1

Um barco está com o motor funcionando em regime constante; sua velocidade em relação à água tem módulo igual a 5 m/s. A correnteza do rio se movimenta em relação à margem com velocidade constante de 3 m/s. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens do rio nas seguintes situações:
a) O barco navega no sentido da correnteza (rio abaixo);
b) O barco navega no sentido contrário à correnteza (rio acima);
c) O barco navega no sentido perpendicular à correnteza.

Dados do problema

- módulo da velocidade do barco em relação à água: $v_{b/a}=5\text{ m/s}$;
- módulo da velocidade da corrente do rio em relação à margem: $v_a=3\text{ m/s}$.

Solução

a) O vetor resultante $\vec{v}_b$ (velocidade do barco em relação às margens) tem módulo igual a soma dos módulos dos vetores $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_{b/a}$ pois os dois têm mesma direção e sentido, assim

$$\vec{v}_b=\vec{v}_{b/a}+\vec{v}_a$$

em módulo

$$v_b=v_{b/a}+v_a$$
$$v_b=5+3$$
$$\boxed{v_b=8\text{ m/s}}$$

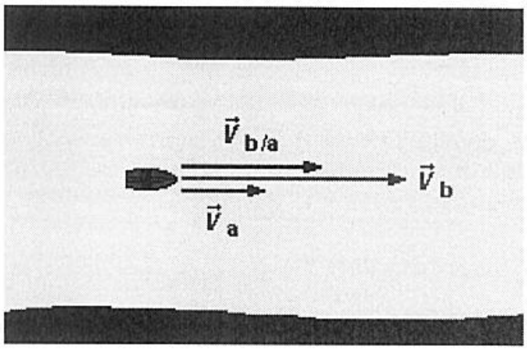


figura 1

b) O vetor resultante $\vec{v}_b$ tem módulo igual a diferença dos módulos dos vetores $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_{b/a}$ pois os dois têm mesma direção e sentidos opostos

$$\vec{v}_b=\vec{v}_{b/a}-\vec{v}_a$$

em módulo

$$v_b=v_{b/a}-v_a$$
$$v_b=5-3$$
$$\boxed{v_b=2\text{ m/s}}$$

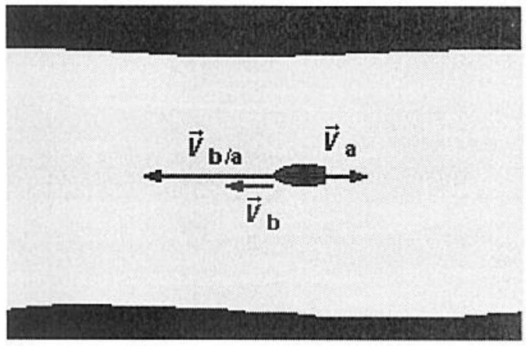


figura 2

c) O barco chega num ponto rio abaixo em relação ao ponto de partida, o módulo da velocidade resultante será dado pelo *Teorema de Pitágoras*, onde o vetor resultante $\vec{v}_a$ representa a hipotenusa e os vetores $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_{b/a}$ representam os catetos, de acordo com a figura 3-B ao lado

$$\vec{v}_b=\vec{v}_{b/a}+\vec{v}_a$$

em módulo

$$v_b^2 = v_{b/a}^2 + v_a^2$$
$$v_b^2 = 5^2 + 3^2$$
$$v_b = \sqrt{25+9}$$
$$v_b = \sqrt{34}$$
$$\boxed{v_b \cong 5{,}8\ \text{m/s}}$$

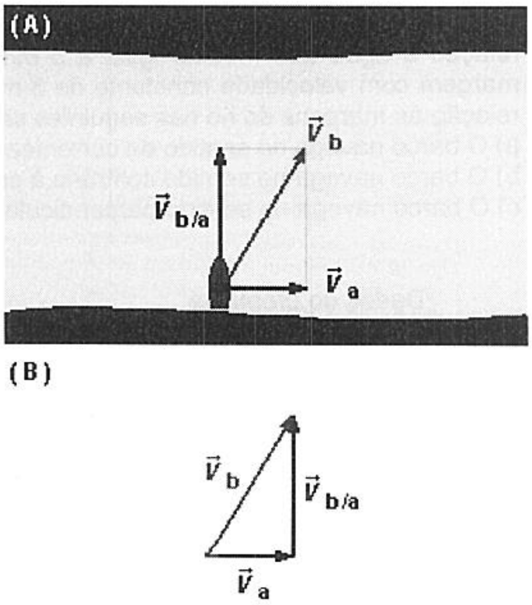


figura 3

com referencial no chão apontando para cima

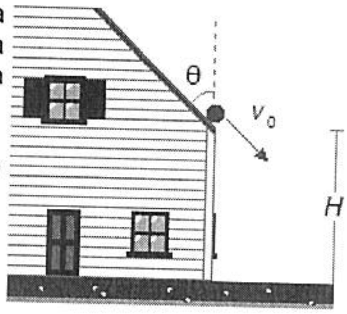
2.1 Uma bola rola sobre o telhado de uma casa até cair pela beirada com velocidade v_0. Sendo a altura do ponto de onde a bola cai iguala H e o ângulo de inclinação do telhado, com a vertical, igual a θ, calcule:

a) O tempo necessário para a bola atingir o chão;

b) A distância horizontal, a partir da casa, onde a bola atinge o chão;

c) A equação da trajetória do movimento;

d) A velocidade com que a bola atinge o chão.



Dados do problema

- velocidade inicial da bola: v_0;
- altura da borda do telhado: H,;
- ângulo de inclinação do telhado: θ.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência no solo com o eixo Ox apontando para a direita e Oy para cima, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de onde a bola cai do telhado está em $(x_0, y_0) = (0, H)$, conforme a figura 1.

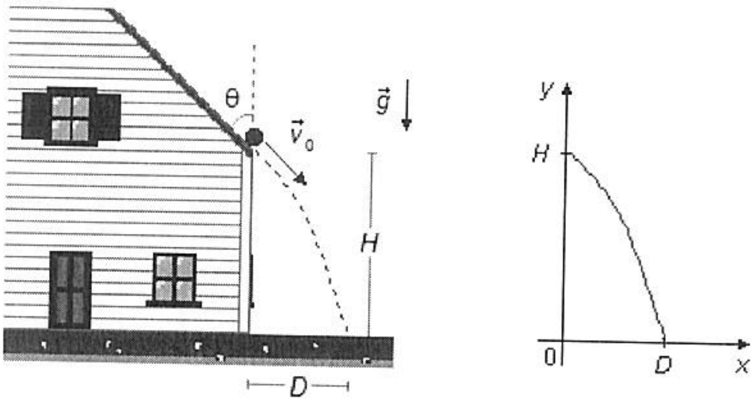


figura 1

O movimento pode ser decomposto ao longo dos eixos x e y. A velocidade inicial v_0, com que a bola rola do telhado tem componentes nas direções x e y

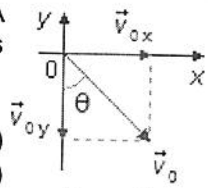


figura 2

$$v_{0x}=v_0 \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$
$$v_{0y}=-v_0 \cos\theta \qquad \text{(II)}$$

onde a componente em x é proporcional ao seno e em y ao co-seno, ao contrário do que se faz usualmente, isso porque o ângulo θ foi medido em relação ao eixo-y.

Da decomposição do movimento vemos que na direção x não há aceleração agindo sobre a bola, então ela está em *Movimento Uniforme* (*M.U.*) e seu movimento é regido pela equação

$$S_x=S_{0x}+v_x t$$

como no movimento uniforme $v_x=v_{0x}$ é constante podemos substituir v_x pelo valor de (I) e $S_{0x}=0$

$$S_x=0+v_0 \operatorname{sen}\theta\, t$$

3

$$S_x=v_0\operatorname{sen}\theta\ t \qquad \text{(III)}$$

Na direção y a bola está sob a ação da aceleração da gravidade, portanto está em queda livre que é regido pelas equações

$$S_y=S_{0y}+v_{0y}t-g\frac{t^2}{2}$$
$$v_y=v_{0y}-g\ t$$

substituindo v_{0y} pelo valor dado em (II) e $S_{0y}=H$

$$S_y=H+(-v_0\cos\theta)\,t-g\frac{t^2}{2}$$
$$S_y=H-v_0\cos\theta\ t-g\frac{t^2}{2} \qquad \text{(IV)}$$
$$v_y=-v_0\cos\theta-g\ t \qquad \text{(V)}$$

com $-g$ constante (os sinais de negativo indicam que a aceleração da gravidade e a velocidade na direção y estão contra a orientação do referencial).

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção x temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais ($\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\Delta x_4$) Na direção y temos que no instante que a bola cai da beirada do telhado a velocidade v_y começa a aumentar, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez maiores ($\Delta y_1<\Delta y_2<\Delta y_3<\Delta y_4$)

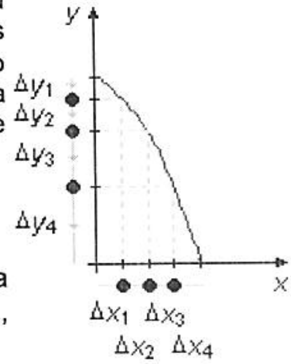


figura 3

Solução

a) O intervalo de tempo para a bola atingir o chão será obtido da expressão (IV) com a condição de que no chão a altura é nula $(S_y=0)$, então temos que

$$0=H-v_0\cos\theta\ t-g\frac{t^2}{2}$$

esta é uma *Equação do 2.º Grau* onde a incógnita é o valor de t desejado

$$\Delta=b^2-4\ a\ c=(-v_0\cos\theta)^2-4\left(-\frac{g}{2}\right)H=v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\ a}=\frac{-(-v_0\cos\theta)\pm\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{2\left(-\frac{g}{2}\right)}=\frac{-v_0\cos\theta\pm\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}$$

onde a raízes serão

$$t_1=\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g} \quad \text{e} \quad t_2=\frac{-v_0\cos\theta-\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}$$

desprezando a segunda raiz que tem valor negativo ($t_2<0$) o tempo para a bola atingir o chão será

$$\boxed{t=\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}}$$

b) O intervalo de tempo calculado acima, para a bola cair até o chão, é também o tempo que ela levará para ir da origem até o ponto D ao longo do eixo x, então substituindo a resposta do item anterior na expressão (III), obtemos

$$D=v_0\operatorname{sen}\theta\left(\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}\right)$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+v_0\operatorname{sen}\theta\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta\, v_0^2\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g} \qquad \text{(VI)}$$

Lembrando da propriedade da trigonometria que nos dá o seno da soma de arcos, temos que $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$ e sendo $a=b=\theta$ podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\theta+\theta)=\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} \qquad \text{(VII)}$$

elevando a expressão (VII) ao quadrado de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)^2=\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)^2$$
$$\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4} \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões (VII) e (VIII) em (VI), temos

$$D=\frac{-v_0^2\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{v_0^4\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4}+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{\dfrac{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}{4}}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{g}$$
$$\boxed{D=\frac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta+\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{2\,g}}$$

c) Para obter a equação da trajetória indicada na figura 1 temos que ter y com função de x, ou $y=f(x)$, usando as equações (III) e (IV) para os movimentos em x e y, temos o sistema

$$\left|\begin{array}{l} S_x=v_0\operatorname{sen}\theta\,t \\ S_y=H-v_0\cos\theta\,t-g\,\dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

isolando o tempo na primeira equação temos

$$t=\frac{S_x}{v_0\operatorname{sen}\theta}$$

5

substituindo este valor na segunda equação obtemos

$$S_y = H - v_0 \cos\theta \, \frac{S_x}{v_0 \operatorname{sen}\theta} - \frac{g}{2}\left(\frac{S_x}{v_0 \operatorname{sen}\theta}\right)^2$$

$$S_y = H - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} S_x - \frac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} S_x^2$$

da trigonometria temos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, então

$$\boxed{S_y = H - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} S_x - \frac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} S_x^2}$$

Fazendo a associação mostrada abaixo com uma *Equação do 2.º grau* do tipo $y = a\, x^2 + b\, x + c$

$$\begin{array}{cccccc} S_y = & -\dfrac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} & S_x^2 - & \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} & S_x + & H \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y = & a & x^2 + & b & x + & c \end{array}$$

vemos que obtivemos uma função do tipo $S_y = f(S_x)$ com o coeficiente a < 0 o que indica que a nossa trajetória é uma parábola de "boca" para baixo.

d) Quando a bola atinge o chão sua velocidade tem componentes nas direções *x* e *y* (figura 4). A velocidade na direção *x* é dada pela expressão (I) e a velocidade na direção *y* é obtida da expressão (V) onde se substitui o tempo pelo valor encontrado no item (a)

$$v_y = -v_0 \cos\theta - g\left(\frac{-v_0 \cos\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}}{g}\right)$$

$$v_y = -v_0 \cos\theta + v_0 \cos\theta - \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}$$

$$v_y = -\sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}$$

A velocidade da bola será dada pela soma vetorial

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

O módulo pode ser obtido aplicando-se o *Teorema de Pitágoras*

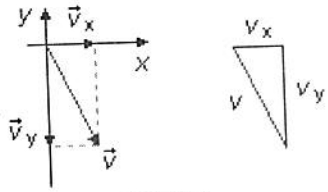


figura 4

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = \left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(-\sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}\right)^2$$

$$v^2 = v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H$$

colocando v_0^2 em evidência do lado direito da igualdade

$$v^2 = v_0^2 \underbrace{\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} + 2\, g\, H$$

lembrando da trigonometria que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, temos finalmente

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, H}}$$

com referencial no telhado apontando para baixo

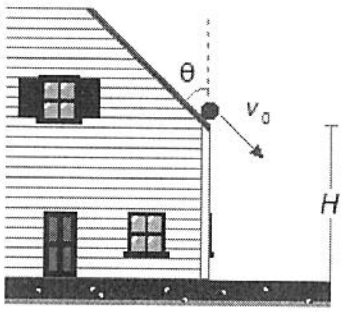
2.2 Uma bola rola sobre o telhado de uma casa até cair pela beirada com velocidade v_0. Sendo a altura do ponto de onde a bola cai iguala H e o ângulo de inclinação do telhado, com a vertical, igual a θ, calcule:

a) O tempo necessário para a bola atingir o chão;

b) A distância horizontal, a partir da casa, onde a bola atinge o chão;

c) A equação da trajetória do movimento;

d) A velocidade com que a bola atinge o chão.



Dados do problema

- velocidade inicial da bola: v_0;
- altura da borda do telhado: H,;
- ângulo de inclinação do telhado: θ.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência no ponto de onde a bola cai do telhado com o eixo Ox apontando para a direita e Oy para baixo, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de onde a bola cai do telhado está em $(x_0, y_0) = (0, 0)$, conforme a figura 1.

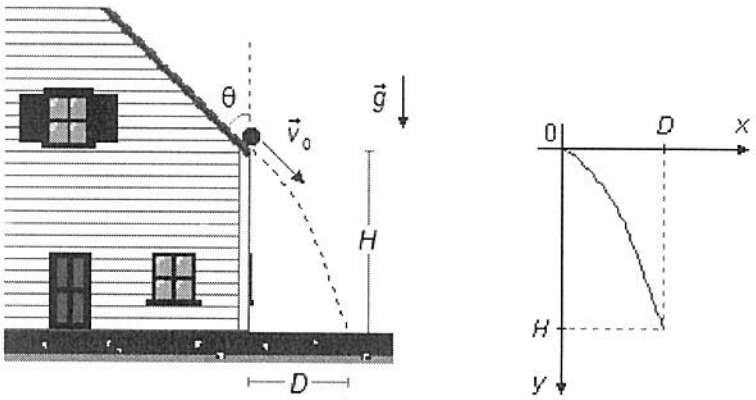


figura 1

O movimento pode ser decomposto ao longo dos eixos x e y. A velocidade inicial v_0, com que a bola rola do telhado tem componentes nas direções x e y

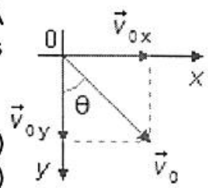


figura 2

$$v_{0x}=v_0\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$
$$v_{0y}=v_0\cos\theta \qquad \text{(II)}$$

onde a componente em x é proporcional ao seno e em y ao co-seno, ao contrário do que se faz usualmente, isso porque o ângulo θ foi medido em relação ao eixo-y.

Da decomposição do movimento vemos que na direção x não há aceleração agindo sobre a bola, então ela está em *Movimento Uniforme* (*M.U.*) e seu movimento é regido pela equação

$$S_x=S_{0x}+v_x t$$

como no movimento uniforme $v_x=v_{0x}$ é constante podemos substituir v_x pelo valor de (I) e $S_{0x}=0$

$$S_x=0+v_0\operatorname{sen}\theta\; t$$

7

$$S_x = v_0 \operatorname{sen}\theta \; t \tag{III}$$

Na direção y a bola está sob a ação da aceleração da gravidade, portanto está em queda livre que é regido pelas equações

$$S_y = S_{0y} + v_{0y} t + g\frac{t^2}{2}$$
$$v_y = v_{0y} + g\, t$$

substituindo v_{0y} pelo valor dado em (II) e $S_{0y} = 0$

$$S_y = 0 + v_0 \cos\theta \; t + g\frac{t^2}{2}$$
$$S_y = v_0 \cos\theta \; t + g\frac{t^2}{2} \tag{IV}$$
$$v_y = v_0 \cos\theta + g\, t \tag{V}$$

com g constante (a aceleração da gravidade é positiva pois está na mesma direção que a orientação do referencial).

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção x temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4$) Na direção y temos que no instante que a bola cai da beirada do telhado a velocidade v_y começa a aumentar, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez maiores ($\Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \Delta y_4$)

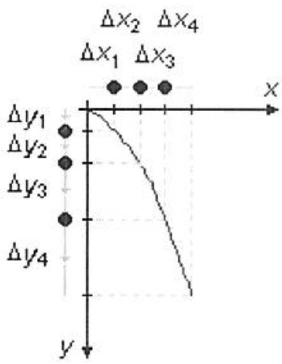


figura 3

Solução

a) O intervalo de tempo para a bola atingir o chão será obtido da expressão (IV) com a condição de que no chão a altura é a mesma da beirada do telhado $\left(S_y = H\right)$ então temos que

$$H = v_0 \cos\theta \; t + g\frac{t^2}{2}$$
$$g\frac{t^2}{2} + v_0 \cos\theta \; t - H = 0$$

esta é uma *Equação do 2.º Grau* onde a incógnita é o valor de t desejado

$$\Delta = b^2 - 4\;a\,c = (v_0 \cos\theta)^2 - 4\,\frac{g}{2}\,(-H) = v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\;a} = \frac{-v_0 \cos\theta \pm \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H}}{2\left(\dfrac{g}{2}\right)} = \frac{-v_0 \cos\theta \pm \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H}}{g}$$

onde a raízes serão

$$t_1 = \frac{-v_0 \cos\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H}}{g} \qquad \text{e} \qquad t_2 = \frac{-v_0 \cos\theta - \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H}}{g}$$

desprezando a segunda raiz que tem valor negativo ($t_2 < 0$) o tempo para a bola atingir o chão será

$$\boxed{t = \frac{-v_0 \cos\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\;g\;H}}{g}}$$

b) O intervalo de tempo calculado acima, para a bola cair até o chão, é também o tempo que ela levará para ir da origem até o ponto D ao longo do eixo x, então substituindo a resposta do item anterior na expressão (III), obtemos

$$D=v_0\operatorname{sen}\theta\left(\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}\right)$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+v_0\operatorname{sen}\theta\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta\,v_0^2\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g} \qquad \text{(VI)}$$

Lembrando da propriedade da trigonometria que nos dá o seno da soma de arcos, temos que $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$ e sendo $a = b = \theta$ podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\theta+\theta)=\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} \qquad \text{(VII)}$$

elevando a expressão (VII) ao quadrado de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)^2=\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)^2$$
$$\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4} \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões (VII) e (VIII) em (VI), temos

$$D=\frac{-v_0^2\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{v_0^4\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4}+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{\dfrac{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}{4}}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{g}$$
$$\boxed{D=\frac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta+\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{2\,g}}$$

c) Para obter a equação da trajetória indicada na figura 1 temos que ter y com função de x, ou $y=f(x)$, usando as equações (III) e (IV) para os movimentos em x e y, temos o sistema

$$\left|\begin{array}{l} S_x = v_0\operatorname{sen}\theta\,t \\ S_y = v_0\cos\theta\,t+g\,\dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

isolando o tempo na primeira equação temos

$$t=\frac{S_x}{v_0\operatorname{sen}\theta}$$

9

substituindo este valor na segunda equação obtemos

$$S_y = v_0 \cos\theta \frac{S_x}{v_0 \operatorname{sen}\theta} + \frac{g}{2}\left(\frac{S_x}{v_0 \operatorname{sen}\theta}\right)^2$$
$$S_y = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} S_x + \frac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} S_x^2$$

da trigonometria temos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, então

$$\boxed{S_y = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} S_x + \frac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} S_x^2}$$

Fazendo a associação mostrada abaixo com uma *Equação do 2.º grau* do tipo $y = a\, x^2 + b\, x + c$

$$\begin{array}{cccccc} S_y = & -\dfrac{g}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} & S_x^2 + & \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} & S_x & +0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y = & a & x^2 + & b & x + & c \end{array}$$

vemos que obtivemos uma função do tipo $S_y = f(S_x)$ com o coeficiente a > 0 o que indica que a nossa trajetória é uma parábola de "boca" apontando no mesmo sentido do eixo *y* positivo (neste caso para baixo ao contrário do que usualmente acontece).

d) Quando a bola atinge o chão sua velocidade tem componentes nas direções *x* e *y* (figura 4). A velocidade na direção *x* é dada pela expressão (I) e a velocidade na direção *y* é obtida da expressão (V) onde se substitui o tempo pelo valor encontrado no item (a)

$$v_y = v_0 \cos\theta + g\left(\frac{-v_0 \cos\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}}{g}\right)$$
$$v_y = v_0 \cos\theta - v_0 \cos\theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}$$
$$v_y = \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}$$

A velocidade da bola será dada pela soma vetorial

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

O módulo pode ser obtido aplicando-se o *Teorema de Pitágoras*

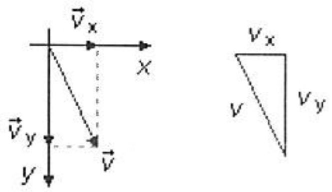


figura 4

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$
$$v^2 = \left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H}\right)^2$$
$$v^2 = v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + v_0^2 \cos^2\theta + 2\, g\, H$$

colocando v_0^2 em evidência do lado direito da igualdade

$$v^2 = v_0^2 \underbrace{\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} + 2\, g\, H$$

lembrando da trigonometria que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, temos finalmente

$$\boxed{v=\sqrt{v_0^2+2\,g\,H}}$$

11

com referencial no telhado apontando para cima

2.3

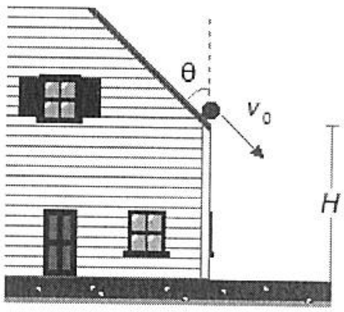
Uma bola rola sobre o telhado de uma casa até cair pela beirada com velocidade v_0. Sendo a altura do ponto de onde a bola cai iguala H e o ângulo de inclinação do telhado, com a vertical, igual a θ, calcule:

a) O tempo necessário para a bola atingir o chão;

b) A distância horizontal, a partir da casa, onde a bola atinge o chão;

c) A equação da trajetória do movimento;

d) A velocidade com que a bola atinge o chão.



Dados do problema

- velocidade inicial da bola: v_0;
- altura da borda do telhado: H,;
- ângulo de inclinação do telhado: θ.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência no ponto de onde a bola cai do telhado com o eixo Ox apontando para a direita e Oy para cima, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de onde a bola cai do telhado está em $(x_0, y_0) = (0, 0)$, conforme a figura 1.

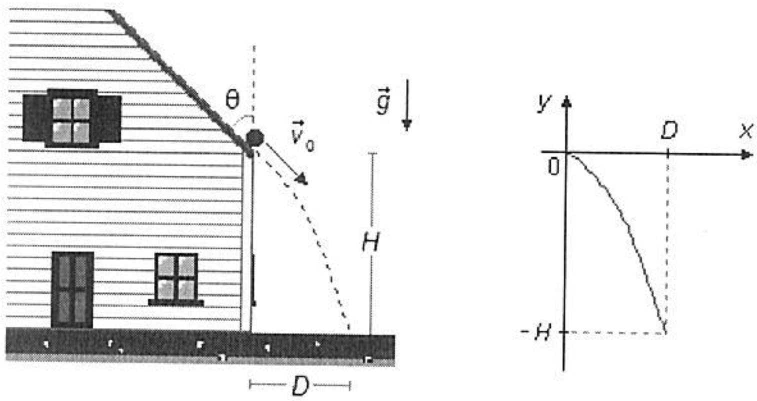


figura 1

O movimento pode ser decomposto ao longo dos eixos x e y. A velocidade inicial v_0, com que a bola rola do telhado tem componentes nas direções x e y

$$v_{0x}=v_0 \operatorname{sen}\theta \tag{I}$$
$$v_{0y}=-v_0 \cos\theta \tag{II}$$

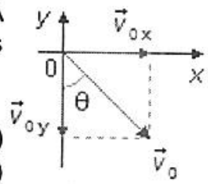


figura 2

onde a componente em x é proporcional ao seno e em y ao co-seno, ao contrário do que se faz usualmente, isso porque o ângulo θ foi medido em relação ao eixo-y.

Da decomposição do movimento vemos que na direção x não há aceleração agindo sobre a bola, então ela está em *Movimento Uniforme* (*M.U.*) e seu movimento é regido pela equação

$$S_x=S_{0x}+v_x t$$

como no movimento uniforme $v_x=v_{0x}$ é constante podemos substituir v_x pelo valor de (I) e $S_{0x}=0$

$$S_x=0+v_0 \operatorname{sen}\theta\ t$$

13

$$S_x=v_0\,\text{sen}\theta\ t \qquad \text{(III)}$$

Na direção y a bola está sob a ação da aceleração da gravidade, portanto está em queda livre que é regido pelas equações

$$S_y=S_{0y}+v_{0y}t-g\frac{t^2}{2}$$
$$v_y=v_{0y}-g\ t$$

substituindo v_{0y} pelo valor dado em (II) e $S_{0y}=0$

$$S_y=0-v_0\cos\theta\ t-g\frac{t^2}{2}$$
$$S_y=-v_0\cos\theta\ t-g\frac{t^2}{2} \qquad \text{(IV)}$$
$$v_y=-v_0\cos\theta-g\ t \qquad \text{(V)}$$

com $-g$ constante (os sinais de negativo indicam que a aceleração da gravidade e a velocidade na direção y estão contra a orientação do referencial).

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção x temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais (Δx_1 = Δx_2 = Δx_3 = Δx_4) Na direção y temos que no instante que a bola cai da beirada do telhado a velocidade v_y começa a aumentar, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez maiores ($\Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \Delta y_4$)

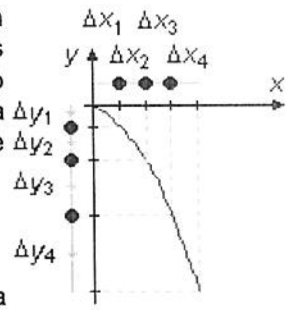


figura 3

Solução

a) O intervalo de tempo para a bola atingir o chão será obtido da expressão (IV) com a condição de que no chão a altura é a mesma do telhado $\left(S_y=-H\right)$ então temos que

$$-H=-v_0\cos\theta\ t-g\frac{t^2}{2}$$
$$g\frac{t^2}{2}+v_0\cos\theta\ t-H=0$$

esta é uma *Equação do 2.º Grau* onde a incógnita é o valor de t desejado

$$\Delta=b^2-4\ a\ c=(v_0\cos\theta)^2-4\ \frac{g}{2}\ (-H)=v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\ a}=\frac{-v_0\cos\theta\pm\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{2\left(\frac{g}{2}\right)}=\frac{-v_0\cos\theta\pm\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}$$

onde a raízes serão

$$t_1=\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g} \qquad \text{e} \qquad t_2=\frac{-v_0\cos\theta-\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}$$

desprezando a segunda raiz que tem valor negativo ($t_2 < 0$) o tempo para a bola atingir o chão será

$$\boxed{t=\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\ g\ H}}{g}}$$

b) O intervalo de tempo calculado acima, para a bola cair até o chão, é também o tempo que ela levará para ir da origem até o ponto D ao longo do eixo x, então substituindo a resposta do item anterior na expressão (III), obtemos

$$D=v_0\operatorname{sen}\theta\left(\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}\right)$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+v_0\operatorname{sen}\theta\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta\,v_0^2\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{-v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\sqrt{v_0^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+2\,g\,H}}{g} \qquad \text{(VI)}$$

Lembrando da propriedade da trigonometria que nos dá o seno da soma de arcos, temos que $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$ e sendo $a=b=\theta$ podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\theta+\theta)=\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$
$$\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} \qquad \text{(VII)}$$

elevando a expressão (VII) ao quadrado de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$(\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)^2=\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)^2$$
$$\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4} \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões (VII) e (VIII) em (VI), temos

$$D=\frac{-v_0^2\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{v_0^4\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4}+2\,g\,H}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\sqrt{\dfrac{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}{4}}}{g}$$
$$D=\frac{\dfrac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{g}$$

$$\boxed{D=\frac{-v_0^2\operatorname{sen}2\theta+\sqrt{v_0^4\operatorname{sen}^2 2\theta+8\,g\,H}}{2\,g}}$$

c) Para obter a equação da trajetória indicada na figura 1 temos que ter y com função de x, ou $y=f(x)$, usando as equações (III) e (IV) para os movimentos em x e y, temos o sistema

$$\left|\begin{array}{l} S_x=v_0\operatorname{sen}\theta\,t \\ S_y=-v_0\cos\theta\,t-g\,\dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

isolando o tempo na primeira equação temos

$$t=\frac{S_x}{v_0\operatorname{sen}\theta}$$

15

substituindo este valor na segunda equação obtemos

$$S_y=-v_0\cos\theta\,\frac{S_x}{v_0\operatorname{sen}\theta}-\frac{g}{2}\left(\frac{S_x}{v_0\operatorname{sen}\theta}\right)^2$$
$$S_y=-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}S_x-\frac{g}{2\,v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}S_x^2$$

da trigonometria temos que $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, então

$$\boxed{S_y=-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}S_x-\frac{g}{2\,v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}S_x^2}$$

Fazendo a associação mostrada abaixo com uma *Equação do 2.º grau* do tipo $y=a\,x^2+b\,x+c$

$$\begin{array}{cccccccc}
S_y & = & -\dfrac{g}{2\,v_0^2\operatorname{sen}^2\theta} & S_x^2 & - & \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} & S_x & +0\\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
y & = & a & x^2 & + & b & x & +\ c
\end{array}$$

vemos que obtivemos uma função do tipo $S_y=f(S_x)$ com o coeficiente a < 0 o que indica que a nossa trajetória é uma parábola de "boca" para baixo.

d) Quando a bola atinge o chão sua velocidade tem componentes nas direções *x* e *y* (figura 4). A velocidade na direção *x* é dada pela expressão (I) e a velocidade na direção *y* é obtida da expressão (V) onde se substitui o tempo pelo valor encontrado no item (a)

$$v_y=-v_0\cos\theta-g\left(\frac{-v_0\cos\theta+\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}}{g}\right)$$
$$v_y=-v_0\cos\theta+v_0\cos\theta-\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}$$
$$v_y=-\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}$$

A velocidade da bola será dada pela soma vetorial

$$\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y$$

O módulo pode ser obtido aplicando-se o *Teorema de Pitágoras*

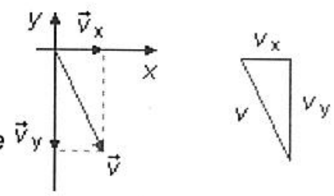


figura 4

$$v^2=v_x^2+v_y^2$$
$$v^2=\left(v_0\operatorname{sen}\theta\right)^2+\left(-\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H}\right)^2$$
$$v^2=v_0^2\operatorname{sen}^2\theta+v_0^2\cos^2\theta+2\,g\,H$$

colocando v_0^2 em evidência do lado direito da igualdade

$$v^2=v_0^2\underbrace{\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)}_{1}+2\,g\,H$$

lembrando da trigonometria que $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, temos finalmente

$$\boxed{v=\sqrt{v_0^2+2\,g\,H}}$$

3

Dois pontos materiais percorrem trajetórias perpendiculares entre si que se cruzam numa origem comum. Os móveis partem simultaneamente do repouso de pontos x_0 e y_0 situados sobre as trajetórias em direção à origem em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*) ambos com a mesma aceleração em módulo.igual a *a*. Calcular:
a) Depois de quanto tempo da partida a distância entre os móveis é mínima;
b) Qual é a mínima distância.

Esquema do problema

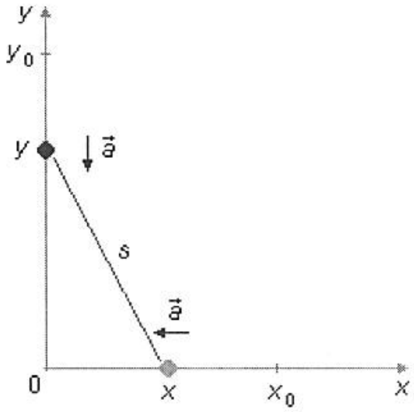


figura 1

Vamos adotar que os pontos de onde partem os corpos sejam positivos ($x_0 > 0$ e $y_0 > 0$), como eles se movimentam em direção a origem suas acelerações estão contra a orientação das trajetórias e são negativas ($a < 0$).

Num determinado instante eles ocupam pontos *x* e *y* de tal modo que a distância *d* entre eles é mínima (figura 1).

Dados do problema

- posição inicial do móvel 1: x;
- velocidade inicial do móvel 1: $v_{0x} = 0$;
- aceleração do móvel 1: $-a$;
- posição inicial do móvel 2: y;
- velocidade inicial do móvel 2: $v_{0y} = 0$;
- aceleração do móvel 2: $-a$;

Solução

a) Como os corpos estão em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*) escrevendo suas equações de movimento são

$$x = x_0 + v_{0x}\, t + \frac{a}{2} t^2 \qquad\qquad y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{a}{2} t^2$$

$$x = x_0 + 0.t - \frac{a}{2} t^2 \qquad\qquad y = y_0 + 0.t - \frac{a}{2} t^2$$

$$x = x_0 - \frac{a}{2} t^2 \quad \text{(I)} \qquad\qquad y = y_0 - \frac{a}{2} t^2 \quad \text{(II)}$$

Da figura 1 temos, utilizando o *Teorema de Pitágoras*, que a distância entre os móveis é dada por

$$s^2 = x^2 + y^2 \tag{III}$$

substituindo as expressões (I) e (II) em (III), obtemos

$$s = \left[\left(x_0 - \frac{a}{2} t^2 \right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{2} t^2 \right)^2 \right]^{1/2} \tag{IV}$$

17

Para encontrarmos o instante em que a *distância é mínima* devemos derivar a expressão (IV) em função do tempo e impor que ela seja igual a zero

derivação de $s=\left[\left(x_0-\dfrac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\dfrac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}$

- Primeiro: deriva-se a raiz quadrada (expoente $1/2$) e o valor dentro da raiz continua o mesmo, de onde temos

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}-1}\ldots$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{-1/2}\ldots$$

- Segundo: este valor deve ser multiplicado pela derivada da função dentro da raiz, deriva-se a função entre parênteses ao quadrado e copia-se o valor dentro dos parênteses, obtendo

$$\ldots 2\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^{2-1}\ldots$$

$$\ldots 2\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)\ldots$$

- Terceiro: este valor deve ser multiplicado pela derivada da função entre parênteses, derivada de polinômio com x_0 constante, assim

$$\ldots\left(0-2\frac{a}{2}t^{2-1}\right)\ldots$$

$$\ldots(-at)\ldots$$

- Quarto: dentro da raiz temos a soma de duas funções, como a derivada da soma é a soma das derivadas, e o segundo termo entre parênteses é igual ao primeiro, trocando-se os valore constantes x_0 por y_0, suas derivadas também serão

$$\ldots 2\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\ldots \qquad \text{e} \qquad \ldots(-at)\ldots$$

Assim o cálculo completo da derivada é

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{-1/2}\left[2\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)(-at)+2\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)(-at)\right]$$

fazendo as simplificações algébricas temos

18

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\left[-2at\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)-2at\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]}{\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\frac{(-2at)\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]}{\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{at\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]}{\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \text{(V)}$$

Impondo agora a condição de que a derivada deve ser nula $\left(\frac{ds}{dt}=0\right)$, temos na expressão (V)

$$-\frac{at\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]}{\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}}=0$$

$$-at\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]=0.\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)^2\right]^{1/2}$$

$$-at\left[\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)\right]=0$$

$$\left(x_0-\frac{a}{2}t^2\right)+\left(y_0-\frac{a}{2}t^2\right)=\frac{0}{-at}$$

$$x_0-\frac{a}{2}t^2+y_0-\frac{a}{2}t^2=0$$

$$x_0+y_0-2\frac{a}{2}t^2=0$$

$$a\,t^2=x_0+y_0$$

$$t^2=\frac{x_0+y_0}{a}$$

$$\boxed{t=\sqrt{\frac{x_0+y_0}{a}}}$$

b) A distância mínima é obtida substituindo-se o valor do tempo encontrado no item (a) na expressão (IV)

19

$$s=\left[\left(x_0-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{x_0+y_0}{a}}\right)^2\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{x_0+y_0}{a}}\right)^2\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s=\left[\left(x_0-\frac{a}{2}\left(\frac{x_0+y_0}{a}\right)\right)^2+\left(y_0-\frac{a}{2}\left(\frac{x_0+y_0}{a}\right)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s=\left[\left(x_0-\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s=\left[\left(\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{2}-\frac{x_0}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s=\left[\frac{1}{4}\left(x_0-y_0\right)^2+\frac{1}{4}\left(x_0-y_0\right)^2\right]^{1/2}$$

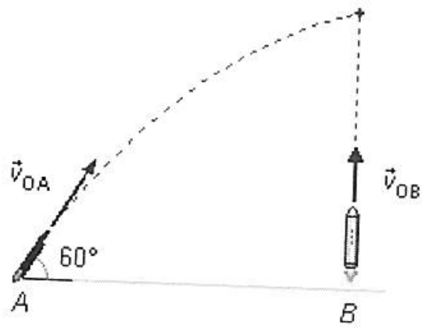
$$s=\left[\frac{2}{4}\left(x_0-y_0\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(x_0-y_0\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\boxed{s=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_0-y_0\right)}$$

20

De dois pontos A e B situados a uma distância de 1000 m, um do outro, sobre um mesmo plano horizontal, lançam-se simultaneamente dois foguetes: um parte do ponto B com uma velocidade inicial de 200 m/s dirigida de baixo para cima e outro do ponto A na direção da vertical que passa por B, formando um ângulo de 60° com o horizonte. Determinar:



a) A velocidade inicial do primeiro foguete para que intercepte o segundo;
b) Depois de quanto tempo se dá o encontro dos dois foguetes;
c) A que altura se dá o encontro;
d) Verificar se esse encontro se efetua durante a subida ou queda do primeiro foguete.
Dado $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Dados do problema

- distância entre os pontos A e B de lançamento: $d = 1000\ \text{m}$;
- ângulo de lançamento do foguete A: $\theta = 60°$;
- velocidade inicial do foguete B: $v_{0B} = 200\ \text{m/s}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência no solo com o eixo Ox apontando para a direita e Oy para cima, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de onde parte o foguete A está em $(x_{0A}, y_{0A}) = (0, 0)$ e o foguete B está em $(x_{0B}, y_{0B}) = (0, 1000)$ conforme a figura 1.

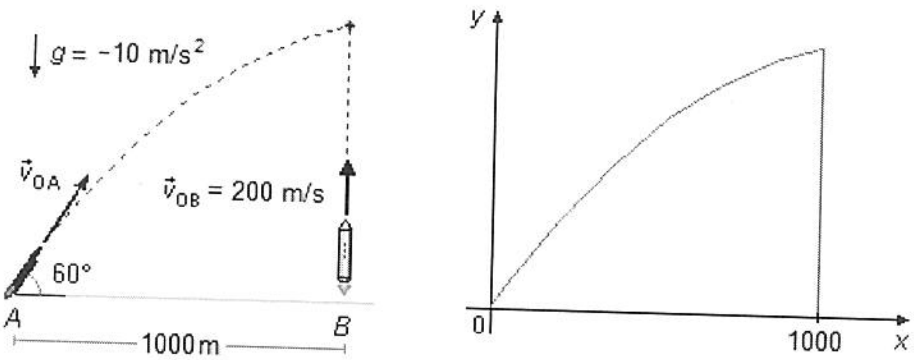


figura 1

O movimento do foguete disparado de A pode ser decomposto ao longo dos eixos x e y. A velocidade inicial v_{0A} com que ele é disparado tem componentes nas direções x e y

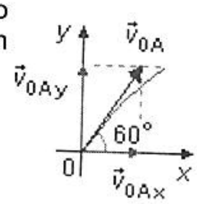


figura 2

$$
\begin{aligned}
v_{0Ax} &= v_{0A}\cos 60° \\
v_{0Ay} &= v_{0A}\,\text{sen}\, 60°
\end{aligned}
$$

Da *Trigonometria* temos que $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}\, 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$v_{0Ax} = \frac{1}{2} v_{0A} \qquad \text{(I)}$$

$$v_{0Ay} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{0A} \qquad \text{(II)}$$

Da decomposição do movimento vemos que na direção *x* não há aceleração agindo sobre o foguete, então ele está em *Movimento Uniforme* (*M.U.*) e seu movimento é regido pela equação

$$S_{Ax}=S_{0Ax}+v_{Ax}t$$

como no movimento uniforme $v_{Ax}=v_{0Ax}$ é constante podemos substituir v_{Ax} pelo valor de (I) e $S_{0Ax}=0$

$$S_{Ax}=0+\frac{1}{2}\,v_{0A}\,t$$

$$S_{Ax}=\frac{1}{2}\,v_{0A}\,t \qquad \text{(III)}$$

Na direção *y* o foguete está sob a ação da aceleração da gravidade, está em *Movimento Uniformemente Variado* (*M.U.V.*) que é regido pelas equações

$$S_{Ay}=S_{0Ay}+v_{0Ay}t-g\frac{t^2}{2}$$

$$v_{Ay}=v_{0Ay}-g\,t$$

substituindo v_{0Ay} pelo valor dado em (II) e $S_{0Ay}=0$

$$S_{Ay}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}v_{0A}\,t-10\,\frac{t^2}{2}$$

$$S_{Ay}=\frac{\sqrt{3}}{2}v_{0A}\,t-5\,t^2 \qquad \text{(IV)}$$

$$v_{Ay}=\frac{\sqrt{3}}{2}v_{0A}-10\,t \qquad \text{(V)}$$

o sinal negativo indica que a aceleração da gravidade está contra a orientação do referencial.

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção *x* temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais ($\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\Delta x_4=\Delta x_5=\Delta x_6$) Na direção *y* temos que no instante em que o foguete é lançado a velocidade v_y começa a diminuir, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez menores ($\Delta y_1>\Delta y_2>\Delta y_3>\Delta y_4>\Delta y_5>\Delta y_6$).

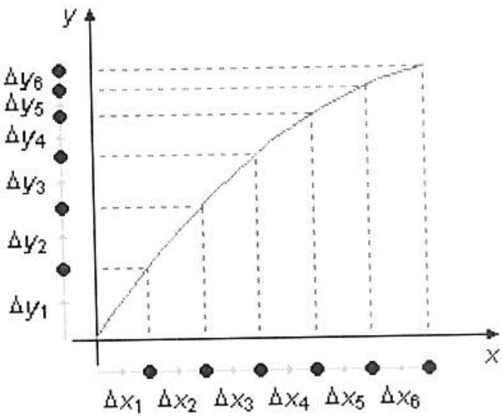


figura 3

O foguete disparado de B só tem movimento ao longo do eixo-y, está sob a ação da aceleração da gravidade em *Movimento Uniformemente Variado* (*M.U.V.*) regido pela equação

$$S_B=S_{0B}+v_{0B}t-g\frac{t^2}{2}$$

substituindo v_{0B} pelo valor dado no problema e $S_{0B}=0$

$$S_B=0+200\,t-10\,\frac{t^2}{2}$$

$$S_B=200\,t-5\,t^2 \qquad \text{(VI)}$$

Solução

a) Para que ocorra o encontro devemos ter a condição

$$S_{Ay}=S_{B}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_{0A}\,t-5\,t^{2}=200\,t-5\,t^{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_{0A}=200$$

$$v_{0A}=\frac{2.200}{\sqrt{3}}$$

$$v_{0A}=\frac{400}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{v_{0A}\approx 231\ \text{m/s}}$$

b) Como o foguete que parte de *B* sobe verticalmente o que parte de *A* deve percorrer a distância de 1000 m na direção *x* para interceptá-lo, substituindo o valor do item anterior e $S_{Ax}=1000\ \text{m}$ na expressão (III), obtemos

$$1000=\frac{1}{2}.231\,t$$

$$t=\frac{2.1000}{231}$$

$$t=\frac{2000}{231}$$

$$\boxed{t=8{,}6\ \text{s}}$$

c) O foguete *B* subirá verticalmente até ocorrer o encontro, substituindo o valor do item anterior na expressão (VI) , temos

$$S_{B}=200.8{,}6-5.8{,}6^{2}$$

$$S_{B}=1720-370$$

$$\boxed{S_{B}=1350\ \text{m}}$$

Observação: poder-se-ia encontrar o mesmo valor substituindo a velocidade do item (a) e o intervalo tempo encontrado em (b) na expressão (IV).

d) Se o instante do encontro for menor que o intervalo de tempo para o foguete *A* atingir a altura máxima o encontro se dará durante a subida, se o instante for maior o encontro se dará durante a descida, Quando o foguete que parte de *A* atinge a altura máxima a componente da sua velocidade na direção *y* se anula $v_{Ay}=0$, o tempo que o foguete de *A* leva para atingir essa altura será obtido substituindo essa condição e a velocidade do item (a) na expressão (V)

$$0=\frac{\sqrt{3}}{2}.231-10\,t$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.231=10\,t$$

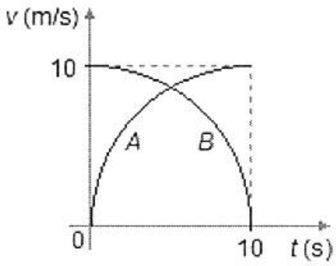
$$t=\frac{\sqrt{3}.231}{2.10}$$

$$t=20\ \text{s}$$

Como o intervalo de tempo para o foguete atingir a altura máxima e maior que o intervalo de tempo para que o ocorra o encontro, este de dá durante a **subida do primeiro foguete**.

O móvel *B* parte do ponto *O* no mesmo instante em que por esse ponto passa o móvel *A*. Ambos os móveis percorrem a mesma trajetória retilínea e as curvas *velocidade* x *tempo* são quartos de circunferência com raios iguais, como mostra a figura ao lado. Determinar:

a) O instante em os móveis possuem velocidades iguais em módulo;
b) O valor desta velocidade, em módulo;
c) O instante em os móveis possuem acelerações iguais em módulo;
d) O valor das acelerações dos móveis *A* e *B*.



Solução

A equação de uma circunferência é dada por

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro da circunferênica e *r* o seu raio.

Como o gráfico das velocidades em função do tempo são arcos de circunferência, podemos fazer as seguintes associações $x = t$, $y = v$ e $r = 10$.

Para o móvel *B* temos uma circunferência centrada na origem $(x_0,y_0)=(0,0)$ (figura 1), assim a equação da velocidade será

$$t^2+v_B^2=10^2$$

$$v_B^2=100-t^2 \qquad \text{(I)}$$

$$v_B=\sqrt{100-t^2} \qquad \text{(II)}$$

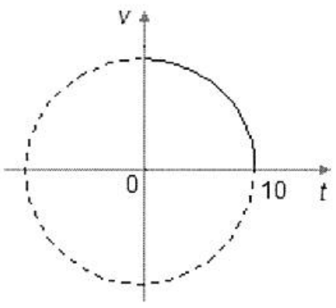


figura 1

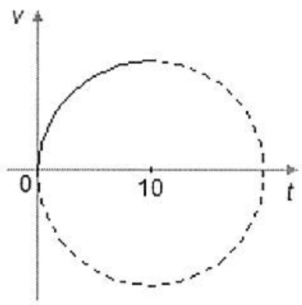


figura 2

Para o móvel *A* temos uma circunferência centrada em $(x_0,y_0)=(10,0)$ (figura 2), assim a equação da velocidade será

$$(t-10)^2+v_A^2=10^2$$

$$v_A^2=100-(t-10)^2 \qquad \text{(III)}$$

$$v_A=\sqrt{100-(t-10)^2} \qquad \text{(IV)}$$

a) Impondo a condição de que as velocidades são iguais e usando as expressões (I) e (III), temos

$$v_B^2=v_A^2$$

$$100-t^2=100-(t-10)^2$$

$$t^2=(t-10)^2$$

$$t^2=t^2-20\,t+100$$
$$-20\,t-100=0$$
$$t=\frac{100}{20}$$

$$\boxed{t=5\ \text{s}}$$

b) Substituindo o resultado do item anterior na expressão (II), obtemos

$$v_B=\sqrt{100-5^2}$$
$$v_B=\sqrt{75}$$

$$\boxed{v_A=v_B=8{,}7\ \text{m/s}}$$

c) A aceleração é dada por

$$a=\frac{dv}{dt}$$

derivando as expressões (II) e (IV) em relação ao tempo temos as acelerações a_A e a_B dos móveis.

derivação de $v_B=\sqrt{100-t^2}$

a função $v_B\,(t)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{dv[u(t)]}{dt}=\frac{dv}{du}\frac{du}{dt}$$

com $v(u)=\sqrt{u}$ e $u(t)=100-t^2$, assim as derivadas serão

$$\frac{dv}{du}=u^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\qquad\text{e}\qquad\frac{du}{dt}=-2t$$

$$\frac{dv_B}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(-2t)=-\frac{t}{\sqrt{100-t^2}}$$

$$a_B=-\frac{t}{\sqrt{100-t^2}}\qquad\text{(V)}$$

derivação de $v_A=\sqrt{100-(t-10)^2}$

a função $v_A\,(t)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{dv[u(t)]}{dt}=\frac{dv}{du}\frac{du}{dt}$$

com $v(u)=\sqrt{u}$ e $u(t)=100-(t-10)^2$, assim as derivadas serão

$$\frac{dv}{du}=u^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\qquad\text{e}\qquad\frac{du}{dt}=-2\,(t-10)$$

$$\frac{dv_{A}}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{u}}[-2\,(t-10)]=-\frac{t-10}{\sqrt{100-(t-10)^{2}}}$$

$$a_{A}=-\frac{t-10}{\sqrt{100-(t-10)^{2}}} \qquad \text{(VI)}$$

Impondo a condição de que as acelerações são iguais e usando as expressões (V) e (VI), temos

$$a_{B}=a_{A}$$

$$-\frac{t}{\sqrt{100-t^{2}}}=-\frac{t-10}{\sqrt{100-(t-10)^{2}}}$$

$$\left[-\frac{t}{\sqrt{100-t^{2}}}\right]^{2}=\left[-\frac{t-10}{\sqrt{100-(t-10)^{2}}}\right]^{2}$$

$$\frac{t^{2}}{100-t^{2}}=\frac{(t-10)^{2}}{100-(t-10)^{2}}$$

$$t^{2}\left[100-(t-10)^{2}\right]=(t-10)^{2}(100-t^{2})$$

$$100\,t^{2}-t^{2}(t-10)^{2}=100\,(t-10)^{2}-t^{2}(t-10)^{2}$$

$$100\,t^{2}=100\,(t-10)^{2}$$

$$t^{2}=t^{2}-20t+100$$

$$-20t+100=0$$

$$t=\frac{100}{20}$$

$$\boxed{t=5\ \text{s}}$$

d) Substituindo o resultado do item anterior na expressão (V), obtemos

$$a_{B}=-\frac{5}{\sqrt{100-5^{2}}}$$

$$a_{B}=-\frac{5}{\sqrt{100-25}}$$

$$a_{B}=-\frac{5}{\sqrt{75}}$$

$$a_{B}=-\frac{5}{8{,}7}$$

$$\boxed{a_{B}\simeq-0{,}6\ \text{m/s}^{2}}$$

Substituindo o resultado do item anterior na expressão (VI), temos

$$a_{A}=-\frac{5-10}{\sqrt{100-(5-10)^{2}}}$$

$$a_{A}=-\frac{-5}{\sqrt{100-(-5)^{2}}}$$

$$a_{A}=\frac{5}{\sqrt{100-25}}$$

$$a_{A}=\frac{5}{\sqrt{75}}$$

$$a_{B}=-\frac{5}{8{,}7}$$

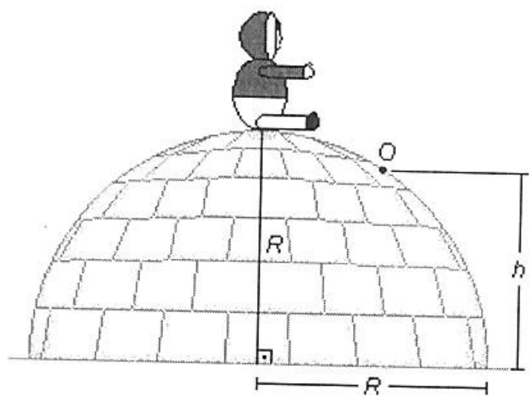
27

$$\boxed{a_A \simeq 0{,}6\ \text{m/s}^2}$$

Observação: vemos que em módulo as acelerações dos móveis são iguais (0,6 m/s ^{2}), mas elas possuem sinais contrários, enquanto o móvel *B* está diminuindo sua velocidade (freando) o móvel *A* está aumentando a velocidade (acelerando), o que concorda com as curvas mostradas no gráfico do problema.

28

Um garoto está sentado sobre um iglu de forma hemisférica, conforme ilustra a figura. Se ele começar a deslizar a partir do repouso, desprezando atritos, a que altura h relativa à horizontal estará o ponto O em que ele perderá contato coma calota hemisférica de raio R?



Esquema do problema

Quando o garoto está no topo do iglu as forças que agem nele são a força peso ($\vec{P}$) e a normal ($\vec{N}$), reação do iglu ao peso do garoto. A condição para que o garoto perca contato com a calota e que a normal seja igual a zero, ele descola do iglu e não há mais reação do iglu ao peso do garoto. Neste momento a única força agindo nele será o seu peso que pode ser decomposto em duas componentes, uma radial que forma um ângulo θ com a força peso na vertical, que pode ser escrita como $P\cos\theta$, e outra componente tangencial, que será $P\operatorname{sen}\theta$, estes elementos podem ser vistos na figura 1.

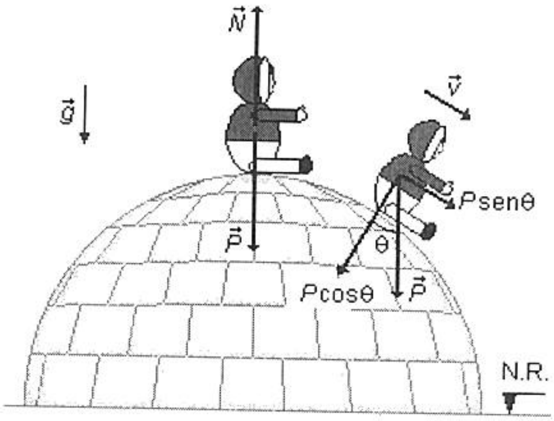


figura 1

Dado do problema

- raio do iglu: R.

Solução

Pelo *Princípio da Conservação da Energia Mecânica* a energia do garoto no topo do iglu deve ser igual a energia no ponto O onde ele perde contato com o hemisfério. Tomando-se o chão como *Nível de Referência* (*N.R.*), a partir do qual a energia potencial será medida temos que no topo do iglu o garoto está em repouso, sua velocidade é igual a zero, portanto ele só possui energia potencial proporcional a R. No ponto O ele está deslizando com uma velocidade v, possui energia cinética somada a energia potencial proporcional a altura h do chão. Assim podemos escrever

$$E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{topo}}=E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{O}}$$
$$E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{topo}}=E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{P}}$$
$$m g R=\frac{m v^{2}}{2}+m g h$$

simplificando a massa m de ambos os lados da igualdade

$$g R=\frac{v^{2}}{2}+g h \qquad \text{(I)}$$

Para a determinação de v vemos pela figura 2 que o ângulo formado entre o raio R do iglu e a altura h em é θ, logo

$$\cos\theta=\frac{h}{R} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando a *2.ª Lei de Newton*, temos

$$\vec{F}_{CP}=m\vec{a}_{CP}$$

a componente do peso na direção radial ($P\cos\theta$) é a força centrípeta a que o garoto está submetido e a aceleração centrípeta é dada por $a_{CP}=\dfrac{v^2}{R}$, assim

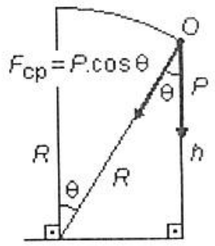


figura 2

$$P\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$$

sendo a força peso dada por $P=mg$

$$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$$

simplificando a massa m de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$g\cos\theta=\frac{v^2}{R} \qquad \text{(III)}$$

substituindo (II) em (III)

$$g\,\frac{h}{R}=\frac{v^2}{R}$$

simplificando o raio R no denominador de ambos os lados da igualdade, vem

$$v^2=gh \qquad \text{(IV)}$$

substituindo (IV) em (I) obtemos finalmente

$$gR=\frac{gh}{2}+gh$$

simplificando a aceleração da gravidade g de ambos os lados da igualdade

$$R=\frac{h}{2}+h$$

$$R=\frac{h+2h}{2}$$

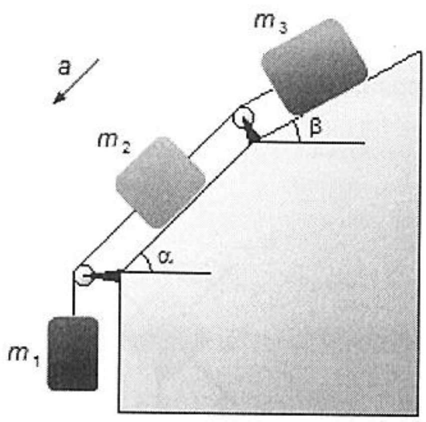
$$R=\frac{3h}{2}$$

$$\boxed{h=\frac{2}{3}R}$$

3C

7

Um sistema é formado por um corpo de massa m_1, suspenso verticalmente, ligado a um corpo de massa m_2, apoiado sobre um plano inclinado de um ângulo α, que por sua vez está ligado a um corpo de massa m_3, apoiado sobre um plano inclinado de um ângulo β. A ligação entre os corpos é feita por cordas inextensíveis de massas despresíveis e através de polias ideais sem atrito. Sabendo que $m_1 = 2\,m_2$, pergunta-se, qual deve ser a razão das massas m_2 para m_3 de tal modo que o sistema desça com aceleração constante a.



Dados do problema

- massa do corpo 1: m_1;
- massa do corpo 2: m_2;
- massa do corpo 3: m_3;
- razão entre as massas 1 e 2: $m_1 = 2\,m_2$;
- ângulo do plano inclinado do corpo 2: α;
- ângulo do plano inclinado do corpo 3: β.

Solução

Isolando os corpos e pesquisando as forças que agem em cada um deles aplicamos a *2.ª Lei de Newton*

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Bloco 1 (figura 1):

- $\mathbf{P}_1$: força peso;
- $\mathbf{T}_{12}$: tração na corda entre os corpos 1 e 2.

figura 1

Adotamos o sentido positivo para baixo no mesmo sentido da aceleração. Na direção horizontal não há forças agindo no bloco, na direção vertical da *2.ª Lei de Newton* obtemos

$$P_1 - T_{12} = m_1 a \qquad \text{(I)}$$

a força peso é dada por $P_1 = m_1 g$, substituindo em (I), obtemos

$$m_1 g - T_{12} = m_1 a \qquad \text{(II)}$$

Bloco 2 (figura 2-A):

- $\mathbf{P}_2$: peso do bloco 2;
- $\mathbf{N}_2$: reação normal do plano sobre o bloco 2;
- $\mathbf{T}_{12}$: tração na corda entre os blocos 1 e 2;
- $\mathbf{T}_{23}$: tração na corda entre os blocos 2 e 3.

Adotamos um sistema de referência *xy* com eixo *x* na direção do plano inclinado e sentido descendente. A força peso pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ao eixo-*x* ($\mathbf{P}_{2P}$) e a outra normal ou perpendicular ($\mathbf{P}_{2N}$). Da figura 2-B vemos que a força peso

31

é perpendicular ao plano horizontal, o ângulo entre o plano inclinado e o plano horizontal é α, como os ângulos internos de um triângulo devem somar π o ângulo entre a força peso e a componente paralela deve ser $\alpha+\gamma+\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow\gamma=\pi-\alpha-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

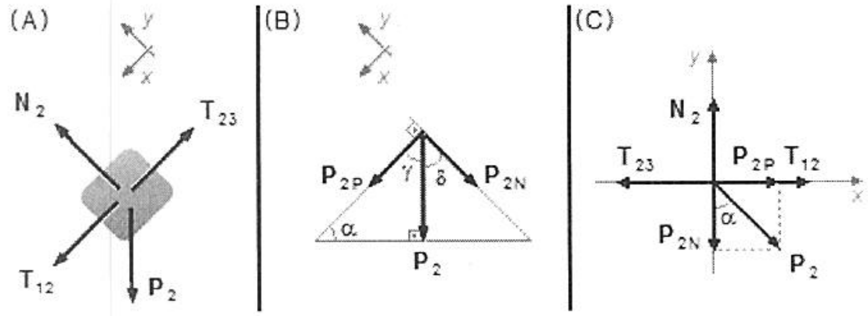


figura 2

As componentes do peso nas direções x e y são perpendiculares entre si, no triângulo à direita temos que o ângulo entre as força peso e a componente do peso na direção y é $\delta=\frac{\pi}{2}-\gamma\Rightarrow\delta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Rightarrow\delta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha\Rightarrow\delta=\alpha$.

Desenhando o vetores num sistema de eixos coordenados na direção y a componente normal da força peso e a reação normal se anulam, não há movimento nesta direção. Na direção x da 2.ª *Lei de Newton* temos

$$P_{2P}+T_{12}-T_{23}=m_2a \tag{III}$$

Da figura 2-C a componente do peso na direção x é escrita como

$$P_{2P}=P_2\,\text{sen}\,\alpha \tag{IV}$$

sendo força peso dado por $P_2=m_2g$, substituindo em (IV) e este em (III), obtemos

$$m_2g\,\text{sen}\,\alpha+T_{12}-T_{23}=m_2a \tag{V}$$

Bloco 3 (figura 3-A):

- $\mathbf{P}_3$: peso do bloco 3;
- $\mathbf{N}_3$: reação normal do plano sobre o bloco 3;
- $\mathbf{T}_{23}$: tração na corda entre os blocos 2 e 3.

Adotamos um sistema de referência com a mesma orientação do bloco anterior. A força peso pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ao eixo-x ($\mathbf{P}_{3P}$) e a outra normal ou perpendicular ($\mathbf{P}_{3N}$). Da figura 3-B vemos que a força peso é perpendicular ao plano horizontal, o ângulo entre o plano inclinado e o plano horizontal é β, como os ângulos internos de um triângulo devem somar π o ângulo entre a força peso e a componente paralela deve ser $\beta+\gamma+\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow\gamma=\pi-\beta-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$.

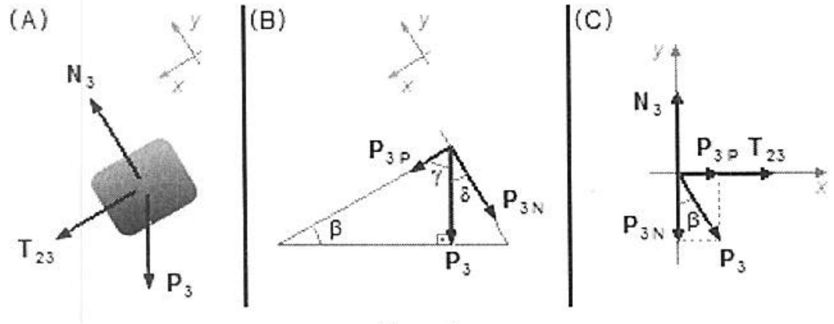


figura 3

As componentes do peso nas direções *x* e *y* são perpendiculares entre si, no triângulo à direita temos que o ângulo entre as força peso e a componente do peso na direção *y* é $\delta=\frac{\pi}{2}-\gamma \Rightarrow \delta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \Rightarrow \delta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\beta \Rightarrow \delta=\beta$.

Desenhando o vetores num sistema de eixos coordenados na direção *y* a componente normal da força peso e a reação normal se anulam, não há movimento nesta direção. Na direção *x* da *2.ª Lei de Newton* temos

$$P_{3P}+T_{23}=m_3 a \tag{VI}$$

Da figura 3-C a componente do peso na direção x é escrita como

$$P_{3P}=P_3\ \text{sen}\beta \tag{VII}$$

sendo força peso dado por $P_3=m_3 g$, substituindo em (VII) e este em (VI), obtemos

$$m_3 g\ \text{sen}\beta+T_{23}=m_3 a \tag{VIII}$$

Somando as expressões (II), (V) e (VIII), temos

$$\begin{array}{|l}
m_1 g-T_{12}=m_1 a \\
m_2 g\ \text{sen}\,\alpha+T_{12}-T_{23}=m_2 a \\
m_3 g\ \text{sen}\beta+T_{23}=m_3 a \\
\hline
m_1 g+m_2 g\ \text{sen}\alpha+m_3 g\ \text{sen}\beta=m_1 a+m_2 a+m_3 a
\end{array}$$

Usando a relação dada no problema entre as massas dos corpos 1 e 2, $m_1 = 2\,m_2$, reescrevemos a expressão acima como

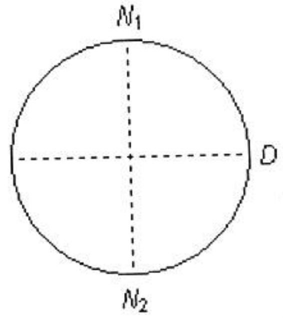
$$\begin{gathered}
2m_2 g+m_2 g\ \text{sen}\,\alpha+m_3 g\ \text{sen}\,\beta=2m_2 a+m_2 a+m_3 a \\
2m_2 g+m_2 g\ \text{sen}\,\alpha+m_3 g\ \text{sen}\,\beta=3m_2 a+m_3 a \\
2m_2 g+m_2 g\ \text{sen}\,\alpha-3m_2 a=m_3 a-m_3 g\ \text{sen}\,\beta \\
m_2\,(\,2g+g\ \text{sen}\,\alpha-3a\,)=m_3\,(\,a-g\ \text{sen}\,\beta\,)
\end{gathered}$$

$$\boxed{\frac{m_2}{m_3}=\frac{a-g\ \text{sen}\,\beta}{2g+g\ \text{sen}\,\alpha-3a}}$$

33

8

Um motociclista, num globo da morte, comunica a seu veículo um a velocidade mais que suficiente para passar pelo topo sem cair. Nessas condições desliga o motor e sem usar os freios passa a descrever uma circunferência situada num plano vertical. Desprezando o atrito e supondo P o peso da moto e seu ocupante, calcule:
a) A diferença entre as reações do globo no ponto mais baixo e mais alto da trajetória ($N_2 - N_1$);
b) O valor de N_3, reação do globo no ponto D, supondo que $N_1 = 2P$.



Dado do problema

- peso da moto e do piloto: P;
- reação em N_1: $N_1 = 2P$;
- adotado-se M para a massa do conjunto moto e piloto e g para a aceleração da gravidade.

Solução

a) Para encontrarmos a resultante das forças sobre a moto no ponto mais alto do globo, aplicamos a 2.ª *Lei de Newton* de acordo com o esquema da figura 1 (isolando a moto do globo)

$$\vec{F} = m.\vec{a} \qquad \text{(I)}$$

onde $\vec{F}$ será a resultante dada pelas forças peso $\vec{P}$ e normal $\vec{N}_1$ e aceleração será $\vec{a} = \vec{a}_{CP}$ onde temos a aceleração centrípeta (que faz a moto fazer a curva do globo), que em módulo vale

$$a_{CP} = \frac{v^2}{R}$$

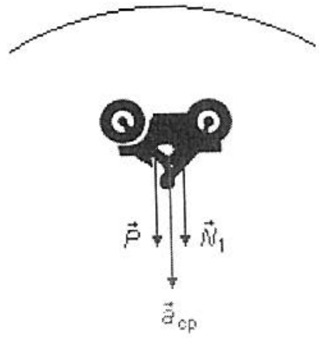


figura 1

sendo v a velocidade da moto no ponto desejado e R o raio do globo.
A aplicação da equação (I) neste caso fica

$$N_1 + P = M\frac{v_1^2}{R} \qquad \text{(II)}$$

No ponto mais baixo do globo, isolando os corpos, temos o esquema da figura 2 e a aplicação da expressão (I) nos leva a

$$N_2 - P = M\frac{v_2^2}{R} \qquad \text{(III)}$$

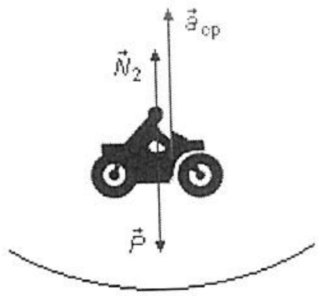


figura 2

Para encontrarmos a velocidade no ponto mais baixo do globo (v_2) em função da velocidade na parte superior (v_1) usamos o *Princípio da Conservação da Energia Mecânica*

$$E_M^1 = E_M^2$$

Adotamos a parte mais baixa do globo como nível de referência (N.R.), figura 3, assim na parte mais alta (1) o corpo tem energias cinética e potencial e na parte mais baixa (2) apenas energia cinética

$$E_C^1+E_P^1=E_C^2$$

$$\frac{M.v_1^2}{2}+M.g.2R=\frac{M.v_2^2}{2}$$

simplificando M que é comum a todos os termos da equação e multiplicando-a por 2, temos

$$2\frac{v_1^2}{2}+2g.2R=2\frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2^2=v_1^2+4g.R \qquad \text{(IV)}$$

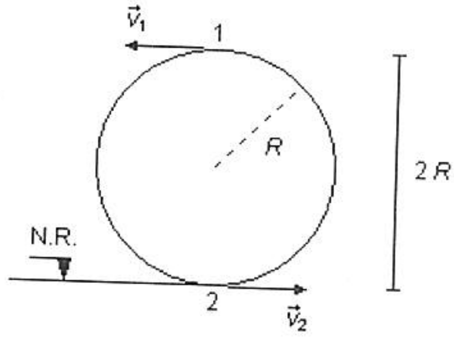


figura 3

Substituindo a expressão (IV) obtida acima para v_2^2 na expressão (III) podemos escrever

$$N_2-P=\frac{M}{R}.\left(v_1^2+4.g.R\right)$$

$$N_2-P=M\frac{v_1^2}{R}+\frac{M.4.g.R}{R}$$

Do lado direito da igualdade o primeiro termo é dado pela equação (II) acima e simplificando R no segundo termo ficamos com

$$N_2-P=N_1+P+4M.g$$

como

$$P=M.g \qquad \text{(V)}$$

temos que

$$N_2-N_1=P+P+4P$$

$$\boxed{N_2-N_1=6P}$$

b) Para o cálculo de N_3 aplicamos a *2.ª Lei de Newton* à situação mostrada ao lado. Como queremos a reação do globo que está na direção horizontal desprezamos o peso que age na direção vertical, assim na equação (I) a resultante das forças e dada apenas pela reação N_3 o que nos leva a

$$N_3=M\frac{v_3^2}{R} \qquad \text{(VI)}$$

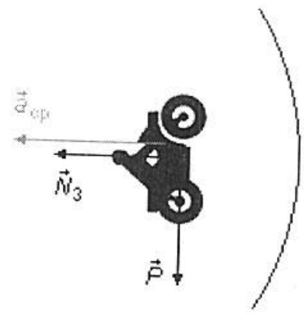


figura 4

Para o cálculo de v_3 usamos novamente o *Princípio da Conservação da Energia Mecânica*

$$E_M^2=E_M^3$$

36

Novamente sendo a parte mais baixa do globo como nível de referência (N.R.), no ponto (3) o corpo tem energias cinética e potencial e na parte mais baixa (2) apenas energia cinética (figura 5)

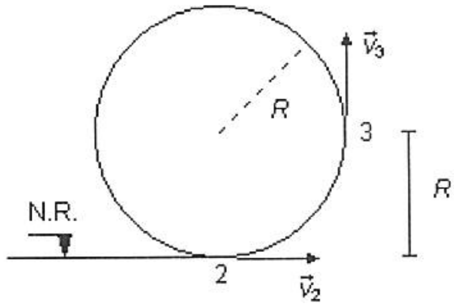


figura 5

$$E_C^2 = E_C^3 + E_P^3$$

$$\frac{M.v_2^2}{2} = \frac{M.v_3^2}{2} + M.g.R$$

simplificando M que é comum a todos os termos da equação e multiplicando-a por 2, temos

$$2\frac{v_2^2}{2} = 2\frac{v_3^2}{2} + 2g.R$$

$$v_2^2 = v_3^2 + 2g.R \qquad \text{(VII)}$$

Substituindo o valor de v_3^2 obtido em (VII) expressão (VI) temos

$$N_3 = \frac{M}{R}.\left(v_1^2 + 2.g.R\right)$$

$$N_3 = M\frac{v_1^2}{R} + \frac{M.2.g.R}{R}$$

No lado direito da igualdade o primeiro termo é dado pela equação (II) e simplificando R no segundo termo obtemos

$$N_2 - P = N_1 + P + 4M.g$$

aplicando o resultado de (V) e usando o dado do problema que $N_1 = 2P$ temos

$$N_3 = 2P + P + 2P$$

$$\boxed{N_3 = 5\,P}$$

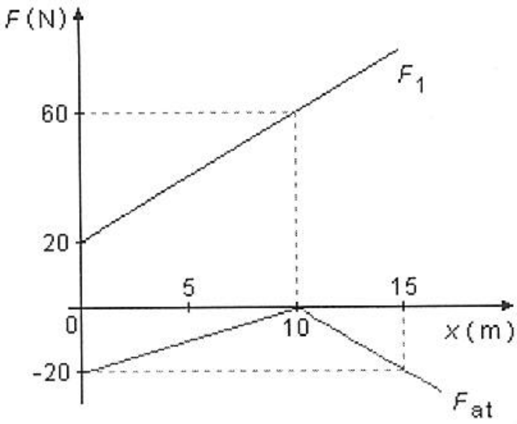
9

O gráfico representa a variação das forças F_1 e F_{at} (força de atrito) que agem num corpo que se desloca sobre o eixo Ox. Calcular:

a) O trabalho da força F_1 para arrastar o corpo nos primeiros 10 m;

b) O trabalho da força de atrito enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;

c) O trabalho da força resultante para arrastar o corpo nos primeiros 15 m.



Solução

a) O trabalho da força F_1 será numericamente igual a área do trapézio sob a reta que representa esta força (em azul) e o eixo Ox entre 0 e 10 m, marcada em cinza na figura 1 ao lado. A área do trapézio é dada pela equação

$$A=\frac{(B+b)\,h}{2}$$

onde temos a base maior $B=60$, base menor $b=20$ e altura $h=10$

$$\Im \overset{N}{=} A=\frac{(60+20).10}{2}$$

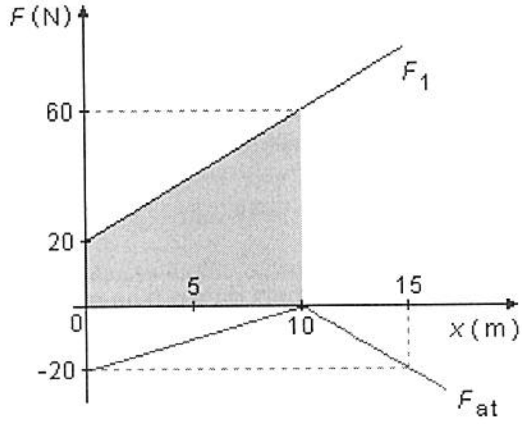


figura 1

$$\boxed{\Im=400\ \text{J}}$$

b) O trabalho da força de atrito F_{at} será numericamente igual à área do triângulo sob o eixo Ox e limitado pela reta que representa a força de atrito (em vermelho) entre 0 e 10 m, como mostrado no desenho da figura 2 abaixo. A área do triângulo (em cinza) será

$$A=\frac{B\,h}{2}$$

onde temos a base do triângulo $B=10$ e altura $h=-20$

$$\Im \overset{N}{=} A=\frac{10.(-20)}{2}$$

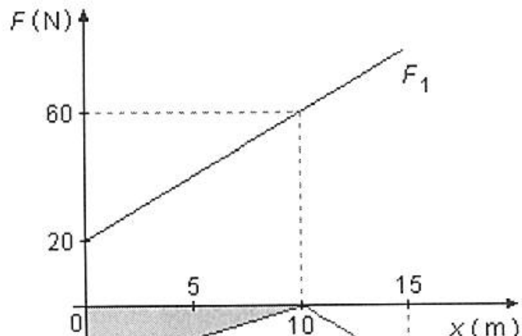


figura 2

$$\boxed{\Im=-100\ \text{J}}$$

c) O trabalho da força resultante R será dado pela soma das áreas que representam o trabalho da força F_1 acima do eixo Ox (área 1 na figura 3) e da força de atrito F_{at} abaixo do eixo Ox (áreas 2 e 3 na figura 3) entre 0 e 15 m.

Para o cálculo da área acima do eixo Ox precisamos saber o valor da força F_1 em 15 m, para isso vamos determinar a equação da reta que representa a força F_1. A equação da reta é

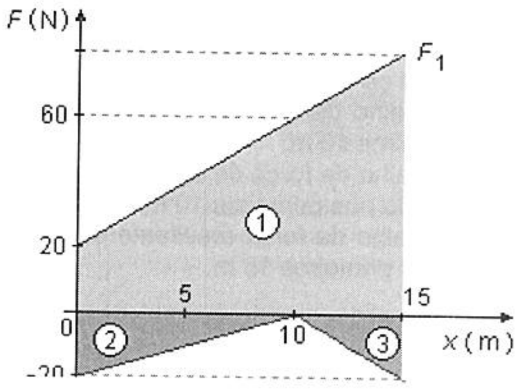


figura 3

$$F(x)=a\,x+b$$

Para determinar os coeficientes a e b vemos do gráfico que a reta deve passar pelos pontos $(x,F)=(0,20)$ e $(x,F)=(10,60)$, substituindo esses valores na equação da reta acima, teremos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l}20=a.0+b\\60=a.10+b\end{array}\right.$$

este é um sistema de duas equações a duas incógnitas, os coeficientes a e b, da primeira equação temos que $b=20$, substituindo esse valor na segunda equação temos

$$\begin{gathered}10\,a+20=60\\10a=60-20\\a=\frac{40}{10}\\a=4\end{gathered}$$

substituindo os valores de a e b na equação da reta a força será dada pela expressão

$$F(x)=4\,x+20$$

para $x=15$ m a força será igual a

$$\begin{gathered}F(15)=4.15+20\\F(15)=60+20\\F(15)=80\text{ N}\end{gathered}$$

Então o trabalho da força F_1 entre 0 e 15 m será numericamente igual a área (1) do trapézio em cinza claro, onde base maior $B=60$; base menor $b=20$ e altura $h=15$

$$\begin{gathered}\Im_1\overset{\text{N}}{=}A=\frac{(60+20).15}{2}\\\Im_1=750\text{ J}\end{gathered}$$

O trabalho da força de atrito pode ser calculado em duas partes, primeiro pela área do triângulo entre 0 e 10 m (área (2) na figura 3 acima em cinza escuro) já calculado no item (b) e igual a $\Im_2=-100$ J . A segunda parte deve ser calculada pela área (3) do triângulo entre 10 m e 15 m, para essa área temos base do triângulo $b=5$ e altura $h=-20$

$$\begin{gathered}\Im_3\overset{\text{N}}{=}A=\frac{5.(-20)}{2}\\\Im_3=-50\text{ J}\end{gathered}$$

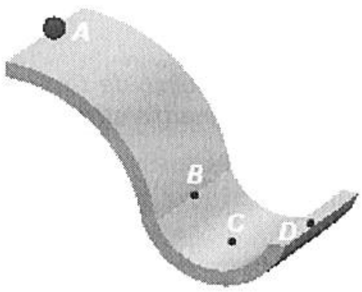
Finalmente o trabalho da força resultante (R) será dado pela soma das três partes calculadas

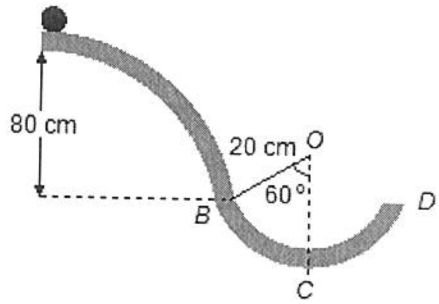
$$\Im_R = \Im_1 + \Im_2 + \Im_3$$
$$\Im_R = 750 + (-100) + (-50)$$

$$\boxed{\Im_R = 600\ \text{J}}$$

10

Uma pequena esfera é posta a deslizar sobre uma superfície lisa e sem atrito de maneira a descrever a curva *ABCD* situada num plano vertical. O trecho *BCD* é um arco de circunferência de centro *O* e raio 20 cm. Admitindo que o móvel é abandonado no ponto *A* do repouso, calcular a intensidade da reação normal à superfície que atua sobre a esfera ao passar pelo ponto *B* situado 80 cm abaixo de *A* e tal que o ângulo formado pelo segmento *BO* com a vertical seja 60°. A massa do móvel é de 5 g e a aceleração da gravidade 10m/s².





Dados do problema

- raio da superfície cilíndrica: $r = 20$ cm;
- velocidade inicial da esfera: $v_0 = 0$ m/s;
- altura inicial do corpo em relação ao ponto *B*: $h_A = 80$ cm;
- ângulo de abertura em relação à vertical: $\theta = 60°$;
- massa do corpo: $m = 5$ g;
- aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s².

Esquema do problema

O móvel parte do repouso ($\vec{v}_A = 0$) e ao atingir o ponto *B* começa a descrever uma trajetória em circunferência, neste ponto possui uma velocidade tangencial $\vec{v}_B$ e uma aceleração centrípeta $\vec{a}_{CP}$ responsável por fazer o móvel fazer a curva (a aceleração centrípeta altera a direção e o sentido da velocidade tangencial, mas não o seu módulo), conforme figura 1-A.

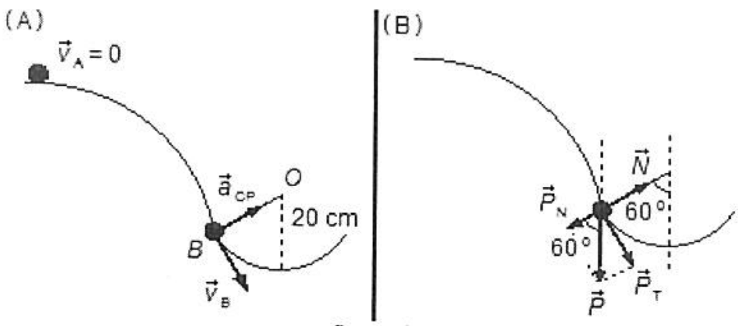


figura 1

No ponto *B* atuam a força peso ($\vec{P}$) e a reação normal ($\vec{N}$) da superfície sobre a esfera. A força peso pode ser decomposta na direção tangente ($\vec{P}_T$) e na direção normal ou perpendicular ($\vec{P}_N$) com a superfície (figura 1-B). O ângulo entre a força peso $\vec{P}$ e a componente normal $\vec{P}_N$ é de 60°, este é o mesmo ângulo dado no problema formado entre o segmento *BO* e a vertical, estes ângulo são correspondentes.

Solução

Em primeiro lugar devemos converter a massa do corpo dada em gramas (g) para quilogramas (kg), a altura inicial e o raio da circunferência dados em centímetros (cm) para metros (m) usados no *Sistema Internacional* (*S.I.*)

43

$$m=5\ \text{g}.\frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}}=5.10^{-3}\ \text{kg}$$

$$h_{A}=80\ \text{cm}.\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}=8.10^{1}.10^{-2}\ \text{kg}=8.10^{-1}\ \text{m}$$

$$r=20\ \text{cm}.\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}=2.10^{1}.10^{-2}\ \text{kg}=2.10^{-1}\ \text{m}$$

Para determinarmos a velocidade no ponto *B* usamos o *Princípio da Conservação da Energia Mecânica*, a energia mecânica no ponto *A* deve ser igual a energia em *B*

$$\begin{gathered}E_{M}^{A}=E_{M}^{B}\\ E_{P}^{A}+E_{C}^{A}=E_{P}^{B}+E_{C}^{B}\\ mgh_{A}+\frac{mv_{A}^{2}}{2}=mgh_{B}+\frac{mv_{B}^{2}}{2}\end{gathered}$$

simplificando a massa *m* de ambos os lados da igualdade, temos

$$gh_{A}+\frac{v_{A}^{2}}{2}=gh_{B}+\frac{v_{B}^{2}}{2} \qquad \text{(I)}$$

Adotando um *Nível de Referência* (*N.R.*) no ponto *B* (figura 2), a altura deste ponto será nula ($h_B=0$), como a velocidade inicial também é nula ($v_A=0$), a expressão (I) se reduz a

$$\begin{gathered}gh_{A}+\frac{0^{2}}{2}=g.0+\frac{v_{B}^{2}}{2}\\ gh_{A}+0=0+\frac{v_{B}^{2}}{2}\\ gh_{A}=\frac{v_{B}^{2}}{2}\\ v_{B}^{2}=2gh_{A}\end{gathered} \qquad \text{(II)}$$

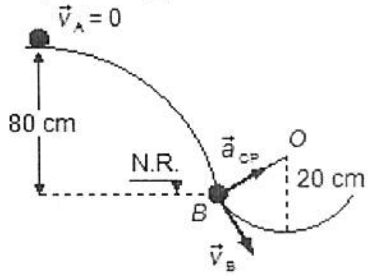


figura 2

No ponto *B* a esfera começa a descrever uma trajetória circular, aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$\vec{F}_{CP}=m\vec{a}_{CP}$$

Da figura 1-B adotamos o sentido positivo para o centro *O* da circunferência, assim a resultante da força centrípeta será, em módulo

$$F_{CP}=N-P_{N} \qquad \text{(III)}$$

a componente do peso na direção normal ($\vec{P}_N$) será dada por

$$P_{N}=P\cos 60^{\circ} \qquad \text{(IV)}$$

sendo a força peso dada por $P=mg$ e lembrando da *Trigonometria* que $\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$ substituindo estes valores na expressão (IV), temos

$$\begin{gathered}P_{N}=mg\frac{1}{2}\\ P_{N}=\frac{mg}{2}\end{gathered} \qquad \text{(V)}$$

substituindo a expressão (V) em (III), obtemos

$$F_{CP}=N-\frac{mg}{2} \tag{VI}$$

A aceleração centrípeta, no ponto *B*, é dada por

$$a_{CP}=\frac{v_B^2}{r} \tag{VII}$$

substituindo a velocidade encontrada em (II) em (VII), temos

$$a_{CP}=\frac{2gh_A}{r} \tag{VIII}$$

Substituindo as expressões (VI) e (VIII) a *2.ª Lei de Newton* fica, em módulo

$$N-\frac{mg}{2}=m\frac{2gh_A}{r}$$
$$N=m\frac{2gh_A}{r}+\frac{mg}{2}$$

substituindo os valores dados no problema, temos finalmente

$$N=5.10^{-3}.\frac{2.10.8.10^{-1}}{2.10^{-1}}+\frac{5.10^{-3}.10}{2}$$
$$N=5.10^{-3}.80.10^{-1}.10^{1}+5.10^{-3}.5$$
$$N=400.10^{-3}+25.10^{-3}$$
$$N=425.10^{-3}$$

$$\boxed{N=0{,}425\ \text{N}}$$

45