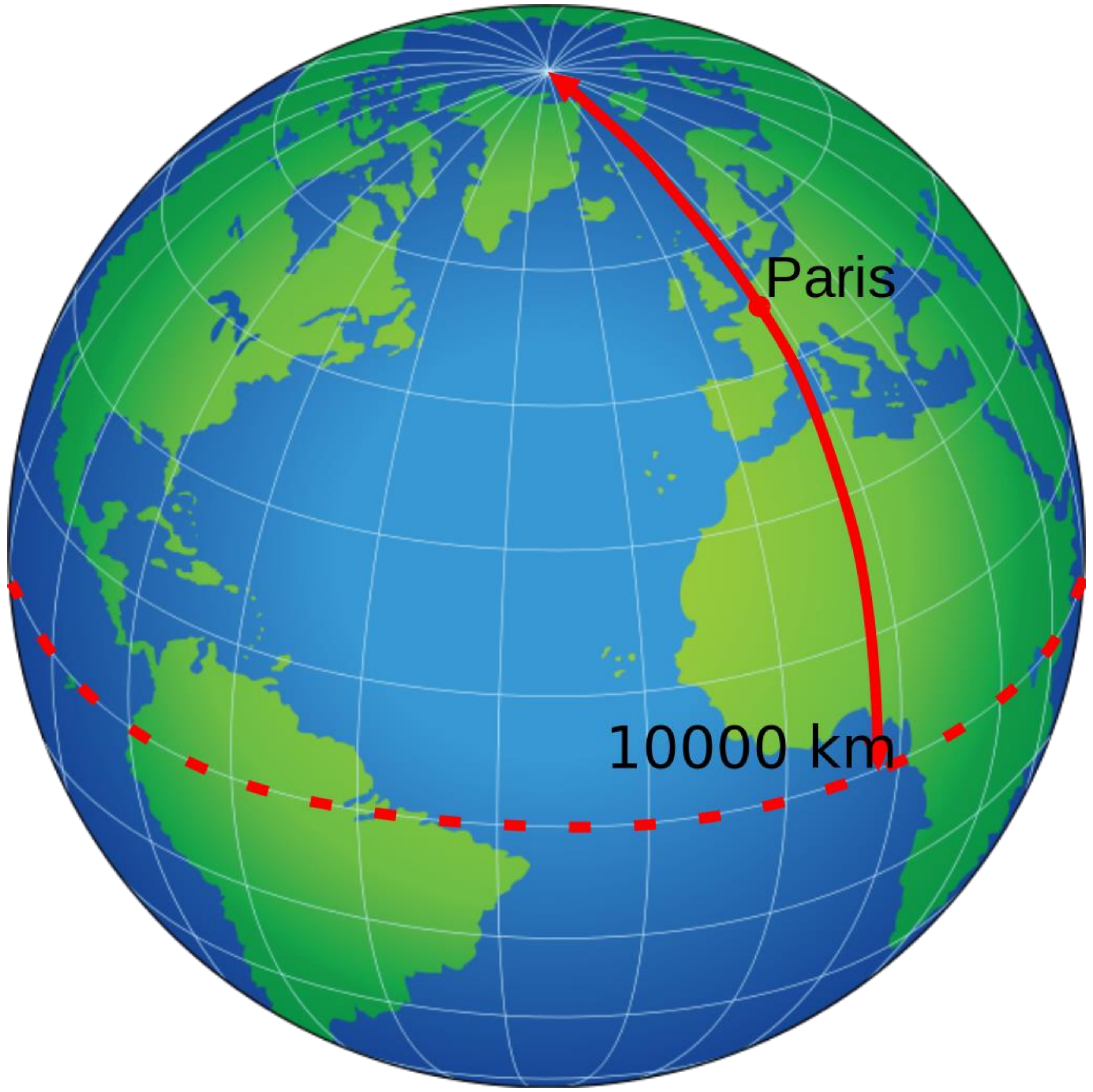
- Dizer que o fio vale 5m significa que este fio é **cinco vezes mais longo** do que um comprimento padronizado, que chamamos de “1 metro”.



- **MEDIR** um comprimento significa **comparar** uma propriedade (a dimensão linear, o tamanho) com a de outro objeto, considerado como um **padrão** (ou unidade).
- Quando isso acontece, dizemos que essa grandeza é **dimensional**. No caso, falamos de **dimensão de comprimento**.
- Mas qual é o tamanho de uma régua de 1m?
- **ISSO É UMA CONVENÇÃO.**

Unidades e Dimensões

- A medida de comprimento **pé**, até hoje usada nos EUA, foi definida pelo tamanho do pé de um certo rei da Inglaterra.
- Uma **polegada** foi definida como sendo 1/12 do pé.



- O **metro** foi originalmente definido, em 1795, como 1/10.000.000 da distância entre o pólo norte e o equador, medido no meridiano que passa por Paris.

Unidades e Dimensões

- Entre 1799 e 1960, barras metálicas (de platina, e posteriormente irídio-platina) foram utilizadas como padrão para o metro.

- Em 1960, passou-se a utilizar o comprimento de onda de uma transição atômica do Kriptônio como referência para o metro.
- Esse tipo de definição tem a vantagem de não depender de um objeto físico particular, que pode, por exemplo, ser destruído por uma catástrofe! Mais que isso, ela proporciona maior **estabilidade** e **precisão** para a definição do metro.

- Em 1983, adotou-se o padrão atual: o metro é definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 segundos.

Unidades e Dimensões

- **COMPRIMENTO** é uma grandeza **dimensional**, que quantifica o "tamanho" de um objeto numa dada direção linear.
- É uma grandeza que precisa ser expressa em termos de uma **unidade**. Todo comprimento é expresso através da comparação com um objeto padrão, considerado como "unidade de comprimento".
- Um número que expressa um comprimento é dito possuir **dimensão de comprimento** — independente da unidade escolhida.

- Outra grandeza fundamental que queremos medir é o **TEMPO**.
- O que é o tempo?

"se ninguém me perguntar, eu sei; se o quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei"

Agostinho de Hipona (Santo Agostinho) 300BC

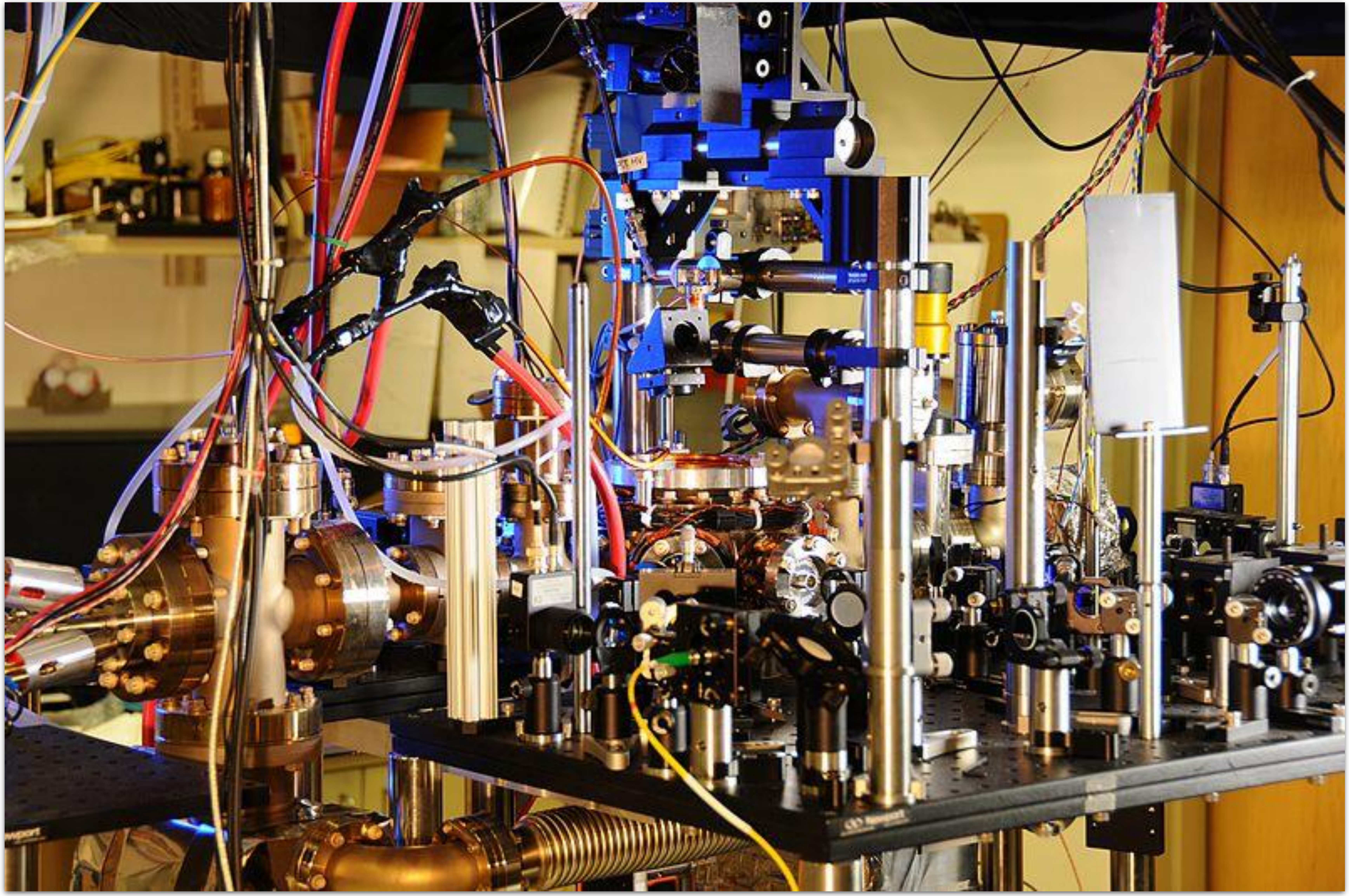
- Na prática, a passagem do tempo é medida através de algum sistema periódico (um relógio).
- Exemplos primitivos: um pêndulo, a pulsação cardíaca, o ciclo dia-e-noite.

Unidades e Dimensões

- O **segundo** foi inicialmente definido como 1/86.400 de um dia solar. Contudo, a velocidade de rotação da Terra varia lentamente, então esta não é uma definição estável para o segundo.

- Atualmente, o segundo é definido a partir das propriedades atômicas do átomo de Césio-133. Esta definição é conveniente pois sabemos que os átomos de Césio se comportam da mesma forma, independente da rotação da Terra ou de outros fatores.
- Com base nessa idéia, relógios atômicos de precisão extraordinária podem ser construídos, permitindo medir a passagem do tempo com grande precisão.

Unidades e Dimensões



Relógio atômico baseado em Itérbio (Yb), nos EUA: este relógio é tão preciso que espera-se um atraso de cerca de 1s ao longo de toda a idade do universo (+ de 10 bilhões de anos!).

- Outra grandeza fundamental é a **MASSA**.
- A massa está ligada à inércia de um corpo. A definição precisa do que é massa será vista no curso de Fenômenos Mecânicos.
- Nunca é demais relembrar: **MASSA** não é o mesmo que **PESO**.

- Até 2019, o padrão internacional de massa era um cilindro de liga platina-irídio, guardada num centro de metrologia em Sèvres, na França.

Unidades e Dimensões

- Em 20 de maio de 2019, o padrão internacional do quilograma foi alterado.
- A definição atual do quilograma é baseada no valor de uma constante universal da física, a constante de Planck, que pode ser medida com muita precisão.
- Um quilograma é definido como: a massa tal que a constante de Planck vale exatamente $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ kg\ m^2 / s$.
- De novo, pode não parecer uma definição muito prática, mas assim como as definições correntes para o metro e o segundo, ela pode ser aferida com muita precisão através de experimentos adequados, e independe da existência e estabilidade de um sistema físico específico.

Unidades e Dimensões

- **Comprimento**, **tempo** e **massa** são dimensões básicas.
- Outras grandezas, também dimensionais, podem ser consideradas derivadas.
- Por exemplo:
  - **velocidade** é definida como uma razão entre comprimento e tempo
  - **aceleração** é definida como uma razão entre velocidade e tempo
  - **força** é definida como um produto entre massa e aceleração
  - ...

Unidades e Dimensões

Em 1975, um acordo internacional instituiu o **SI – Sistema Internacional** de Unidades, que define grandezas e unidades básicas. Todas as demais grandezas usadas na ciência são derivadas destas grandezas básicas.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol[8]
Intensidade luminosa	candela	cd

PARTE 2: ANÁLISE DIMENSIONAL, TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES

Unidades e Dimensões

- **Por que saber de tudo isso?**
- Uma grandeza física **dimensional** só está bem definida quando indicamos a unidade utilizada. Assim, se você resolveu um problema, e encontrou como resposta uma velocidade $v = 10$, sua resposta não faz sentido!
- Só faz sentido comparar grandezas de mesma dimensão (mesmo que estejam expressas em unidades diferentes). Faz sentido se perguntar se uma jarda é maior do que um metro, mas não faz sentido se perguntar se um segundo é menor que um quilograma.
- Todos os termos numa dada equação devem necessariamente possuir a mesma dimensão.

Unidades e Dimensões

- **Análise Dimensional:** todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.
- Por exemplo: encontre a fórmula do período do pêndulo, em termos do seu comprimento e da aceleração da gravidade *g*.

$$[\tau] = \text{tempo} = T$$

$$[\ell] = L$$

$$[g] = \frac{L}{T^2}$$

$$\boxed{\tau = 2\pi \sqrt{\ell/g}}$$

$$\tau \sim \sqrt{\frac{1}{g} \times \ell}$$

$$T = \sqrt{\frac{T^2}{\cancel{L}} \times \cancel{L}} = T$$

Unidades e Dimensões

- **Análise Dimensional**
- Outro exemplo: digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:
- Isso está correto?

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + \cancel{2(\Delta x)^2}$$

$$x,\ \cancel{t},\ \cancel{v},\ a$$

$$\frac{L^2}{T^2} = \frac{L^2}{T^2} + \cancel{L^2}$$

$$\cancel{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2} \longrightarrow \frac{L^2}{T^2}$$

$$a\,\Delta x \longrightarrow \frac{L}{T^2} \times L = \frac{L^2}{T^2}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$$

- **Conversão de Unidades:** podemos converter livremente uma grandeza de uma unidade para outra, desde que mantendo sempre a consistência dimensional.

- Por exemplo: uma régua de **1 jarda** tem o mesmo tamanho que uma régua de **0,9144 metros**.

$$1\ jarda = 0{,}9144\ m$$

- Consequentemente, podemos escrever:

$$\frac{1\ jarda}{0{,}9144\ m} = 1 \qquad \frac{0{,}9144\ m}{1\ jarda} = 1$$

$$\frac{1\ jarda}{0{,}9144\ m} = 1 \qquad \frac{0{,}9144\ m}{1\ jarda} = 1$$

$$15jardas = 15jardas \times \frac{0{,}9144m}{1jarda} = 15 \times 0{,}9144m = 13{,}71m$$

$$20m = 20m \times \frac{1jarda}{0{,}9144m} = \frac{20}{0{,}9144}jardas = 21{,}87jardas$$

- Note: **15 jardas** e **13,71 m** representam o **mesmo comprimento**, em **unidades diferentes**.

- Outro exemplo: Um arenque é um peixe abundante no Atlântico Norte. Um cran é uma unidade de volume britânica para arenques frescos: 1 cran = 170,474 litros de arenque (cerca de 750 arenques).

- Suponha que na Arábia Saudita, usa-se uma medida chamada côvados: 1 côvados = 48,26 cm.
- Suponha que você queira vender 1255 crans de arenques na Arábia.
- Quantos côvados cúbicos você deverá declarar à “Receita Federal” Árabe?

$$\frac{170{,}474L}{1cran} = 1$$

$$\frac{1.000cm^3}{1L} = 1$$

$$\frac{1côvado}{48{,}26cm} = 1$$

$$1255crans = 1255crans \times \left(\frac{170{,}474L}{1cran}\right) \times \left(\frac{1.000cm^3}{1L}\right) \times \left(\frac{1côvado}{48{,}26cm}\right)^3$$

$$= 1255 \times 170{,}474 \times 1.000 \times \left(\frac{1}{48{,}26}\right)^3 côvados^3 = 1{,}903 \times 10^3 côvados^3$$

Para aprender mais...

- Seções 1.1 até 1.4 do livro-texto (Serway, Princípios da Física 1).
- A redefinição do quilograma em 2019 motivou muitas notícias que você pode encontrar pela internet. Também muitos vídeos interessantes podem ser encontrados, como https://www.youtube.com/watch?v=m-fFRLWBzm8 (em inglês).
- No artigo: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0284, publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física, a nova definição do quilograma é discutida de forma didática.
- Também na mesma revista, o artigo http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0003 discute análise dimensional em detalhe.

TÓPICO 4 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

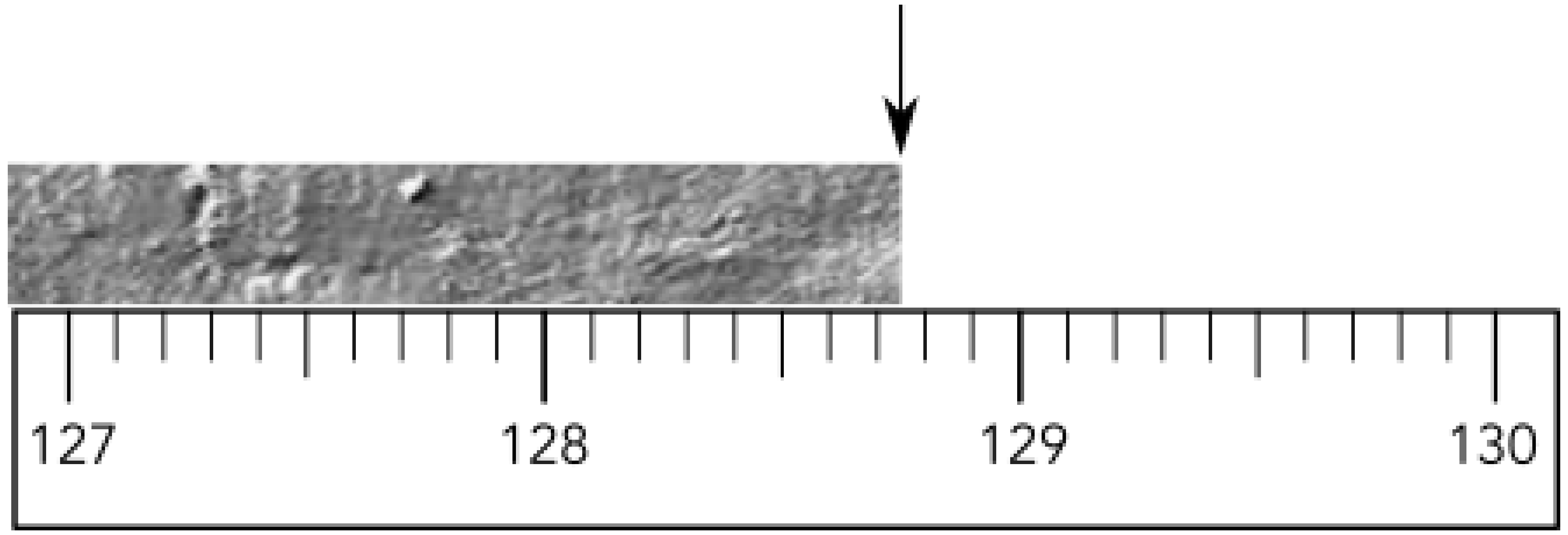
Medidas e Incertezas

- O resultado de uma medida deve conter as seguintes informações:
  - o valor da grandeza
  - a incerteza da medição
  - a unidade (caso pertinente)

- Vamos ver agora como podemos estimar a incerteza de uma das medidas mais simples que podemos fazer: medir o comprimento de um objeto usando uma régua.
- Esse exemplo, além de útil na prática do laboratório, vai nos motivar à definição de **algarismos significativos**, que é o tópico principal que queremos discutir.

Algarismos Significativos

Veja o seguinte exemplo:



A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

Valor medido: $$x_{\text{medio}} \pm \delta x$$

Qual a incerteza?

0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.

L = 128,75 ± 0,05 cm

δx = metade da menor graduação do instrumento

O mesmo vale para: medida de ângulos usando um transferidor, temperatura usando um termômetro de mercúrio, etc…

Algarismos Significativos

- Em casos mais complicados, tanto a medida quanto a incerteza podem resultar em números “quebrados”, aí temos que arredondar de uma forma consistente.

- Note que não faz sentido escrever, por exemplo:

$$g = 9{,}82435 \pm 0{,}03 m/s^2$$

- Por outro lado, δx será sempre uma *estimativa* da incerteza, também não fará sentido expressá-lo com muita precisão.

  Por exemplo:

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}034594 m/s^2$$

- O arredondamento tanto da incerteza quanto da medida deve ser consistente:

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}03 m/s^2$$

Algarismos Significativos

- São os algarismos sobre os quais temos algum conhecimento de uma dada grandeza, *excluindo eventuais zeros à esquerda*, usados para acertos de unidades, *e potências de dez.*
- *Atenção: zeros à direita contam como algarismos significativos!*
- Quem vai determinar o número de algarismos significativos da grandeza medida será a sua *incerteza* estimada.

MEDIDA (mm)	A. SIGNIFICATIVOS
57,896	5
$5,79 \times 10^4$	3
$5,789600 \times 10^4$	7
$0,007 \times 10^4$	1

Medidas e Incertezas

Regras práticas para apresentação de resultados:

- Durante os cálculos intermediários, tanto da grandeza de interesse quando da sua incerteza, utilize *todos* (ou pelo menos um número apreciável) dos algarismos que a calculadora apresenta.
- *Os arredondamentos serão sempre a última etapa.*
- Após calcular a incerteza, arredonde para apenas UM algarismo significativo.
- Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
- A notação científica pode ser usada para se evitar ambiguidades. Neste caso, deve-se usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza quanto para sua incerteza.

Medidas e Incertezas

Regra para arredondamentos:

- Existe uma regra oficial de arredondamento dada pela [ABNT NBR 5891](). Vamos adotar uma versão simplificada dessa regra.

$,37\boxed{4}88 \rightarrow ,37\boxed{5}$	$,37\boxed{4}500 \rightarrow ,37\boxed{4}$
$,37\boxed{4}38 \rightarrow ,37\boxed{4}$	$,37\boxed{5}500 \rightarrow ,37\boxed{6}$

- Se o próximo digito for 6,7,8,9 - arredondar para cima.
- Se o próximo dígito for 0,1,2,3,4 - arredondar para baixo.
- Se o próximo digito for 5 — arredondar para cima se o último digito a considerar for ímpar, ou para baixo, se for par.

Medidas e Incertezas

Exemplos:

NOTAÇÃO ERRADA	NOTAÇÃO CORRETA
5,30 ± 0,0572	5,30 ± 0,06
0,00002002 ± 0,0000005	$(200 \pm 5) \times 10^{-7}$
$(45 \pm 2,6) \times 10^{-3}$	$(45 \pm 3) \times 10^{-3}$

Medidas e Incertezas

Exemplo 1:

Valor calculado: 56,745737703 m/s

Incerteza calculada: 0,0034593 m/s

Incerteza arredondada: 0,003 m/s

Valor arredondado: 56,746 m/s

Resultado da medida:
$56{,}746 \pm 0{,}003$ m/s

Exemplo 2:

Valor calculado: 0,0056745737703 m/s

Incerteza calculada: 0,000037593 m/s

5,6745737703 mm/s

0,037593 mm/s

Incerteza arredondada: 0,04 mm/s

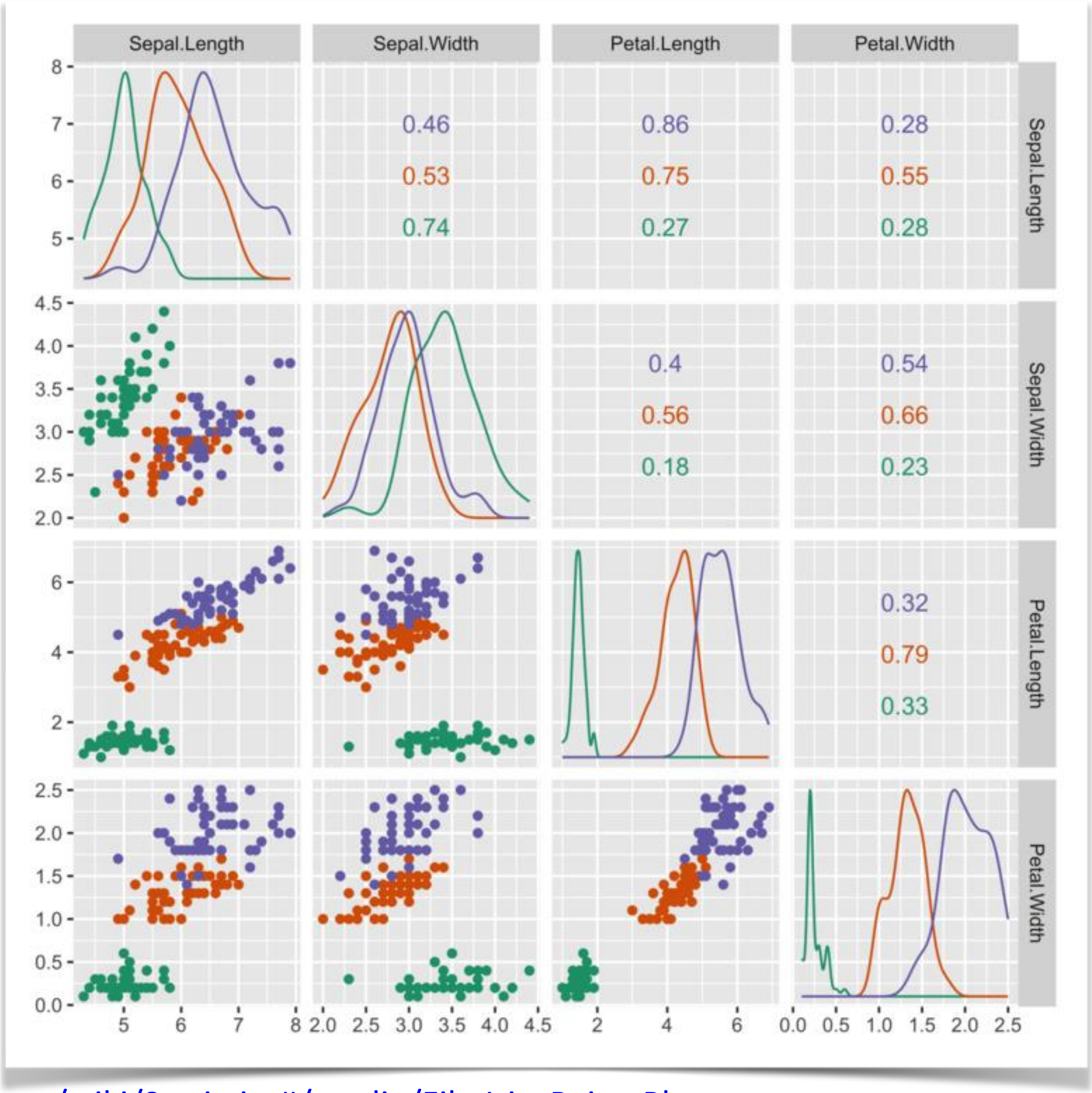
Valor arredondado: 5,67 mm/s

Resultado da medida:
$5{,}67 \pm 0{,}03$ mm/s

$0{,}00567 \pm 0{,}0003$ m/s

$(5{,}67 \pm 0{,}03) \times 10^{-3}$ m/s

TÓPICO 5 - AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DA INCERTEZA



https://en.wikipedia.org/wiki/Statistics#/media/File:Iris_Pairs_Plot.png

Avaliação estatística de erros

Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza, devemos fazer uma análise estatística. Uma vantagem é que erros aleatórios tendem a se cancelar quando fazemos médias de varias observações.

Exemplo:

Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2{,}00 \pm 0{,}05\ m$, medido com o cronômetro de um telefone celular.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Avaliação estatística de erros

Definições

Valor Médio:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvio padrão **da média:**

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

Estimativa para o valor/incerteza da grandeza medida:

$$\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}$$

Medidas e Incertezas

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Valor médio:

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = 0{,}627s$$

Incerteza da média:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2} = 0{,}010651s$$

Apresentação do Resultado:

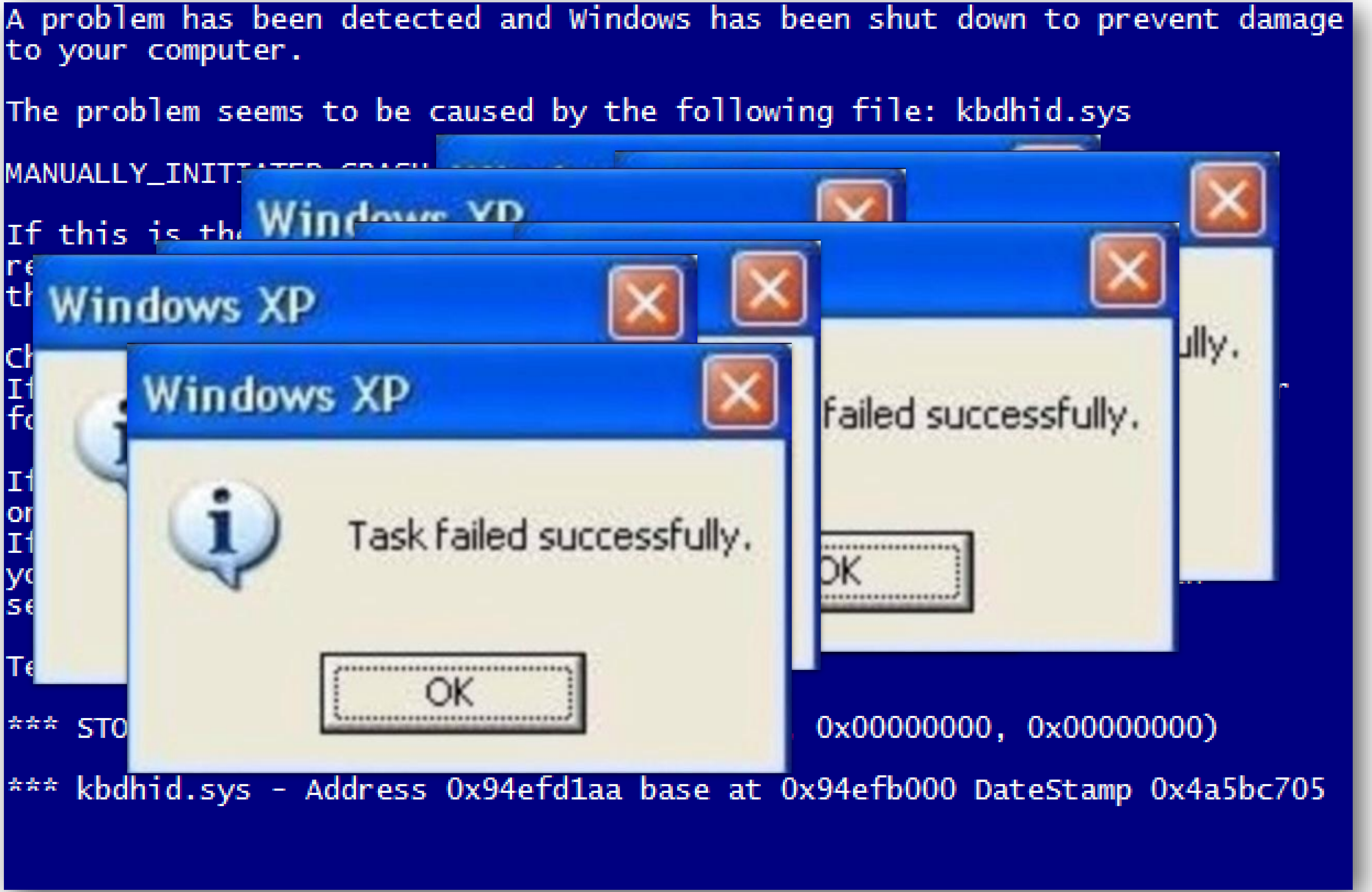
$$\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = (0{,}63 \pm 0{,}01)s$$

Medidas e Incertezas

Para aprender mais...

- Laboratório de mecânica : subsídios para o ensino de Física experimental, Lima Júnior et al, IF-UFRGS. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/90438
- Métodos estatísticos são discutidos na disciplina obrigatória do BCT **Introdução à Probabilidade e Estatística**.
- Vídeos da Khan Academy Brasil sobre probabilidade e estatística: vídeos 10 a 13.

TÓPICO 6 - PROPAGAÇÃO DE ERROS



Propagação de Erros

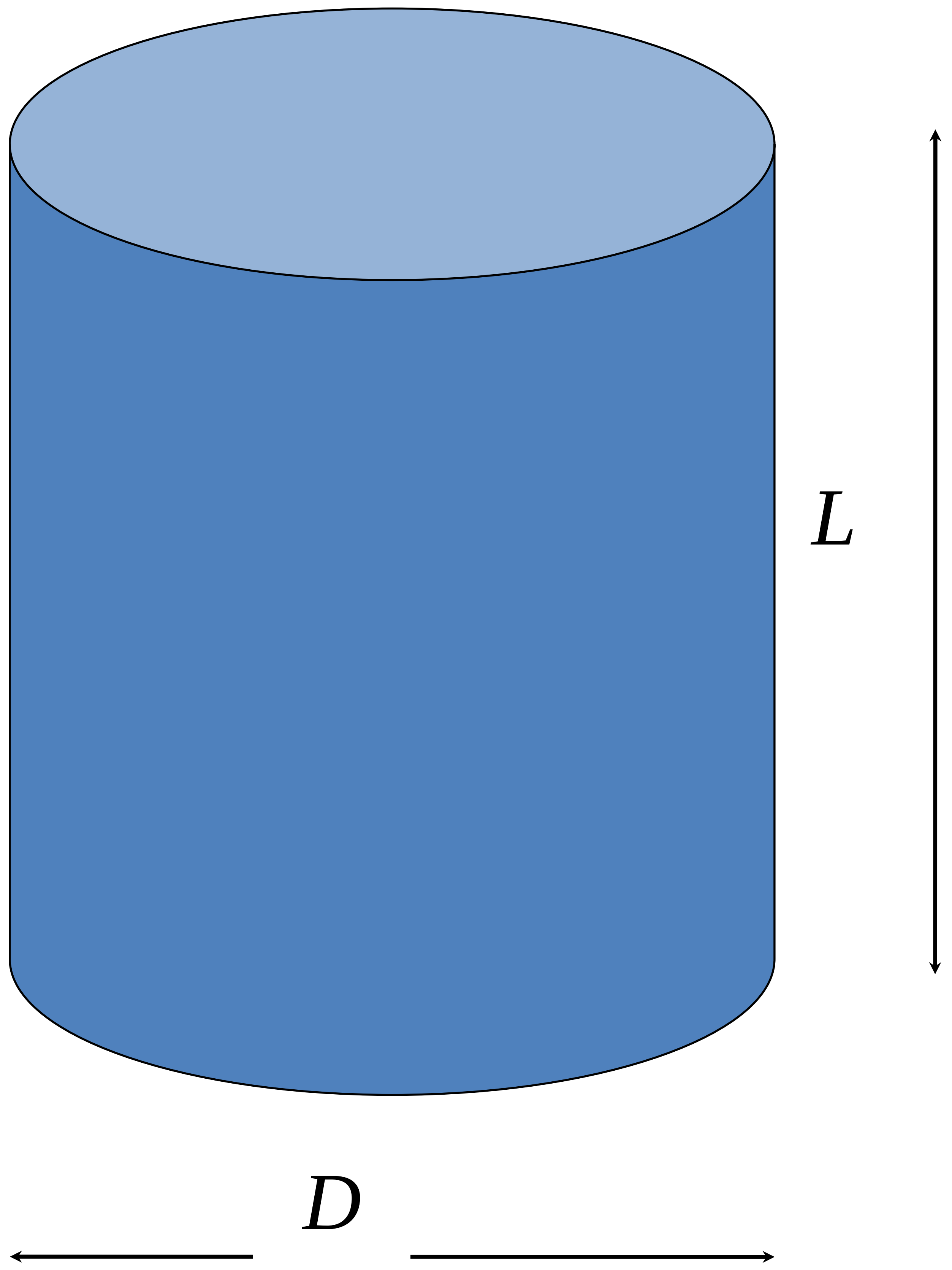
- Você mede o diâmetro e a altura de um cilindro, usando uma régua, fita métrica etc…
- Essas medidas estão associadas a uma incerteza, devida às limitações do instrumento de medida.

$$D = \overline{D} \pm \sigma_D, \qquad L = \overline{L} \pm \sigma_L$$

- A partir de *D* e *L*, podemos calcular o volume do cilindro através de uma fórmula:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

- O valor de *V* também terá uma incerteza. Como calcular?



Propagação de Erros

- Suponha: $D = 5{,}00 \pm 0{,}05cm L = 12{,}50 \pm 0{,}05cm$

- Valor médio: $V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5{,}00)^2}{4}(12{,}50)cm^3 \approx 245{,}437cm^3$

- Como calcular a incerteza de *V*?
- Uma maneira simples: calcular o valor máximo e mínimo possível para *V*.

$$V_{max} = \pi \frac{(5{,}05)^2}{4}(12{,}55)cm^3 \approx 251{,}372cm^3 \qquad V_{min} = \pi \frac{(4{,}95)^2}{4}(12{,}45)cm^3 \approx 239{,}591c$$

$$\delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} \approx 5{,}89058cm^3 \approx 6cm^3$$

Propagação de Erros

- Suponha: $D = 5{,}00 \pm 0{,}05cm L = 12{,}50 \pm 0{,}05cm$

- Valor médio: $V = 245{,}437cm^3 = 245cm^3$

- Incerteza: $\delta V = 6cm^3$

- Resultado final: $$V = (245 \pm 6)cm^3$$

- Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza do volume devida à incerteza das medidas do diâmetro e da altura. Mas dá para fazer melhor!

Propagação de Erros

- Relação entre a grandeza medida experimentalmente (variável independente) e a grandeza final desejada (variável dependente): uma função!

$$y = y(x)$$

- Variação *dx* na variável independente causa variação *dy* na variável dependente

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Propagação de Erros

- Em geral, temos uma função de várias variáveis (várias grandezas independentes):

$$F = F(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

- Variação da grandeza dependente em função da variação das independentes: **derivadas parciais**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots$$

- Para evitar cancelamentos entre diferentes termos:

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 (dx_2)^2 + \cdots}$$

Propagação de Erros

- Fórmula geral para a propagação de erros para uma função

$$F = F(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

$$\boxed{\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 (dx_2)^2 + \cdots}}$$

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = x^m potência simples	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
w = ax multiplicação por constante	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax + b	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = $ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x$ $b\sigma_x$ em radianos

Propagação de Erros

- Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2}$$

$$= \overline{V} \sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$= 245 \sqrt{4\left(\frac{0{,}05}{5{,}00}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{12{,}5}\right)^2}$$

$$= 5cm^3$$

- Resultado final:

$$V = (245 \pm 5)cm^3$$

Exercício

- Determine a aceleração gravitacional g considerando o exemplo do experimento de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de *h = 2,00 ± 0,05 m,* foi medido com o cronômetro do um telefone celular.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

$$t = t_m \pm \sigma_m = (0{,}63 \pm 0{,}01)\ s$$

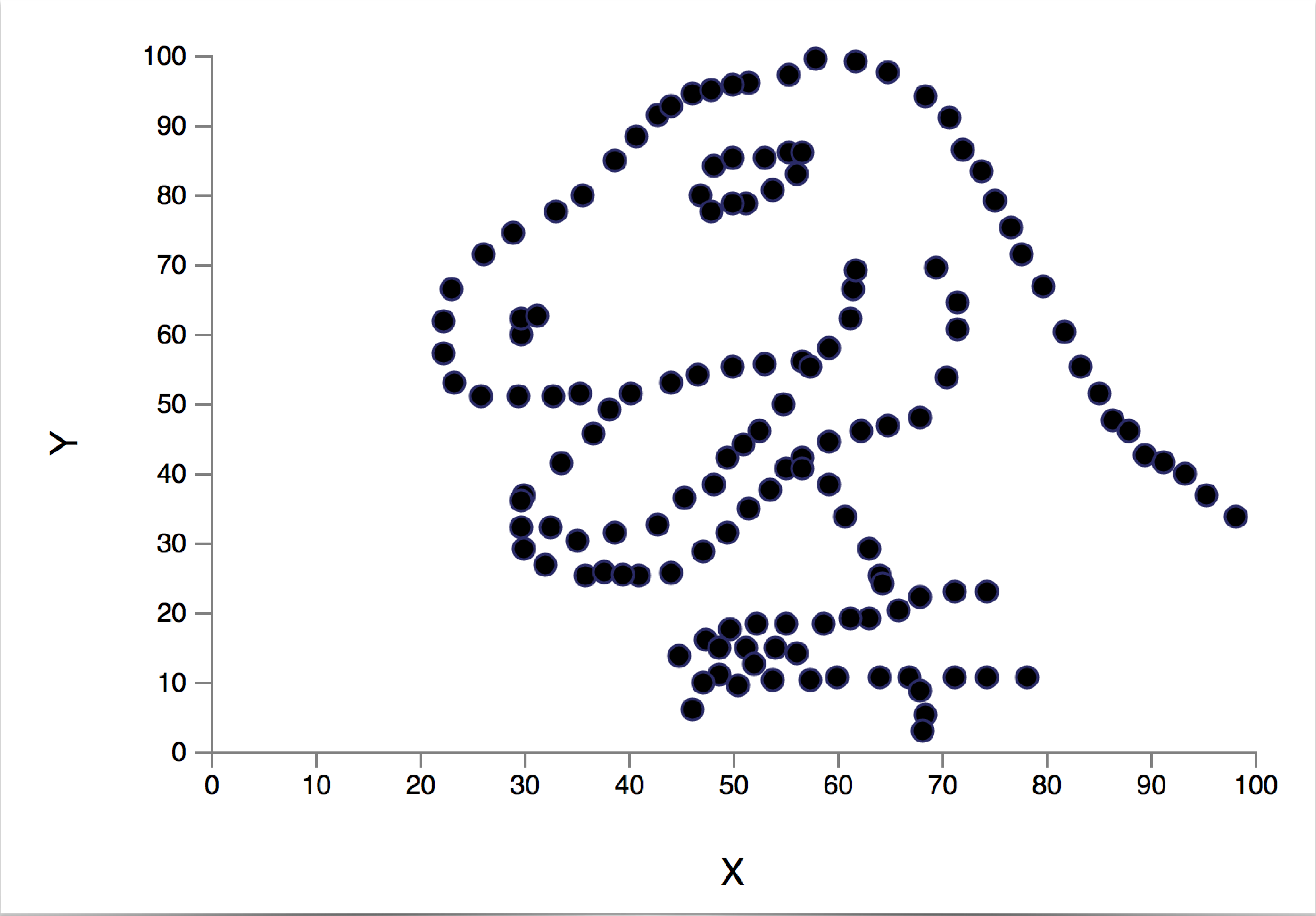
$$\bar{g} = 2\frac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10.0781 m/s^2$$

$$g = 2\frac{h}{t^2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} = 0.407237 m/s^2$$

$$g = (10{,}1 \pm 0{,}4) m/s^2$$

TÓPICO 7 - GRÁFICOS - CONCEITOS BÁSICOS



CUIDADO COM
O GRAFOSSAURO!

http://nerd.bradyleavitt.com/2017/08/08/why-you-should-always-visualize-your-data/

Gráficos - Conceitos Básicos

- O que todo gráfico precisa apresentar?
  - Título ou Legenda (o que é este gráficos?)
  - Eixos com nomes das variáveis, escalas, e unidades (quais as grandezas e unidades escolhidas para os eixos?)
  - Dados experimentais (com incertezas!)
  - Função teórica, curvas médias, modelo ajustado (opcional)

Gráficos - Conceitos Básicos

- Todo gráfico deve ter um título, pelo qual é referido no texto. Geralmente, o título do gráfico é colocado na parte superior do gráfico, em destaque.
- Caso o gráfico seja inserido dentro de um texto, o mesmo deve ser acompanhado de uma legenda, logo abaixo do gráfico, numerada, que explique de forma sucinta o seu conteúdo.
- No caso da presença de uma legenda, o título do gráfico torna-se OPCIONAL, já que a legenda acaba suprindo o leitor de informação suficiente para o entendimento do gráfico.
- A legenda deve conter uma descrição sucinta do que é apresentado no gráfico. Note que uma legenda tipo “velocidade vs tempo” é redundante pois esta informação já está contida nos rótulos dos eixos.

Gráficos - Conceitos Básicos

- Cada um dos eixos deve conter o nome (ou símbolo) da variável representada, a escala de leitura e a unidade correspondente.
- Escolha uma escala conveniente para a qual o gráfico represente bem o intervalo medido para cada variável.
- A regra prática para esta definição é dividir a faixa de variação de cada variável pelo número de divisões principais disponíveis. Toma-se então um arredondamento a valor superior e de fácil leitura. Estes valores de fácil leitura são: 1, 2 ou 5 unidades ou qualquer múltiplo ou submúltiplo de 10 delas.
- As escalas dos eixos não precisam começar na origem (zero, zero). Elas devem abranger a faixa de variação que você quer representar. É conveniente que os limites da escala correspondam a um número inteiro de divisões principais.

Gráficos - Conceitos Básicos

- Indique os valores correspondentes às divisões principais abaixo do eixo x e à esquerda do eixo y usando números grandes.
- As unidades devem ser escolhidas de maneira a minimizar o número de dígitos nos valores que indicam o valor da divisão principal. Uma regra prática é tentar usar no máximo três dígitos nestes valores, fazendo uso de potências de 10 na expressão das unidades para completar a informação.
- Ao traçar os eixos no papel milimetrado, não use a escala marcada no papel pelo fabricante. É você quem define a sua escala, baseando-se nos seus dados. Também não use os eixos nas margens do papel. Desenhe os seus próprios, porque você precisará de espaço para a identificação das variáveis e para a legenda.
- Por fim, abaixo ou à esquerda dos números da escala, conforme o caso, escreva o nome (ou símbolo) da variável correspondente e a unidade para leitura entre parênteses (km, 105 N/cm, etc.).

Gráficos - Conceitos Básicos

- Assinale no gráfico a posição dos pontos experimentais: USE MARCAS BEM VISÍVEIS (em geral, círculos cheios).
- NUNCA indique as coordenadas dos pontos graficados no eixo.
- Coloque barras de erros nos pontos, se for o caso. Se os erros são menores que o tamanho dos pontos, indique isso na legenda.
- Às vezes, ajuda a visualização traçar a melhor curva média dos pontos, ignorando alguns pontos que fogem demasiadamente do comportamento médio.
- Em outras palavras, pode-se dizer que a curva média deve ser traçada de maneira a minimizar os deslocamentos da curva em relação aos pontos experimentais ao longo do traçado.
- NUNCA LIGUE OS PONTOS EXPERIMENTAIS.

Gráficos - Conceitos Básicos

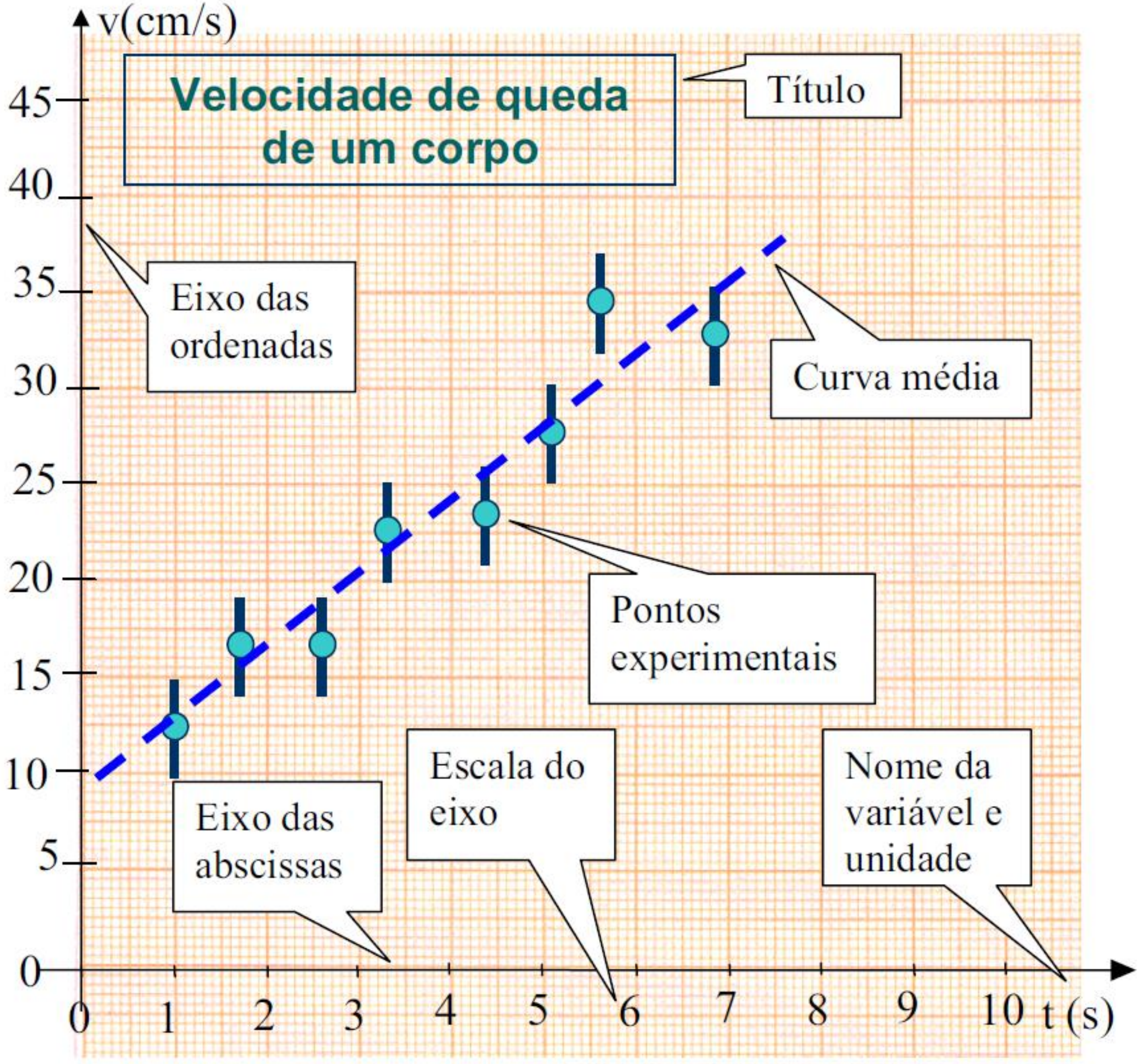
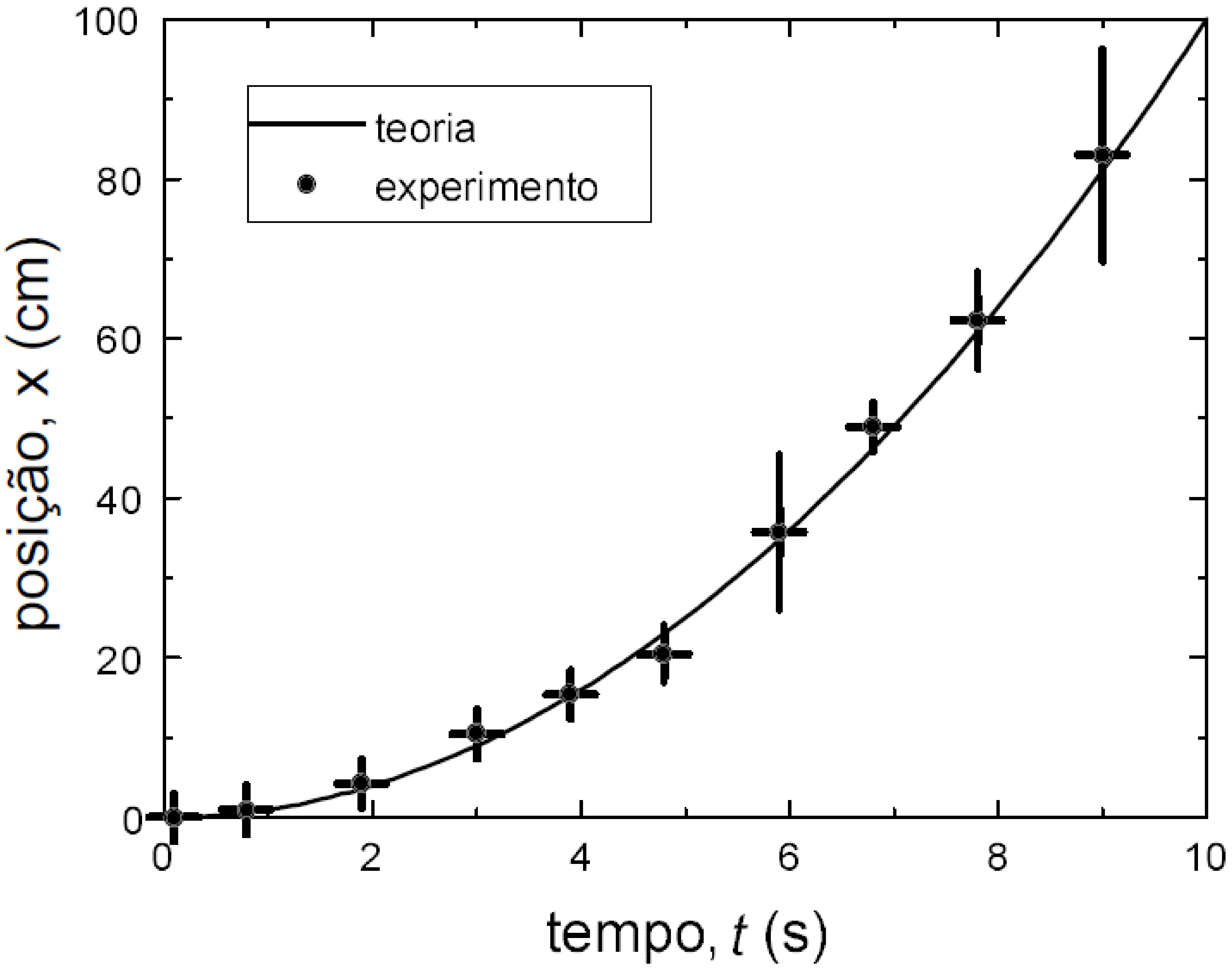


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Gráficos - Exemplos bem feitos



Gráficos - Exemplos bem feitos

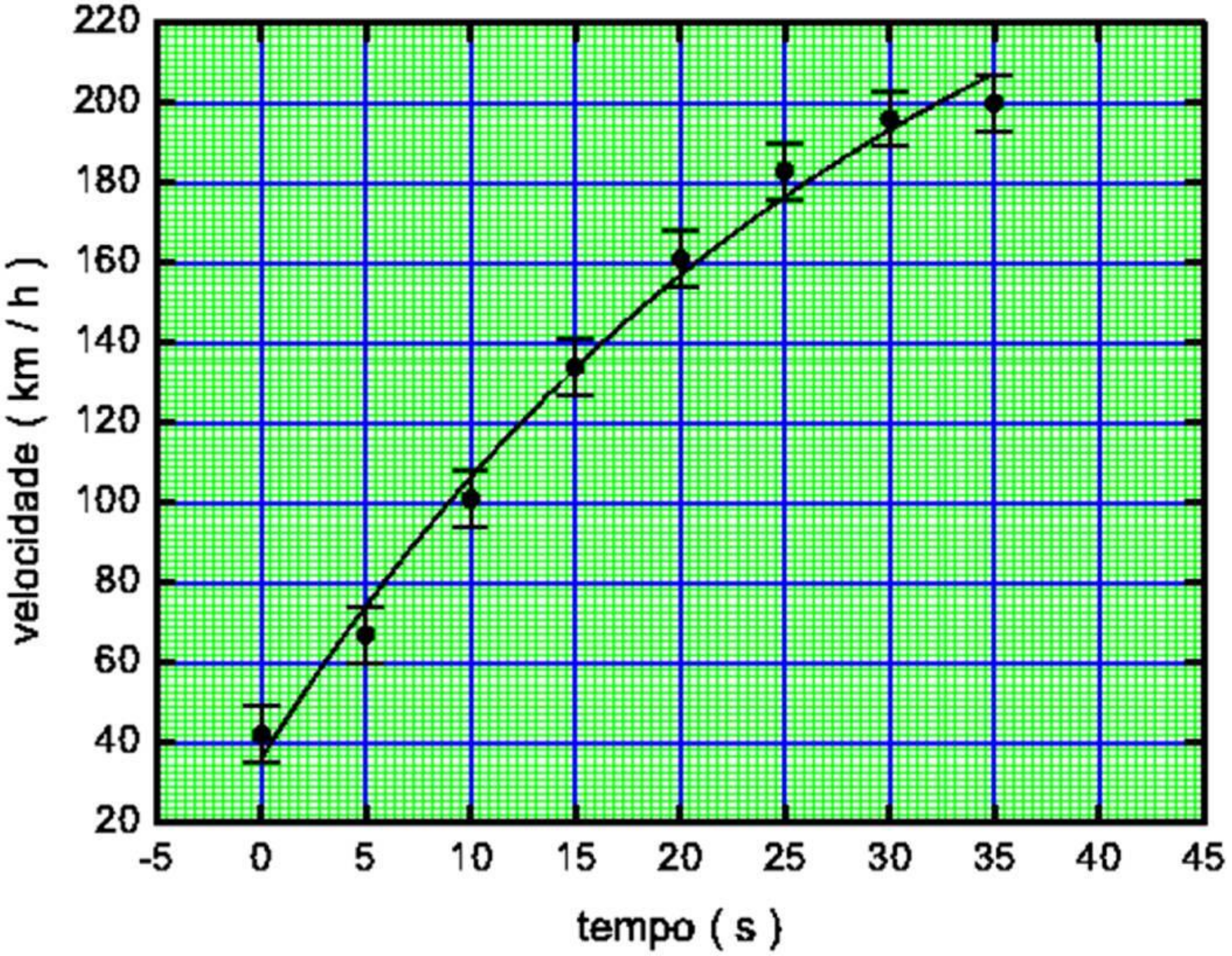
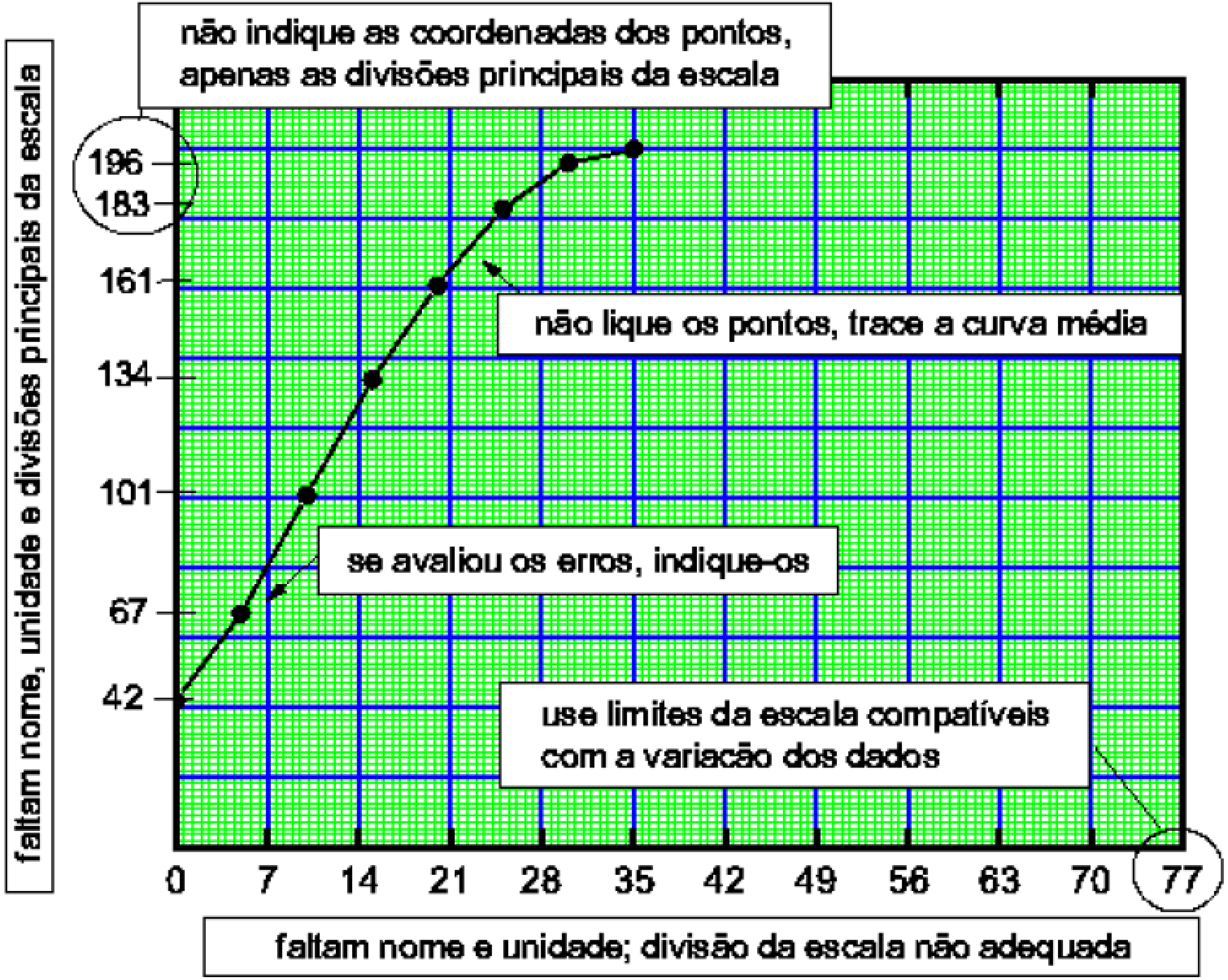
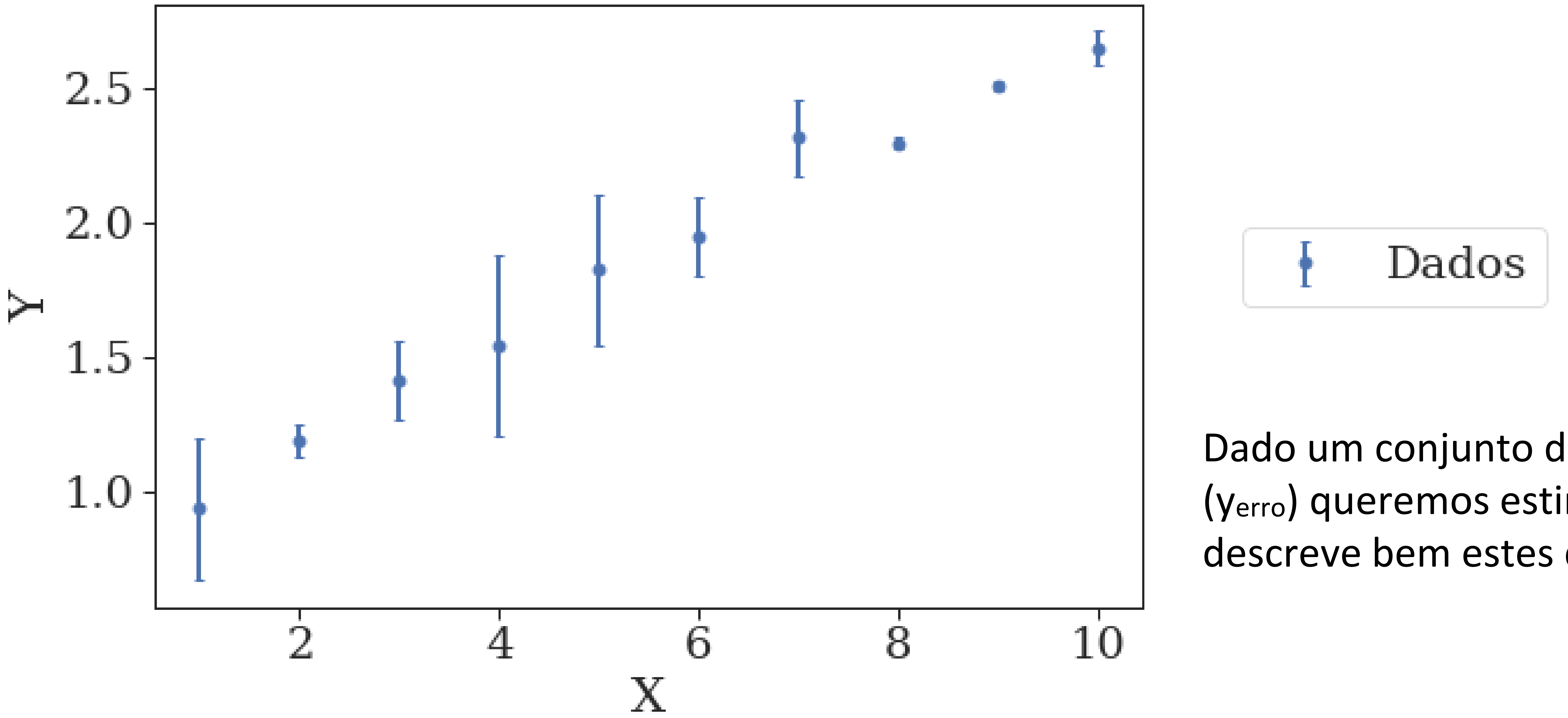


Figura 1: variação da velocidade em função do tempo de um corpo se deslocando em movimento variado

Gráficos - Exemplos com problemas



Método de mínimos quadrados



Dado um conjunto de medidas (x,y) e seus erros (y_{erro}) queremos estimar qual modelo teórico descreve bem estes dados.

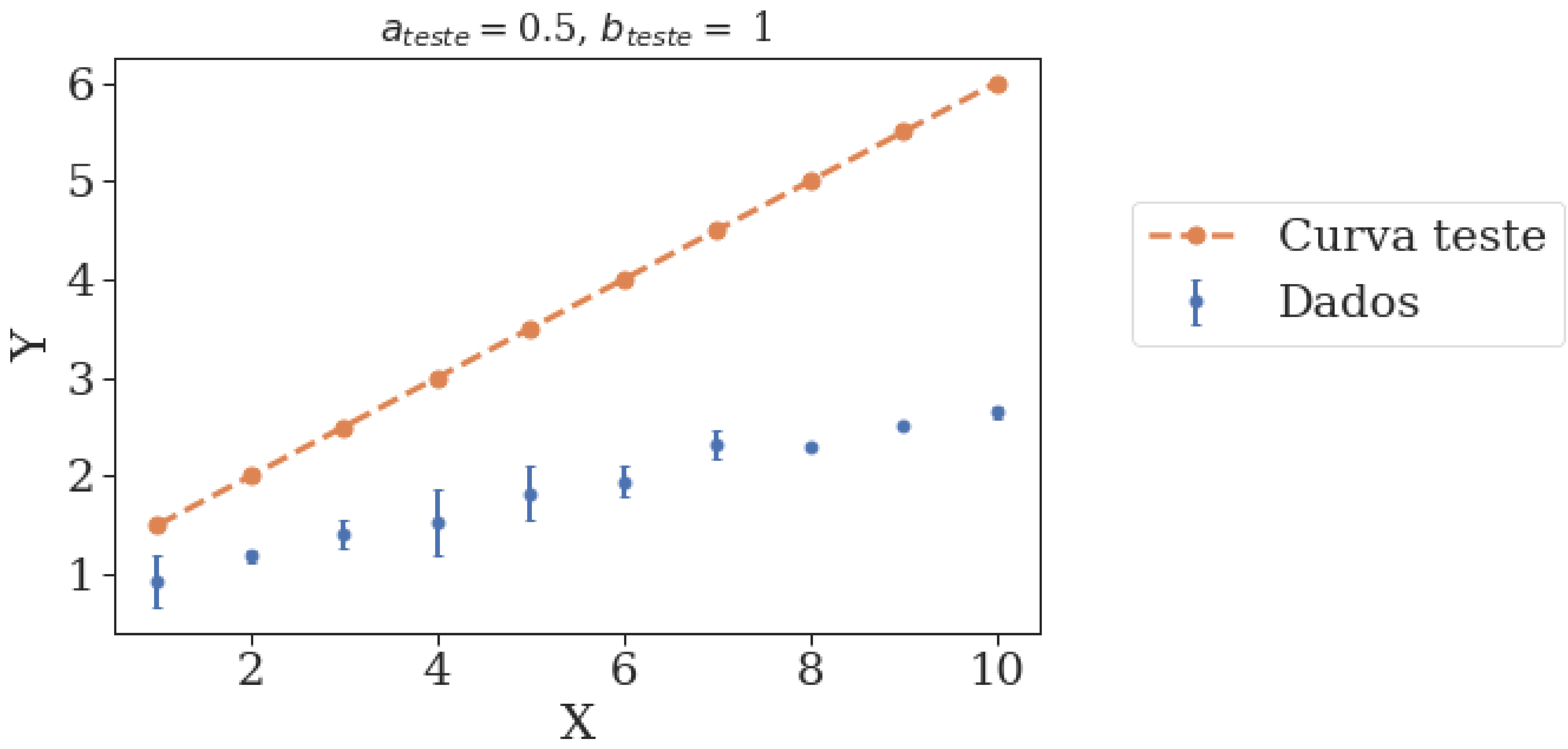
- O caso mais simples corresponde a um modelo linear, onde espera-se que a curva que corretamente descreve os dados é uma reta. Neste caso, o modelo mais geral corresponde a equação da reta:

$$f(x) = ax + b$$

- a = coeficiente angular
- b = coeficiente linear

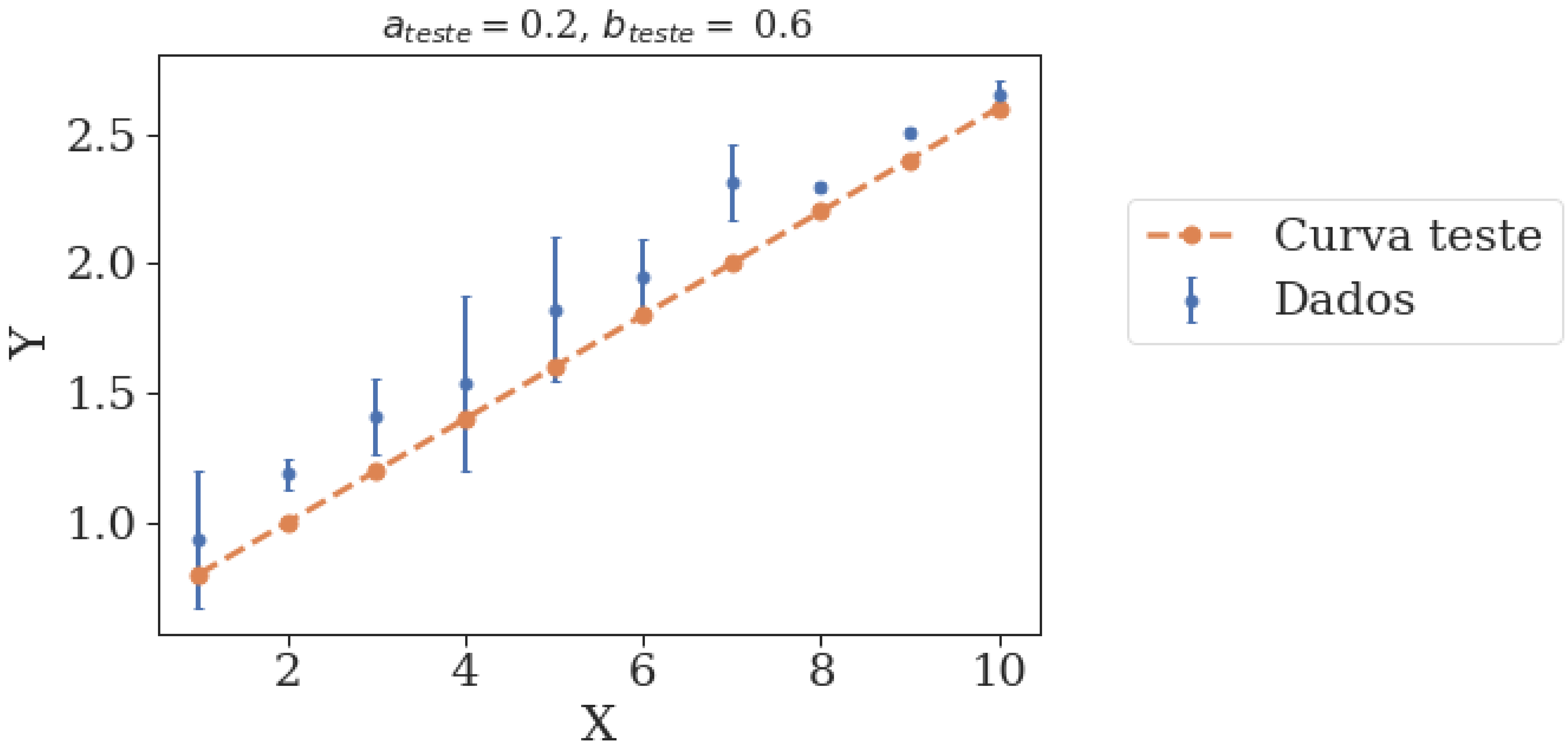
Método de mínimos quadrados

- A partir dos dados medidos queremos encontrar o valor dos coeficientes (*a* e *b*) que melhor descreve os dados experimentais.
- Se escolhermos *a=0,5* e *b = 1* e calcularmos *f(x)* para os valores de x medidos, obtemos:



Método de mínimos quadrados

- Porém se escolhermos *a=0,2* e *b = 0,6*, obtemos:



- A segunda escolha claramente descreve os dados de maneira mais adequada.
- Como podemos determinar os melhores valores de *a* e *b* possíveis de forma quantitativa?

Método de mínimos quadrados

- Existem diversos métodos estatísticos que nos permitem determinar os coeficientes *a* e *b* e que possuem uma sólida fundamentação teórica.
- Nós adotaremos o método dos "mínimos quadrados".

- Vamos usar o seguinte parâmetro para estimar a qualidade do nosso ajuste, ou seja, o quão adequada é a nossa escolha para os parâmetros *a* e *b*:

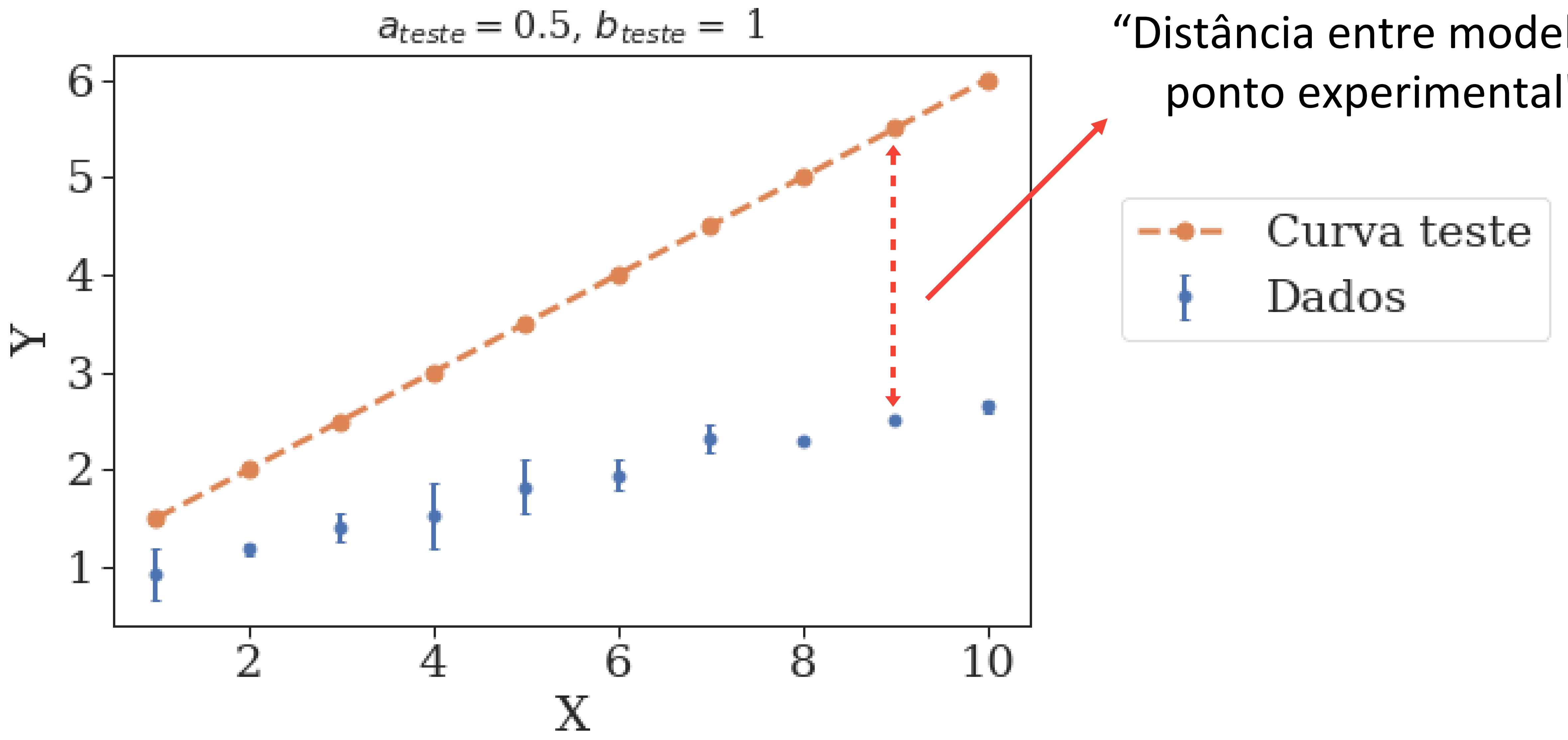
$$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

("chi-quadrado" ou residual)

- N = número de dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e linear

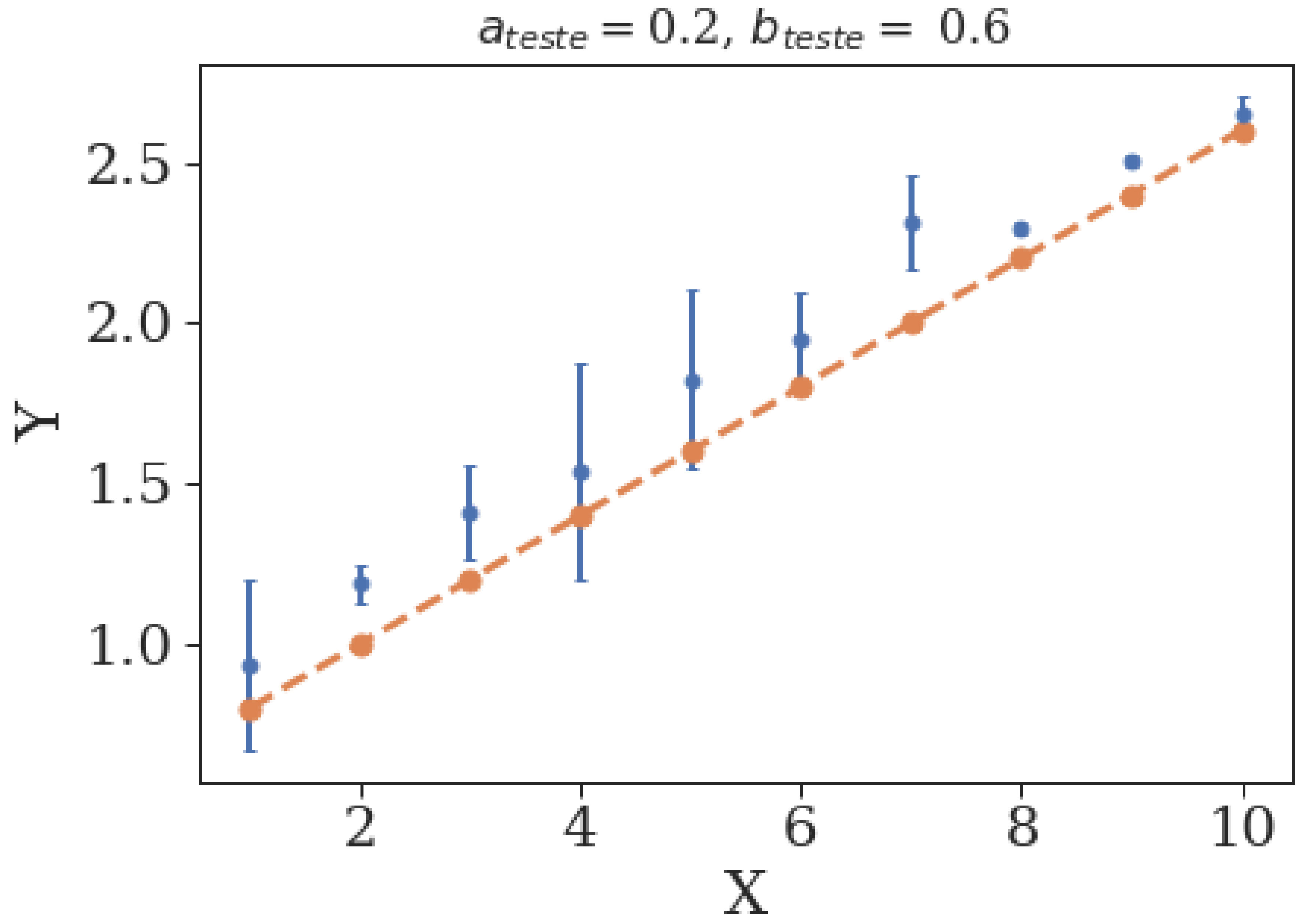
Método de mínimos quadrados

- Utilizando o exemplo anterior:



"Distância entre modelo e ponto experimental"

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i}\right]^2 = 55.306$$



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i}\right]^2 = 83$$

Quanto menor o valor de $\chi 2$ melhor o ajuste da curva.

Método de mínimos quadrados

- Portanto basta escolhermos os valores de *a* e *b* que minimizam $\chi 2$
- O mínimo de $\chi 2$ é pode ser obtido através das derivadas com relação aos coeficientes (parâmetros) *a* e *b*.
- O resultado é:

$$a = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2 - \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)} \qquad b = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) - a\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$$

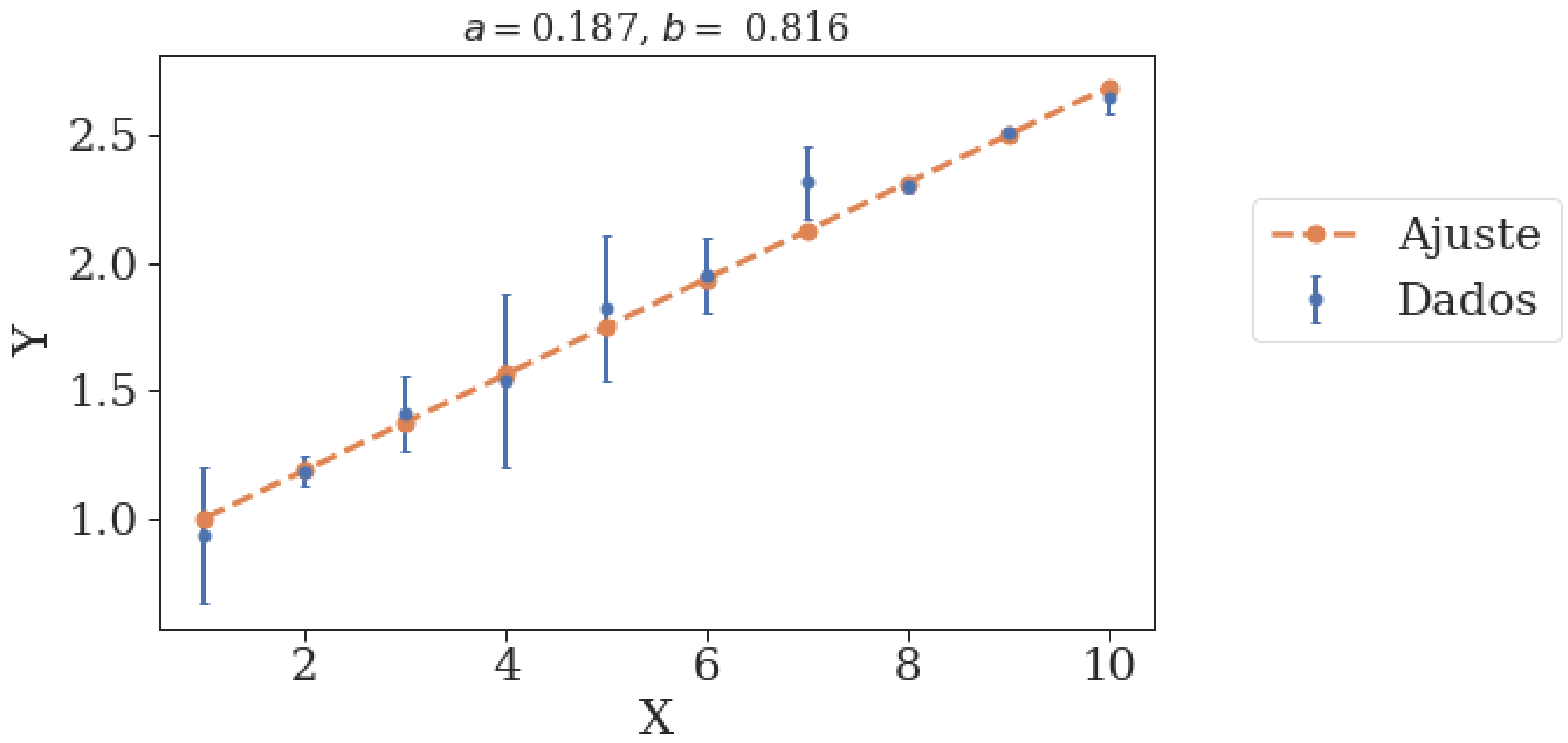
- A soma é sobre todos os dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e linear

Método de mínimos quadrados

- Aplicando estas fórmulas para o exemplo anterior obtemos:

$$a = 0,187\ , b = 0,82\ \ (\chi^2 = 3)$$

- Utilizando estes valores para traçar a curva, temos:



- Vemos que obtemos um ótimo ajuste e que o valor do residual é menor do que os obtidos anteriores, como esperado, já que os valores calculados de a e b minimizam $\chi 2$

Método de mínimos quadrados

- Finalmente também é possível estimar a incerteza nos coeficientes *a* e *b*, ou seja, o quanto podemos variar *a* e *b* e ainda obter um bom ajuste para os dados.
- Utilizando métodos estatísticos pode-se mostrar que estas incertezas são dadas por:

$$\Delta a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \qquad \Delta b = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\langle x \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

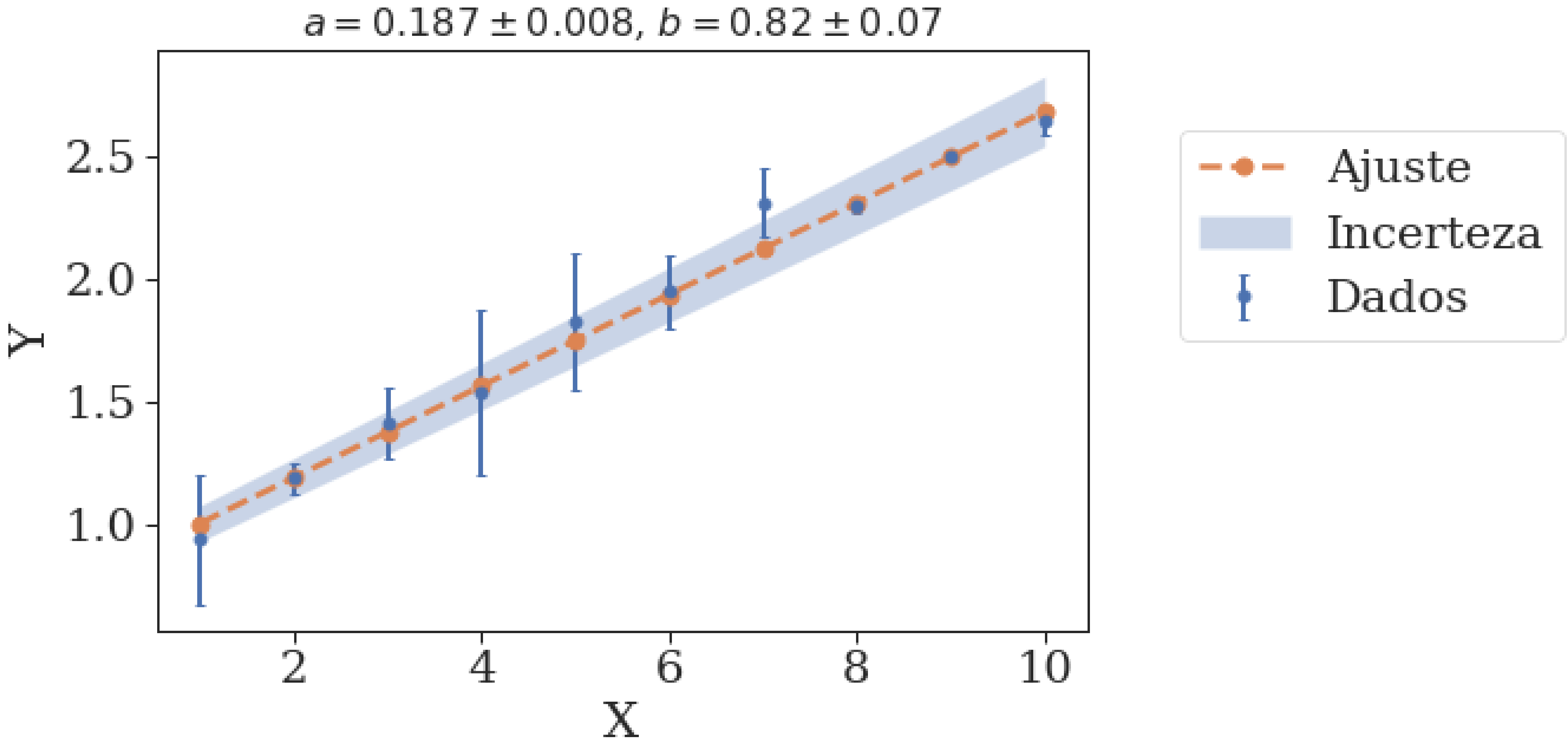
$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{N}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

- A soma é sobre todos os dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i

Método de mínimos quadrados

- Aplicando este método para o exemplo anterior obtemos:

$$\Delta a = 0,008\ ,\ \ \Delta b = 0,07$$



Para aprender mais…

- Alguns videos do Khan Academy Brasil mostram como deduzir os valores ótimos para *a* e *b* pelo método de mínimos quadrados (num caso particular): veja aqui, os vídeos 81 a 87.
- Cuidado: as fórmulas apresentadas aqui são mais gerais do que as obtidas nesses vídeos…