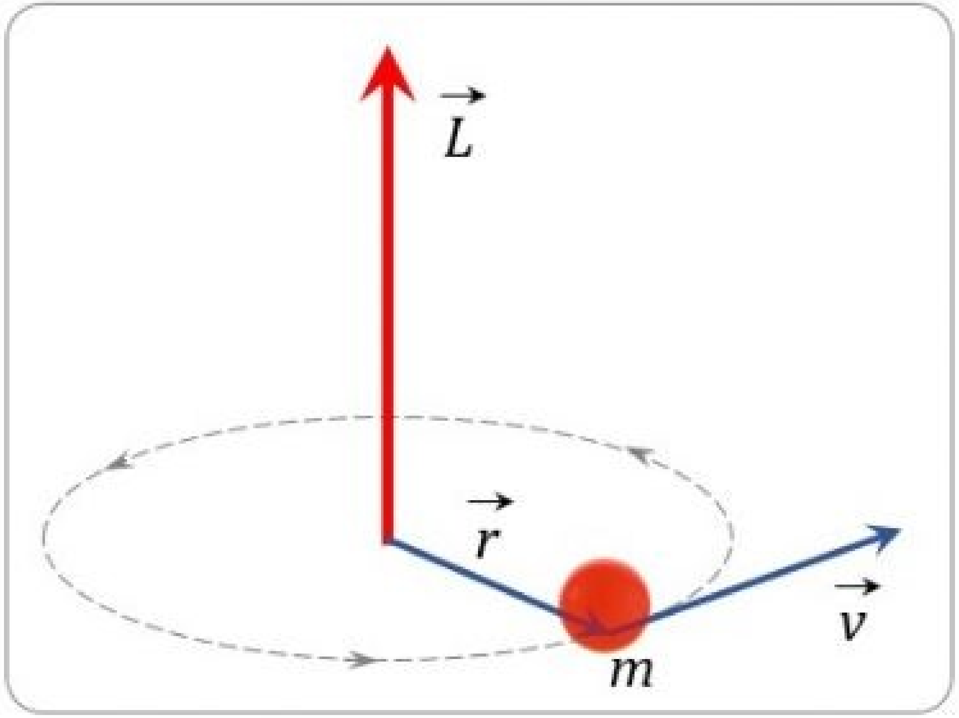
Momento Angular

Análogo rotacional do momento linear.

L = **r** x **p** = **r** x *m***v***

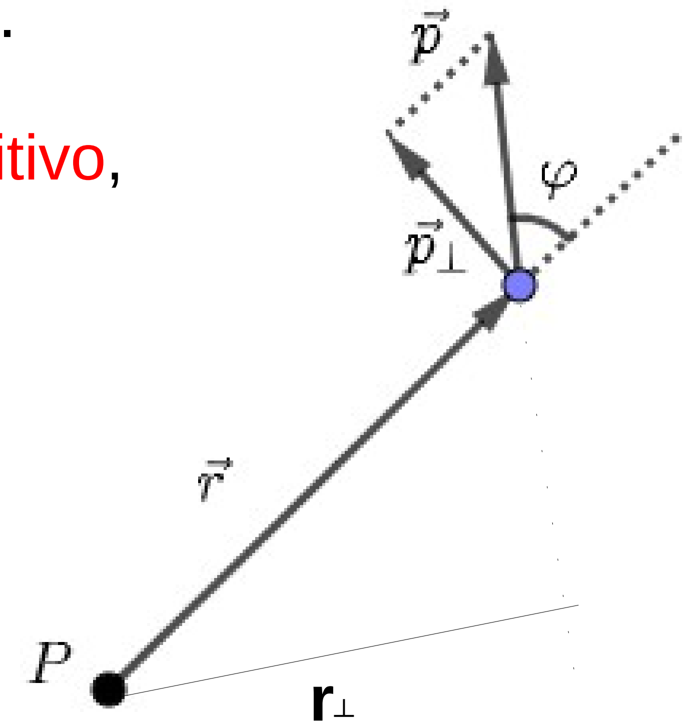
- Em relação a um ponto
  (ou eixo, => próx. slides)
- grandeza vetorial
  (vetor na direção do
  "eixo de rotação",
  o sentido da "rotação"
  seguindo a regra da mão
  direita)



*Vetores em negrito,
seus módulos em itálico,
por exemplo *r* = |**r**|

Momento Angular

No caso de movimento em um plano conhecido, podemos definir tudo em relação não a um ponto, mas em relação a um eixo fixo (perpendicular ao plano, apontando para fora dele), e tratando apenas do componente de **L** na direção deste eixo, i,e. $L_z =: L$, como grandeza unidimensional (análogo a um movimento translacional em uma direção).
Neste caso, movimento no sentido anti-horário em relação ao eixo tem L positivo, e no sentido horário, L negativo.



O modulo será:

$|L| = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = r\, p \operatorname{sen} \varphi$

$= r\, \mathbf{p}_\perp = \mathbf{r}_\perp\, p = r\, m\mathbf{v}_\perp = \mathbf{r}_\perp\, mv,$

onde φ é o ângulo entre os vetores **r** e **p**.

$\mathbf{r}_\perp$ é, às vezes, chamado de braço de alavanca.

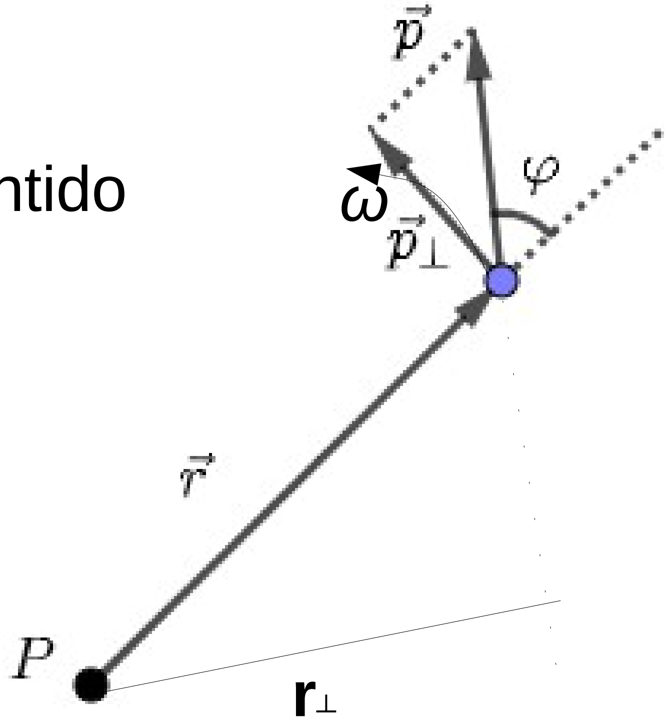
Momento Angular

Outra maneira de escrever isto:

$|L| = r\, m\mathbf{v}_\perp = r\, m\, |\omega| r = |\omega| m r^2$

Levando em conta o sinal: $L = \omega m r^2$,

onde ω é a velocidade angular em relação ao eixo (vale $\mathbf{v}_\perp = \omega r$), e L e ω são positivos para movimento no sentido anti-horário, e negativos, no caso horário.

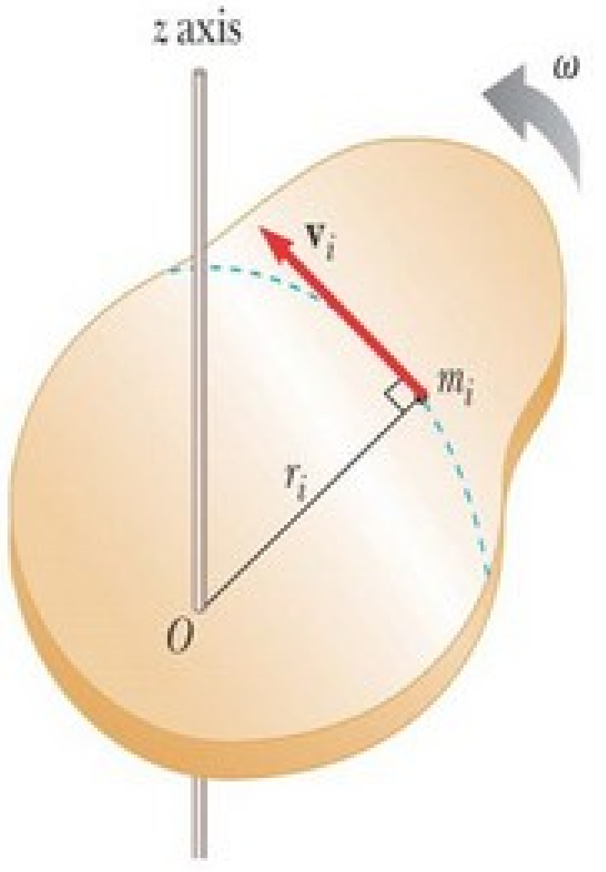


Momento Angular

Num sistema de muitos partículas m_i, o momento angular total é

$L_{\text{tot}} = \Sigma\, L_i = \Sigma\, \omega_i m_i r_i^2$

Num sistema fechado, o momento angular total é conservado.

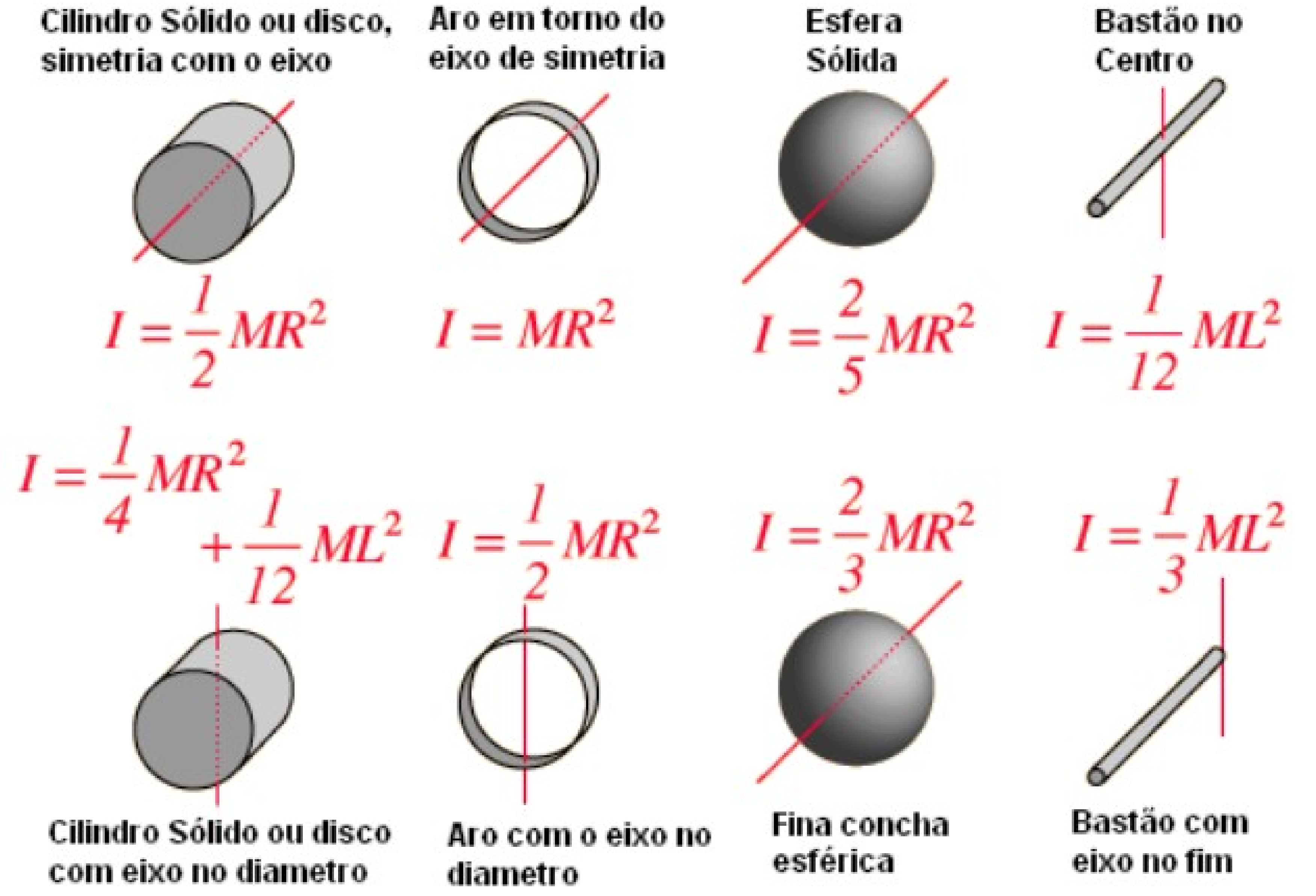


Se o “sistema de muitos partículas” for um corpo rígido girando em torno do eixo, ω é igual para todas as “partículas”, e o seu momento será:

$L_{\text{tot}} = \omega\, \Sigma\, m_i r_i^2 = \omega\, I,$

onde $I = \Sigma\, m_i r_i^2$ $(= \int_V \rho(\mathbf{r}) r^2\, dV\,)$ é chamado de momento de inércia do corpo em relação ao eixo (o análogo rotacional à massa).

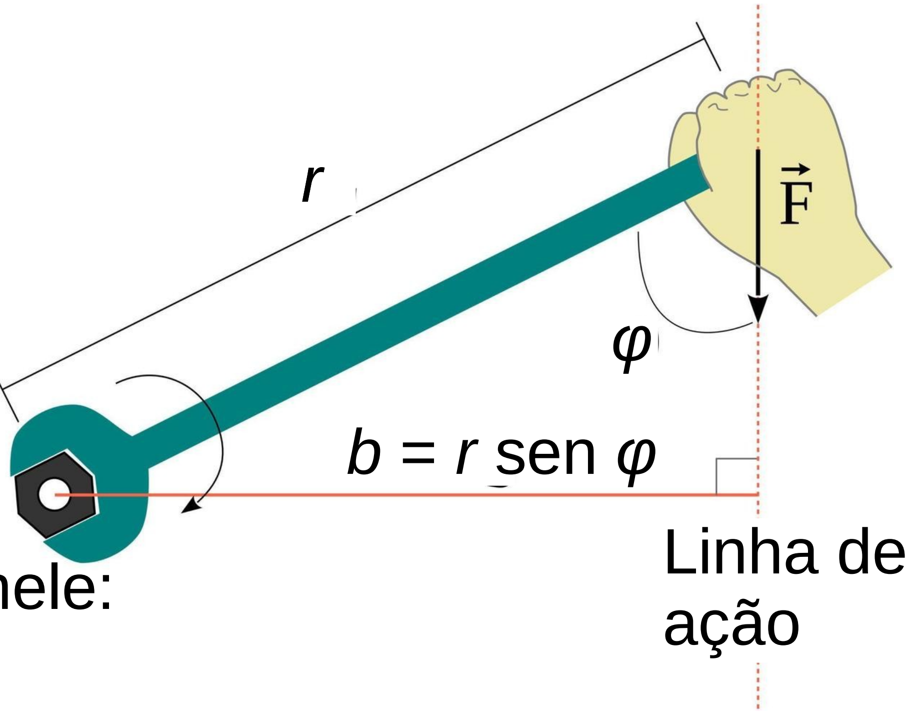
Momento de Inércia de alguns Corpos



Torque

Análogo rotacional à força:

Quando uma força age no corpo com a linha de ação passando a uma distância *b* do eixo, chamado parâmetro de impacto, ela altera o momento angular do corpo.
Se diz que ela aplica um torque τ nele:



$\tau = b \cdot F = r\,F\,\text{sen}\,\varphi$
$\quad = dL/dt$

(vetorial: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = d\mathbf{L}/dt$)

Variação do momento angular devido a um torque que age durante um tempo:
$\Delta L = \int \tau\, dt$
a um torque constante agindo durante um tempo Δt: $\Delta L = \tau \Delta t$

Momento Angular

Grandeza/Equação Translacional	Grandeza/Equação Rotacional
Cinemática 1D (x)	**Cinemática em torno de um eixo fixo**
Posição x	Posição angular/rotacional θ
Velocidade $v_x = dx/dt$	Velocidade angular $\omega = d\theta/dt$
Aceleração $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$	Aceleração angular $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$
$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)\, dt$	$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\, dt$
$v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)\, dt$	$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\, dt$
Velocidade constante	Velocidade angular constante
$x(t) = x_0 + v_x t$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$
Aceleração constante	Aceleração angular constante
$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
$x(t) = x_0 + ½(v_{x,0}+v_x(t))\cdot t$	$\theta(t) = \theta_0 + ½(\omega_0+\omega(t))\cdot t$
$= x_0 + v_{x,0} t + ½\cdot a_x t^2$	$= \theta_0 + \omega_0 t + ½\cdot\alpha t^2$
$v_x^2(t) = v_{x,0}^2 + 2a_x(x(t)-x_0)$	$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta(t)-\theta_0)$

Comparação Movimento Translacional <=> Rotacional

Grandeza/Equação Translacional	Grandeza/Equação Rotacional
Dinâmica 1D (*x*)	**Dinâmica em torno de um eixo fixo**
Massa m	Momento de inércia em relação ao eixo $I = \Sigma\, m_i r_i^2$ ou $\int_V \rho(\mathbf{r}) r^2\, dV$
Energia cinética: $K = \frac{1}{2} m v_x^2$	Energia cinética rotacional: $K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$
Força F_x	Torque $\tau = b \cdot F = rF$ sen φ
2ª Lei de N.: $F_{res,x} = \Sigma\, F_{ix} = m a_x$	$\tau_{res} = \Sigma\, \tau_i = I\alpha$
Trabalho: $dW = F_x dx$	$dW = \tau d\theta$
$W = \int_{xi}^{xf} F_x dx = \frac{1}{2} m v_{xf}^2 - \frac{1}{2} m v_{xi}^2$	$W = \int_{\theta i}^{\theta f} \tau\, dx = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$
Potência: $P = F v_x$	$P = \tau\omega$
Momento linear: $p_x = m v_x$	M. angular (quando se aplica): $L = I\omega$
2ª Lei de N.: $F_{res,x} = dp/dt$	$\tau_{res} = dL/dt$

Comparação Movimento Translacional <=> Rotacional

Grandeza/Equação Translacional	Grandeza/Equação Rotacional
Em três dimensões	
Momento linear (partícula) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
de um sistema: $\mathbf{p}_{tot} = \Sigma\, \mathbf{p}_i = \Sigma\, m_i \mathbf{v}_i$	$\mathbf{L}_{tot} = \Sigma\, \mathbf{L}_i = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$
Força $\mathbf{F}$	Torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
2ª Lei de Newton: $\mathbf{F}_{res} = d\mathbf{p}/dt$	$\boldsymbol{\tau}_{res} = d\mathbf{L}/dt$
Equilíbrio transl.: $\mathbf{F}_{res} = \Sigma\, \mathbf{F} = 0$	Rotacional: $\boldsymbol{\tau}_{res} = \Sigma\, \boldsymbol{\tau} = 0$
Conservação do momento:	
$d\mathbf{p}_{tot}/dt = 0$ ou $\mathbf{p}_{tot} = \text{const.}$	$d\mathbf{L}_{tot}/dt = 0$ ou $\mathbf{L}_{tot} = \text{const.}$
ou $\mathbf{p}_{tot,i} = \mathbf{p}_{tot,f}$ ou $\Delta\mathbf{p}_{tot} = 0$	ou $\mathbf{L}_{tot,i} = \mathbf{L}_{tot,f}$ ou $\Delta\mathbf{L}_{tot} = 0$