## BCJ0204 - Fenômenos Mecânicos

## Experimento 4 - Roteiro

### Colisão com Momento Angular

**Introdução**

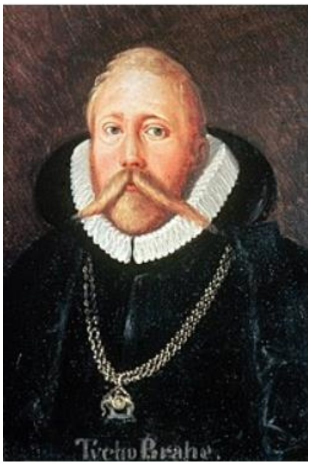
**Motivação: as leis de Keppler**

A palavra "planeta" significa estrela andarilha (que se movimenta de maneira irregular ou imprevisível). Entender o movimento dos planetas era um grande mistério para a Humanidade até o século XVII.

**Johannes Kepler**

Johannes Kepler viveu na Europa do século XVII. Era um homem de seu tempo, protestante e com uma crença muito forte que o design de Deus para o Universo seria perfeito. Durante anos tentou entender o movimento dos planetas usando os sólidos perfeitos de Platão, o que provaria essa beleza do design de Deus. Para provar suas idéias Kepler aceitou trabalhar com Tycho Brahe.

Tycho Brahe era o oposto de Kepler em muitas coisas, desde seu comportamento no dia a dia, até como melhor fazer ciência. Tycho Brahe observava os céus com cuidado, meticulosamente fazendo mapas celestiais dos movimentos das estrelas e planetas. Seus mapas e anotações eram considerados os melhores que haviam na Europa e por isso Kepler foi procura-lo.



**Tycho Brahe**

Usando as anotações de Tycho Brahe, Kepler foi forçado a jogar fora todas as suas idéias. Ele percebeu que nada do que havia pensado funcionava no mundo real. Em lugar de se desesperar, Kepler manteve sua fé no design perfeito. O que mudou foi o que ele passou a chamar de perfeito. Depois de anos de trabalho Kepler escreveu 3 leis do movimento planetário:

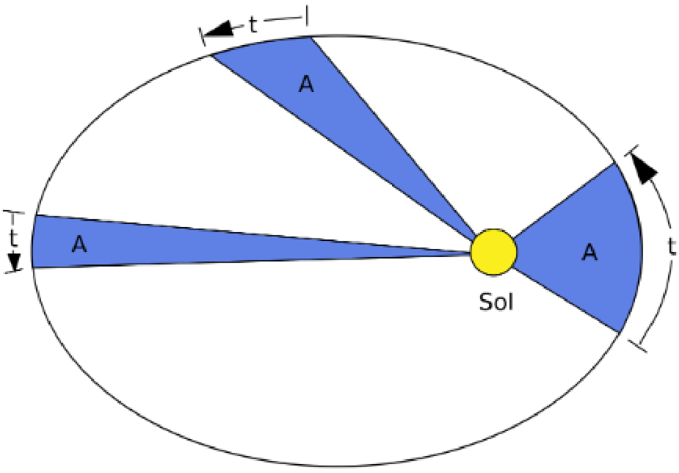
1. os planetas se movimentam em elipses, sendo que o Sol está em um dos focos da elipse;
2. o vetor posição do planeta a partir do Sol percorre área iguai em tempos iguais;

3. a razão entre o quadrado do tempo de revolução do planeta e o cubo do semi-eixo maior da elipse é constante para todos os planetas.

Essas 3 leis foram revolucionárias porque mostravam que o funcionamento do Universo podia ser entendido com bases em leis simples, obtidas a partir da observação da natureza.

---

Vamos nos concentrar principalmente na segunda lei de Kepler, que diz que o vetor posição do planeta varre áreas iguais em tempos iguais, como na figura abaixo.

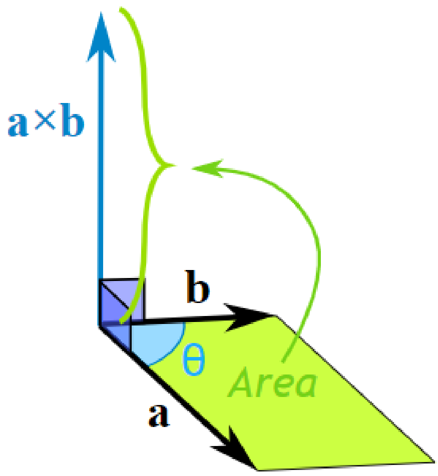



Veja que isso significa que a velocidade angular do planeta **não pode** ser constante. Como as órbitas são elipses e não círculos, a distância do planeta ao Sol varia: quando ele está mais próximo do Sol, ele precisa girar mais rápido, para que a área varrida pintada em azul seja igual à quando ele está mais distante.

Como veremos daqui a pouco, essa lei tem um princípio físico importante por trás dela (ela irá nos mostrar uma nova lei de conservação).

---

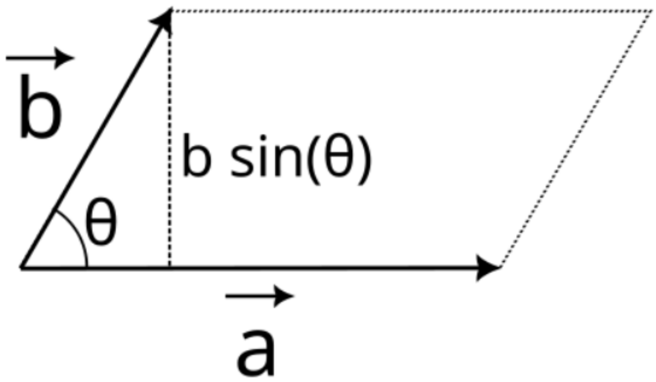
Para começarmos a entender essa lei precisaríamos calcular essas áreas. Isso parece muito difícil, mas com a ajuda do produto vetorial é possível de ser feito de maneira rápida. Esse tipo de produto deve ter sido apresentado já no começo do curso, e será visto em detalhes no Ciclo 4. O produto vetorial de dois vetores é perpendicular ao plano que contêm os dois vetores, como representado na figura ao lado.



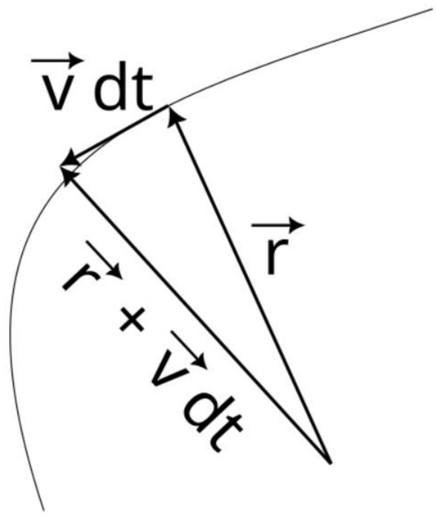

O que vamos precisar usar aqui é apenas que o módulo do produto escalar entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right| \sin \emptyset$$

Onde $\emptyset$ é o ângulo entre os vetores. Se você olhar para a figura abaixo, deve perceber que **o módulo do produto vetorial é igual à área do paralelogramo definido pelos dois vetores.**




Agora vamos relacionar o produto vetorial com a área varrida pelo vetor posição do planeta. Veja na figura ao lado um pedaço da trajetória, e queremos calcular a área delimitada pelos três vetores representados, que é a área varrida pela posição do planeta durante um intervalo de tempo infinitesimal dt.




Note que há uma aproximação aqui: a área compreendida pela curva não é exatamente a área do triângulo da figura, mas no limite em que dt tende a zero, a aproximação fica progressivamente melhor. Essa é a magia do cálculo diferencial funcionando nessa situação!

A área que queremos calcular é a do triângulo, que é a metade da área do quadrilátero definido pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{r} + \vec{v}dt$, ou seja,

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times (\vec{r} + \vec{v}dt)|$$

abrindo o produto, e usando que $\vec{r} \times \vec{r}$ se anula, e dividindo por dt, chegamos a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

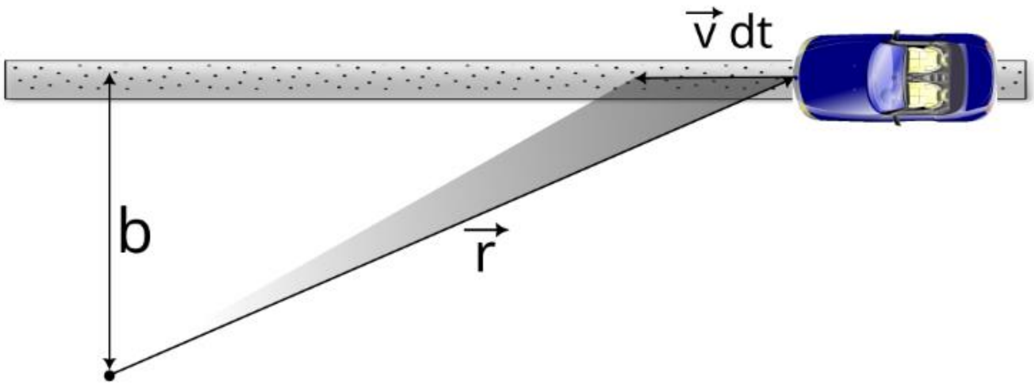
A segunda lei de Keppler nos diz que a área tem que ser igual em tempos iguais, isso é o mesmo que dizer que a taxa de variação da área em função do tempo é constante, ou seja,

$$\frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = constante$$

esta é a expressão matemática da segunda lei de Keppler usando o produto vetorial.

**Áreas iguais em tempos iguais**

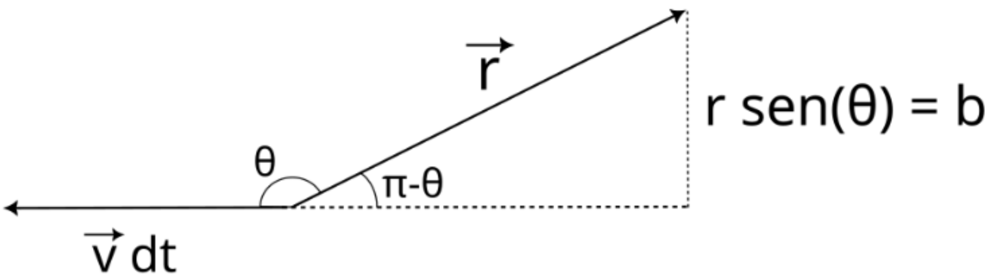
As leis de Kepler são um fato experimental, mas elas não são de forma alguma inesperadas. Imagine o problema que estudamos no laboratório 1, do carrinho movendo-se sobre o trilho sem a ação de nenhuma força. Olhando o problema de cima teríamos algo como a figura abaixo.




Podemos novamente calcular a área hachurada, varrida pelo vetor posição conforme o carro se desloca (com velocidade constante) por um intervalo de tempo dt, usando o produto vetorial.

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt|$$

Vamos calcular essa área usando trigonometria. A figura abaixo vai ajudar a fazer isso.




O que fizemos foi mover os vetores para que fiquem com a mesma origem. A área do paralelogramo definido por $\vec{r}$ e $\vec{v}dt$ é igual à base (que é o comprimento de $\vec{r} \times \vec{v}dt$) vezes a altura, que pela figura é $rsin(\pi - \theta)$. Mas usando um pouco de trigonometria:

$$sin(\pi - \theta) = sin(\pi)cos(\theta) - cos(\pi)sin(\theta) = sin(\theta)$$

onde usamos que $sin(\pi) = 0$ e $cos(\pi) = -1$. Usando isso na figura, vemos que a altura do paralelogramo é $rsin(\theta) = b$, que é a distância entre o trilho e a origem que estamos considerando para o vetor posição. Esse parâmetro b é muito importante, e ganha um nome: **parâmetro de impacto**.

O que descobrimos, então, é que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}bv$$

que é constante!

Ou seja, o carrinho se deslocando com velocidade constante sobre o trilho também obedece uma lei exatamente como na segunda lei de Kepler.

Preste atenção que isso aqui decorreu de dois fatos :

1) a projeção do vetor posição do carrinho na direção perpendicular ao vetor velocidade é constante;

2) a primeira lei de Newton que diz que a velocidade do carro deve ser constante já que não há forças atuando sobre ele.

---

A primeira lei de Newton, na sua forma mais geral, envolve o momento linear, por isso é interessante re-escrever nossa expressão em função do momento linear. Basta multiplicamos e dividimos pela massa do carrinho:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| = constante$$

A quantidade

$$\vec{L}\,(t) = \vec{r}\,(t) \times \vec{p}(t)$$

ganha o nome especial de momento angular. Tanto no problema do movimento dos planetas estudado por Kepler como nesse problema do carro andando, o momento angular é uma quantidade conservada.

Um dos nossos objetivos nesse relatório é aprender um pouco sobre essa quantidade.

---

O que pode mudar o momento angular?

Para sabermos isso vamos tomar sua derivada com relação ao tempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como o vetor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ é sempre paralelo à velocidade, então o primeiro produto vetorial da equação é exatamente zero.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A derivada do momento angular é chamada de torque e ela é proporcional a projeção da força sobre o corpo na direção perpendicular ao vetor posição usado. Por isso o torque é zero se:

1. a força é zero; ou
2. se a força faz 0 ou 180 graus com o vetor posição; ou
3. se o vetor posição tem tamanho zero.

Tanto o torque quanto o momento angular DEPENDEM da escolha da origem do sistema de coordenadas que escolhemos. Muitas vezes as pessoas dizem que essas quantidades estão associadas com rotação, mas isso está incorreto! O momento angular e o torque SEMPRE podem ser definidos, independente se há rotação ou não. O que acontece é que quando os movimentos considerados não envolvem rotações, essas grandezas não acrescentam nenhuma informação que já não esteja contida no que aprendemos até o momento. Mas quando existe rotação, aí é essencial considerar essas quantidades para entender o que está acontecendo.

Em resumo, para encontrar o momento angular:

1. Escolhemos a origem do sistema de coordenadas inercial;
2. escrevemos o vetor posição do objeto e fazemos o produto vetorial do vetor posição com o momento do objeto;
3. o momento angular é uma quantidade que não muda de valor se: não há força agindo sobre o objeto, ou se a força faz 0 ou 180 graus com o vetor posição usado, ou se a força está sendo aplicada sobre a origem, casos em que o torque será zero.

---

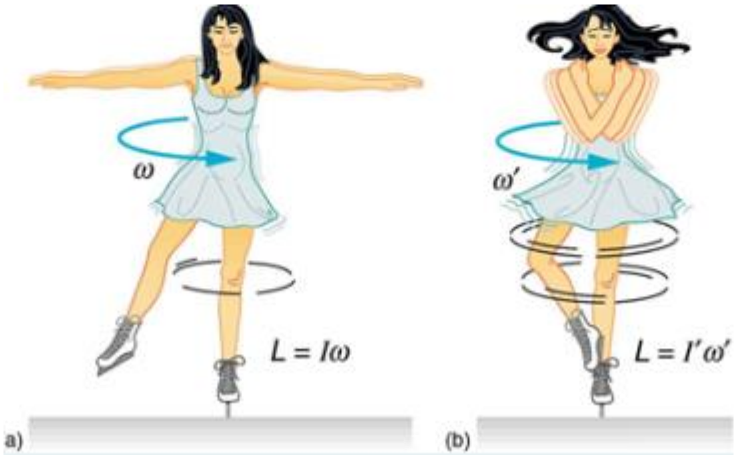
**Uma nova lei de conservação**

Aprendemos (e verificamos experimentalmente no experimento anterior de colisões) que o momento linear total é conservado para um sistema quando não há forças externas. Podemos chegar a uma conclusão parecida para o momento angular total. O argumento completo será visto na parte teórica da disciplina, mas a conclusão é a seguinte:

**No caso de um sistema isolado (sem forças externas), em que as forças internas sejam centrais ou de contato, então o momento angular total é conservado.**

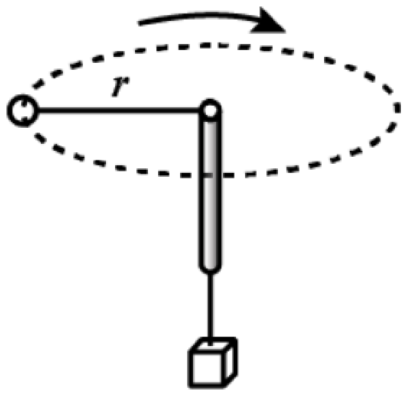
Esta é a **Lei de Conservação do Momento Angular.**

Quando um objeto está girando em um sistema fechado e nenhum torque externo é aplicado a ele, não haverá mudança no momento angular. Um exemplo de conservação do momento angular é uma patinadora no gelo executando um giro na ponta de seu patim com os braços estendidos.




Há relativamente pouco atrito entre seus patins e o gelo (ou $\vec{F}$ é pequeno), e o atrito é exercido muito próximo ao ponto de pivô (a distância relevante $\vec{r}$ é muito pequena). Portanto, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ é desprezível, ou seja, o torque resultante sobre a bailarina é muito próximo de zero. Consequentemente, seu momento angular é conservado, e ela pode girar por algum tempo. Ela também pode aumentar sua taxa de rotação (imagem (b)), puxando os braços e as pernas do eixo vertical de rotação. Quando ela faz isso, a distribuição espacial de sua massa muda o que afeta sua rotação.

A maneira mais simples de entender como ela consegue mudar sua velocidade de rotação, é olhando para uma bola de massa $m$ girando em uma órbita circular quando presa a uma corda como na figura:




O momento angular da bola é, em módulo,

$$L = mrv$$

Como o movimento é circular a velocidade pode ser escrita como $v = r\omega$, com $\omega$ a velocidade angular

$$L = mr^2\omega$$

A quantidade $I = mr^2$ é chamada de **momento de inércia**. Ela faz o papel de massa quando estamos estudando objetos que estão girando. Essa quantidade tem a informação não apenas da massa do objeto, mas como ela está distribuída no espaço.

Se movermos o peso para cima ou para baixo, então o raio $r$ de rotação muda. Como a força que fazemos sobre a bola é radial (ao longo do raio) o momento angular se mantém constante.

$$L = mr_{antes}^2\omega_{antes} = mr_{depois}^2\omega_{depois}$$

para que isso se mantenha verdade a velocidade angular da bola tem de mudar.

O caso da bailarina é análogo. O momento de inércia dela diminui e a velocidade angular aumenta para manter o momento angular

$$L = I_{bailarina} I\omega,$$

uma constante (onde $I$ é o momento de inércia, e $\omega$ é a velocidade angular dela).

---

**Por que o momento angular aparece em muitos lugares na Física?**

Quando estudamos as leis de Kepler a razão do momento angular ser constante foi que a força da gravidade que um planeta sente aponta exatamente na direção da origem do sistema de coordenadas (onde está o Sol). Quando isso acontece a força é chamada de "força central" (aponta na direção entre os dois corpos). A força elétrica e a força gravitacional são desse tipo. A maior parte dos fenômenos do dia a dia é governada por essas forças, sendo assim a conservação do momento angular aparece em vários fenômenos que observamos no dia a dia.

A conservação do momento angular é uma das principais leis de conservação da física, juntamente com as leis de conservação da energia e do momento linear. Essas leis são aplicáveis mesmo em domínios microscópicos onde a mecânica quântica governa; elas existem devido às simetrias fundamentais presentes na natureza (pesquise sobre o Teorema de Noether).

---

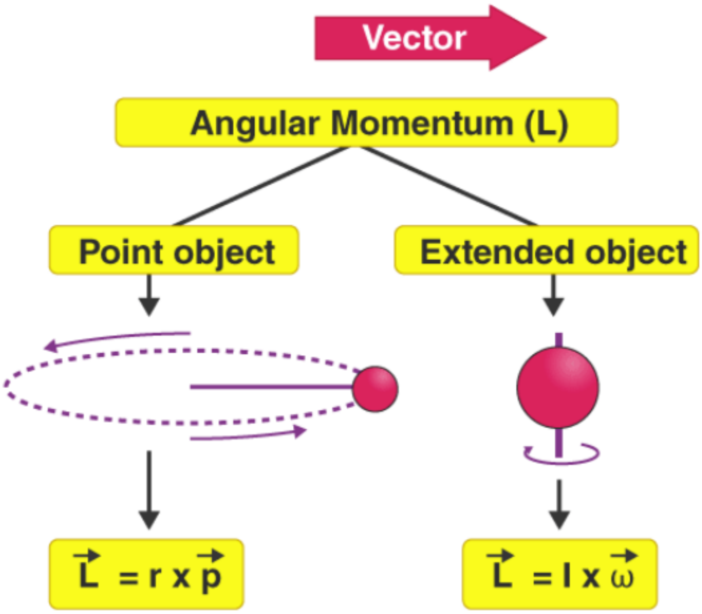
**Colisões Rotacionais**

Em um sistema isolado, o momento angular total é sempre conservado após uma colisão, de maneira semelhante ao momento linear.

---

**Usando o momento angular para estudar rotações**

Já estudamos o momento angular para pontos materiais, mas agora precisamos aprender a usa-lo no caos de corpos extensos.




**Objetos Pontuais** ("Point object" na figura): O objeto considerado como um ponto material está realizando um movimento circular ou giratório em torno de um ponto fixo, por exemplo, a Terra girando em torno do Sol. Aqui o momento angular é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

onde, $\vec{r}$ é a distância entre o objeto e o ponto fixo sobre o qual ele gira, e $\vec{p}$ é o momento linear do objeto.

**Objeto Estendido** ("Extended object" na figura): O objeto com um tamanho finito que está girando em torno de um ponto fixo ou eixo dentro de seu corpo. Por exemplo, a Terra gira em torno de seu eixo. Aqui o momento angular é dado por:

$$\vec{L} = I \times \vec{\omega}$$

onde, $I$ é o momento de inércia, e $\vec{\omega}$ é a velocidade angular.

Essas equações são análogas à definição de momento linear como $\vec{p} = m\vec{v}$, que tem a unidade $kg\ m/s$. A unidade de momento angular é $\boldsymbol{kg\ m^2/s}$.

Como seria de esperar, um objeto que tem um grande momento de inércia $I$, como a Terra, tem um momento angular muito grande. Um objeto que tem uma grande velocidade angular $\vec{\omega}$, como uma centrífuga, também tem um momento angular bastante grande.

---

**Objetivos**

Neste experimento, será feita a análise de colisão entre um carrinho que percorre um trilho de ar e um disco giratório. Esta análise permitirá que o estudante verifique a validade do princípio de conservação do momento angular.

**Materiais**

- Trilho de ar linear
- Gerador de fluxo de ar
- Chave inversora
- Cronômetro digital
- Sensores fotoelétricos
- 1 Carrinho deslizante dotado de uma haste vertical para bloqueio dos fotossensores
- 1 Disco plástico fixado em suporte apropriado.
- Fio de nylon
- Suporte para pesos
- Balança
- Régua

**Advertência**

- Para não produzir arranhões na superfície do trilho de ar, nunca movimente os carrinhos sobre o mesmo sem que o gerador de fluxo de ar esteja funcionando.
- Verifique se a pista e a parte inferior do carrinho se encontram bem limpas; caso contrário, limpe-as com um pano úmido.
- Evite choques mecânicos fortes entre o carrinho e o trilho.
- Tenha cuidado com o equipamento. Uma queda de alguns centímetros pode inutilizar o carrinho por completo.

**Procedimento Experimental**

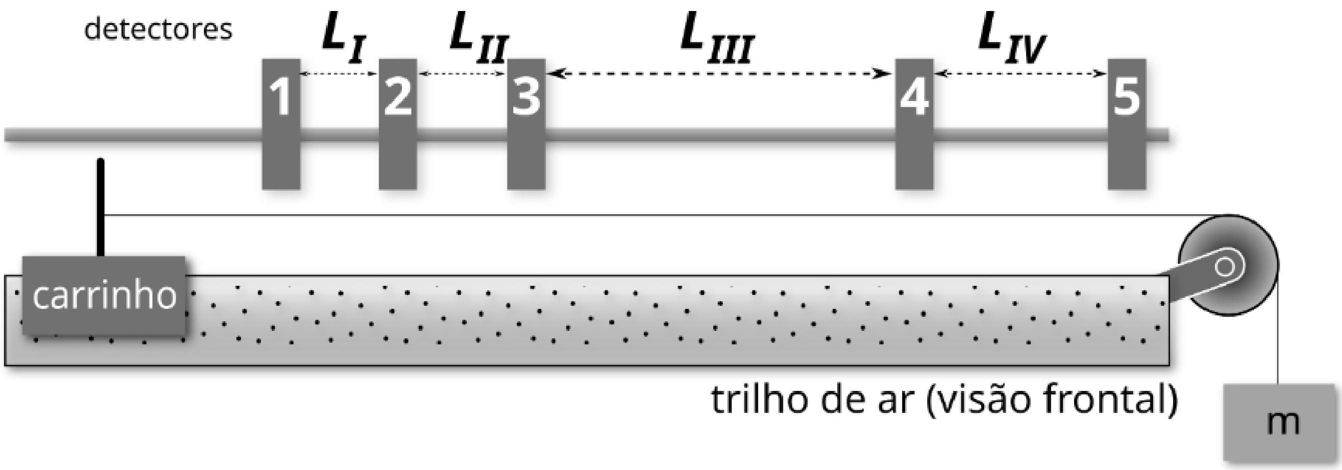
Você deve assistir o vídeo explicativo: https://www.youtube.com/watch?v=f6TfO-cq3_s&t=8s

Este experimento vai envolver duas etapas, uma em que o carrinho percorre o trilho sem acontecer a colisão com o disco, e a outra em que ocorre a colisão.

MEDIDAS INICIAIS

1. Pese o carrinho (apenas o carrinho, não o peso pendurado pela polia)..
2. Anote a massa do disco (está escrita no próprio disco, ou pergunte ao seu professor).
3. Meça o raio do disco (distância do seu centro até a borda).
4. Meça o parâmetro de impacto (a distância do seu centro até a cabeça do alfinete).

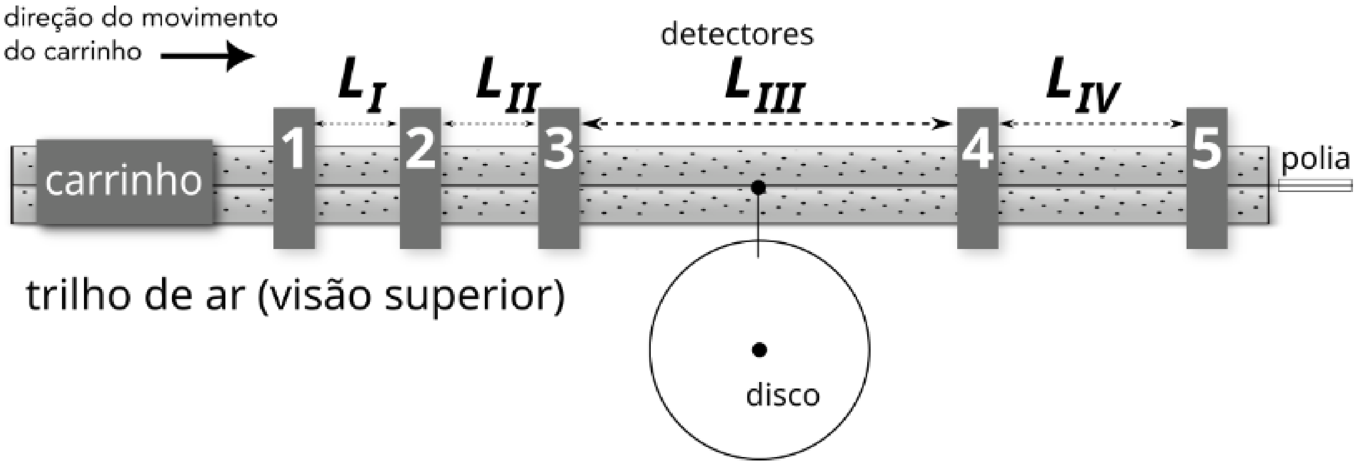
**PRIMEIRA ETAPA: SEM COLISÃO**




O trilho de ar deverá estar numa configuração como representada acima. Nesta etapa, não haverá colisão entre o carrinho e o disco. Seu objetivo nesta etapa será estudar a velocidade e o momento angular final que o carrinho possui ao passar pelo último par de sensores.

1. Meça com a régua os comprimentos LI, LII e LIV. Note que você não precisa anotar o comprimento LIII, que é o espaço maior, onde vai acontecer a colisão com o disco. Meça cada comprimento de três formas diferentes, como feito nos outros experimentos.
2. O carrinho deverá ser solto sempre do mesmo ponto. Se possível, use o botão disparador que, devidamente configurado, permite soltar o carrinho sem fornecer uma velocidade inicial. Caso ele não esteja disponível, tenha o cuidado de sempre soltar o carrinho do mesmo ponto, sem empurrá-lo.
3. O carrinho será acelerado pelo contrapeso, de forma similar ao experimento 2. Verifique que o fio desimpedido, e que o contrapeso tem espaço para "cair" livremente.
4. Solte o carrinho, e anote **todos** os intervalos de tempo. Você deverá repetir este processo três vezes, como nos demais experimentos.

**SEGUNDA ETAPA: COM COLISÃO**




1. Ajuste a posição do disco, para que ele fique entre os sensores três e quatro, ou seja, no intervalo LIII. Ajuste o disco para que a cabeça do alfinete vá colidir exatamente com a "antena" do carrinho.
2. **É importante que o carrinho seja solto exatamente do mesmo ponto** que na primeira etapa, garantindo as mesmas condições iniciais do movimento.
3. Se assegure de que o disco não está girando e que o alvo está fazendo 90 graus com a direção de movimento do carrinho. Isso pode exigir alguma tentativa e erro, pois o disco tem bastante facilidade para girar, e o próprio movimento do ar do trilho pode fazê-lo girar "espontaneamente". Faça o melhor que conseguir para garantir que o disco esteja parado no momento da colisão.
4. Para medir a velocidade angular do disco em cada colisão você deve filmar a colisão e depois em casa obter desta gravação o tempo que o disco leva para fazer a primeira volta T, para daí calcular a velocidade angular. Veja no vídeo algumas dicas de como fazer isso de forma eficiente.
5. Libere o carrinho e anote os tempos relativos aos intervalos entre todos os sensores. Repita o procedimento três vezes.

Considere que em nosso experimento a régua tem uma incerteza instrumental de **$\sigma_i$=0.5 mm** e os relógios do laboratório **de $\sigma_i$=0.001 s** (vamos assumir que não há erros sistemáticos, **$\sigma_s$=0**).