Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

INTRODUÇÃO AO LABORATÓRIO DE FENÔMENOS

Prof. Alysson Fábio Ferrari
alysson.ferrari (at) ufabc (pt) edu (pt) br

TÓPICO 1 - NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Notação Científica

Notação Científica é uma forma conveniente de escrever números muito pequenos, ou muito grandes.

$10^{-4} = 0{,}0001$

$10^{-3} = 0{,}001$

$10^{-2} = 0{,}01$

$10^{-1} = 0{,}1$

$10^{0} = 1$

$10^{1} = 10$

$10^{2} = 100$

$10^{3} = 1.000$

$10^{4} = 10.000$

$$27836463{,}34934893789 \times 10^{n}$$

n $\qquad$ n

$n \quad n < 0$ $\qquad$ $n \quad n > 0$

Notação Científica

A primeira vantagem de usar a notação científica é tornar mais fácil representar números muito grandes ou muito pequenos.

0,0000000000000000000003435 $= 3{,}435 \times 10^{20}$

47665000000000000000000,0 $= 4{,}7665 \times 10^{-23}$

Números grandes e pequenos não vão faltar no estudo da física!

Avogadro's number	N_A	6.022142×10^{23} particles/mol
Boltzmann's constant	k	1.380650×10^{-23} J/K
Bohr magneton	$m_B = e\hbar$	$9.2740095 \times 10^{-24}$ J/T
Coulomb constant	$k = 1/4\pi\varepsilon_0$	$8.987551788 \times 10^{9}$ $N \cdot m^2/C^2$
Compton wavelength	$\lambda_c = h/m_e c$	$2.42631024 \times 10^{-12}$ m
Fundamental charge	e	1.602176×10^{-19} C
Gas constant	$R = N_A k$	8.31447 J/mol·K $= 1.987\ 22$ cal/mol·K
		$= 8.20578 \times 10^{-2}$ L·atm/mol·K
Gravitational constant	G	6.6742×10^{-11} $N \cdot m^2/kg^2$
Mass, of electron	m_e	9.109382×10^{-31} kg
		$= 510.9989$ keV/c^2
of proton	m_p	1.672622×10^{-27} kg

Notação Científica

Nomes e símbolos convencionais para algumas potências de dez.

Potências de Dez	Número	Símbolo
10^{-18}	0.000000000000000001	a (atto)
10^{-15}	0.000000000000001	f (femto)
10^{-12}	0.000000000001	p (pico)
10^{-9}	0.000000001	n (nano)
10^{-6}	0.000001	µ (micro)
10^{-3}	0.001	m (mili)
10^{-2}	0.01	c (centi)
10^{-1}	0.1	d (deci)
10^{0}	1	
10^{1}	10	da (deca)
10^{2}	100	h (hecto)
10^{3}	1000	k (quilo)
10^{6}	1000000	M (mega)
10^{9}	1000000000	G (giga)
10^{12}	1000000000000	T (tera)
10^{15}	1000000000000000	P (peta)
10^{18}	1000000000000000000	E (exa)

$1\ cm = 0{,}01\ m = 10^{-2}\ m$

$1\ kg = 1000\ g = 10^{3}\ g$

$1\ nm =$

$= 0{,}000000001\ m$

$= 10^{-9}\ m$

Notação Científica

Vai ser importante também saber *manipular* números em notação científica.

$$\sqrt{\frac{(4\times 10^5)\times(1.5\times 10^{15})}{3\times 10^8}} = \left(\frac{4\times 1{,}5}{3}\times\frac{10^5\times 10^{15}}{10^8}\right)^{1/2}$$

$$= \left(2\times 10^{5+15-8}\right)^{1/2} = \left(2\times 10^{12}\right)^{1/2} = 2^{1/2}\times\left(10^{12}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\times 10^6 \simeq 1{,}41\times 10^6$$

$$\sqrt{\frac{(4\times 10^5)\times(1.5\times 10^{15})}{3\times 10^7}} = \left(2\times 10^{13}\right)^{1/2}$$

$$= \left(20\times 10^{12}\right)^{1/2} = 20^{1/2}\times\left(10^{12}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{20}\times 10^6 \simeq 4{,}47\times 10^6$$

Notação Científica

Para aprender mais...

- Apêndice B do livro-texto (Serway, Princípios da Física 1) contêm uma seção sobre Notação Científica, incluindo alguns exercícios.
- Vídeos: como este assunto é parte do conteúdo do ensino médio e de vestibulares, você encontrará dezenas de vídeos no Youtube explicando notação científica, erros comuns, exemplos adicionais, etc…
- Existe um vídeo clássico chamado "Powers of Ten" que mostra as diferentes escalas de comprimento estudadas pela ciência moderna.

PARTE 1:
O QUE SIGNIFICA MEDIR?

Unidades e Dimensões

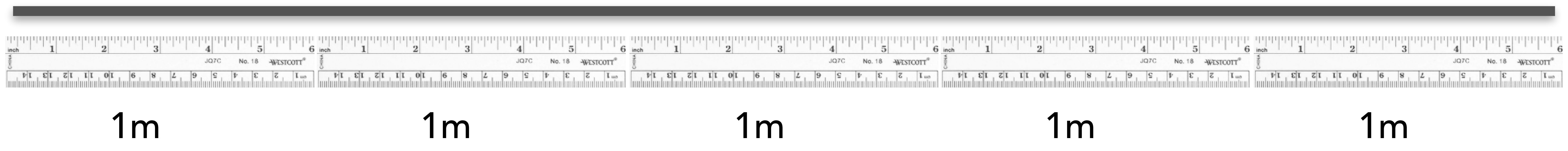
- Algumas quantidades podem ser representadas diretamente por um **número**.
- Por exemplo: o número de moléculas de gás num compartimento.
- Tais grandezas são ditas **adimensionais** ou **sem dimensão**.
- Geralmente, são grandezas relacionadas a uma contagem, ou são obtidas pela *razão* entre grandezas dimensionais.
- Não são em geral as quantidades em que estaremos interessados para estudar física!

Unidades e Dimensões

- A maioria das grandezas de interesse não é bem especificada por um número apenas!
- Por exemplo: não faz sentido dizer que um fio mede 5.
- Faz sentido dizer que um fio mede 5m, ou 5 jardas. Mas o que isso significa?

Unidades e Dimensões

- Dizer que o fio vale 5m significa que este fio é **cinco vezes mais longo** do que um comprimento padronizado, que chamamos de “1 metro”.



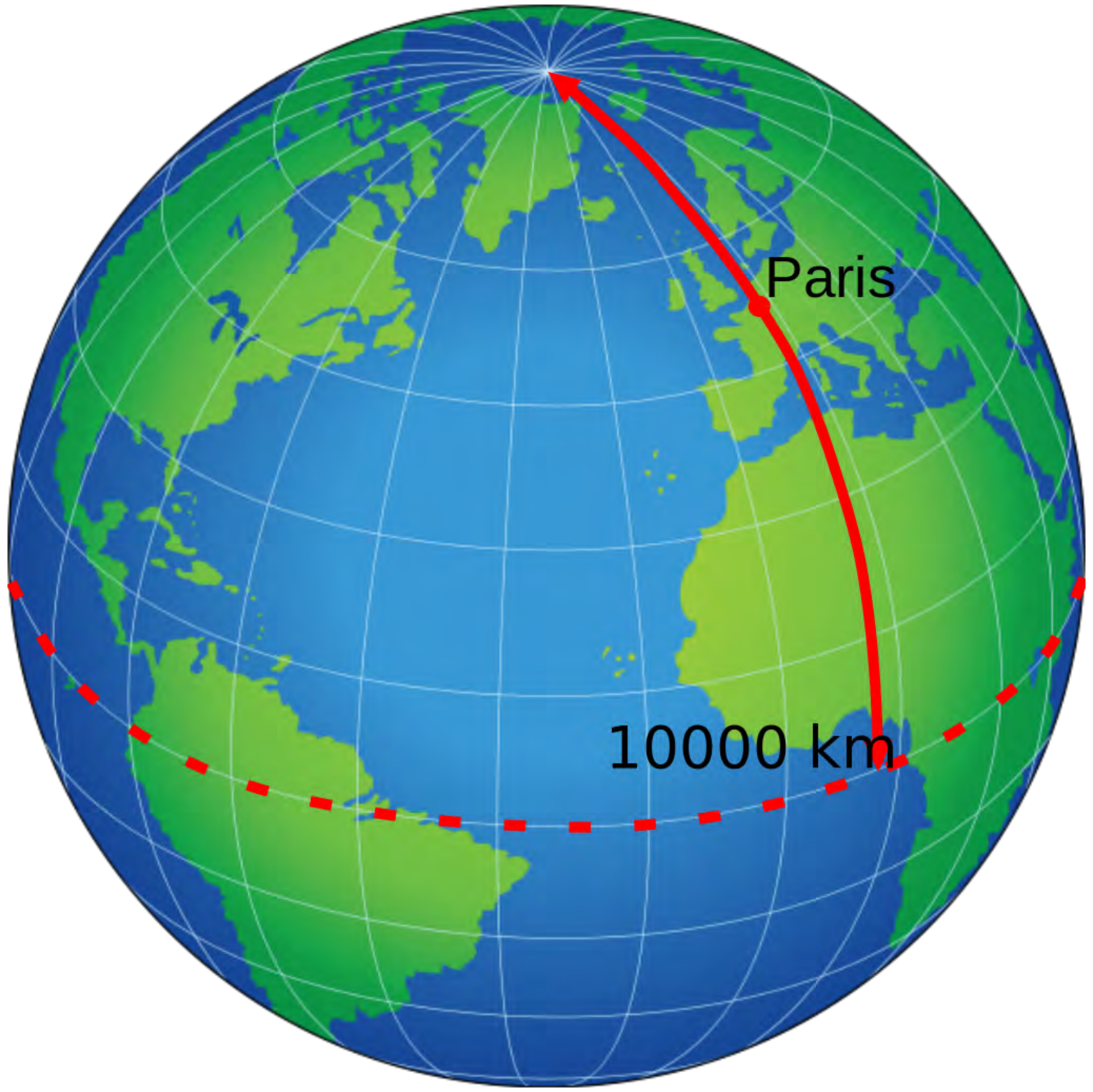
- **MEDIR** um comprimento significa **comparar** uma propriedade (a dimensão linear, o tamanho) com a de outro objeto, considerado como um **padrão** (ou unidade).
- Quando isso acontece, dizemos que essa grandeza é **dimensional**. No caso, falamos de **dimensão de comprimento**.
- Mas qual é o tamanho de uma régua de 1m?
- **ISSO É UMA CONVENÇÃO.**

Unidades e Dimensões

- A medida de comprimento **pé**, até hoje usada nos EUA, foi definida pelo tamanho do pé de um certo rei da Inglaterra.

- Uma **polegada** foi definida como sendo 1/12 do pé.

- O **metro** foi originalmente definido, em 1795, como 1/10.000.000 da distância entre o pólo norte e o equador, medido no meridiano que passa por Paris.



Unidades e Dimensões

- Entre 1799 e 1960, barras metálicas (de platina, e posteriormente irídio-platina) foram utilizadas como padrão para o metro.

- Em 1960, passou-se a utilizar o comprimento de onda de uma transição atômica do Kriptônio como referência para o metro.
- Esse tipo de definição tem a vantagem de não depender de um objeto físico particular, que pode, por exemplo, ser destruído por uma catástrofe! Mais que isso, ela proporciona maior **estabilidade** e **precisão** para a definição do metro.

- Em 1983, adotou-se o padrão atual: o metro é definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 segundos.

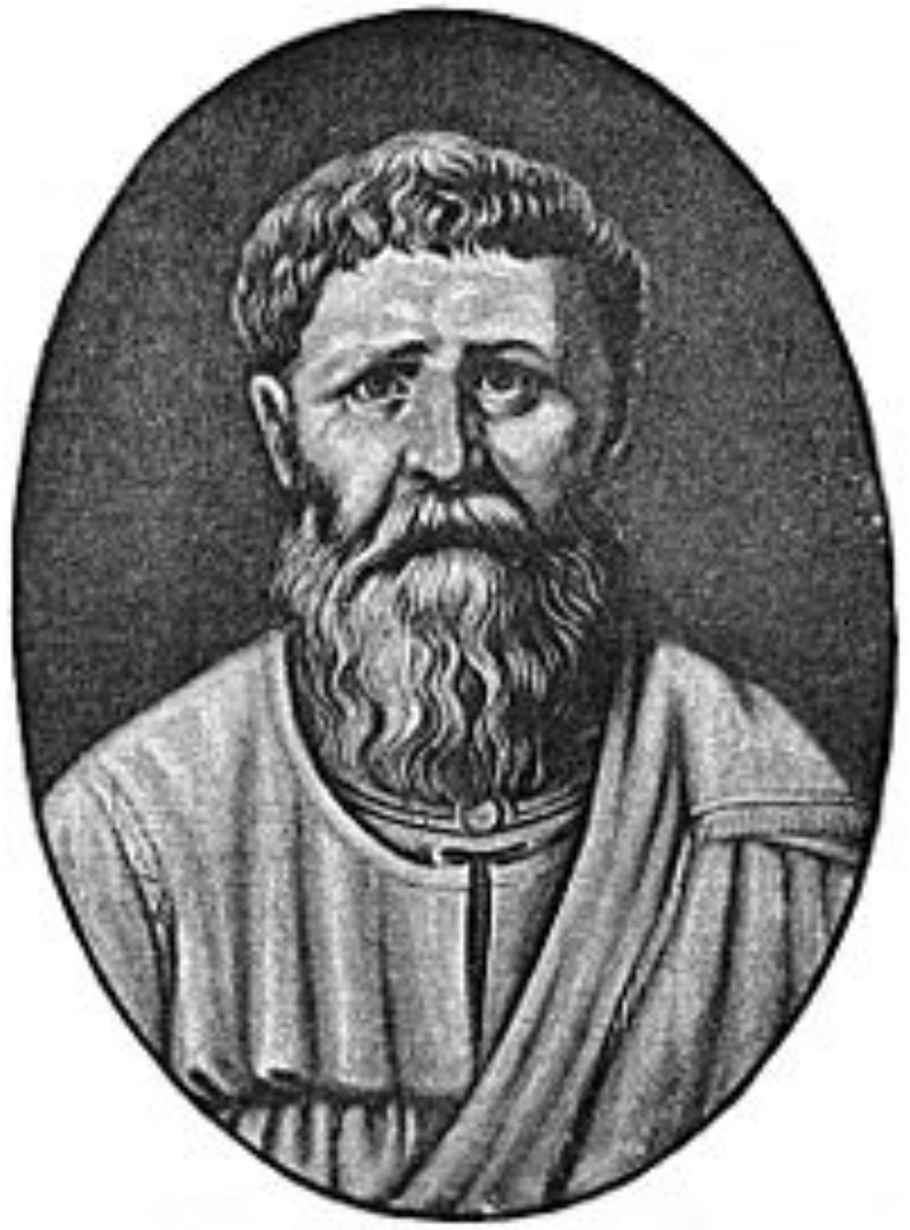
Unidades e Dimensões

- **COMPRIMENTO** é uma grandeza **dimensional**, que quantifica o “tamanho” de um objeto numa dada direção linear.
- É uma grandeza que precisa ser expressa em termos de uma **unidade**. Todo comprimento é expresso através da comparação com um objeto padrão, considerado como “unidade de comprimento”.
- Um número que expressa um comprimento é dito possuir **dimensão de comprimento** – independente da unidade escolhida.

- Outra grandeza fundamental que queremos medir é o **TEMPO**.
- O que é o tempo?

"se ninguém me perguntar, eu sei; se o quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei"

Agostinho de Hipona (Santo Agostinho) 300BC



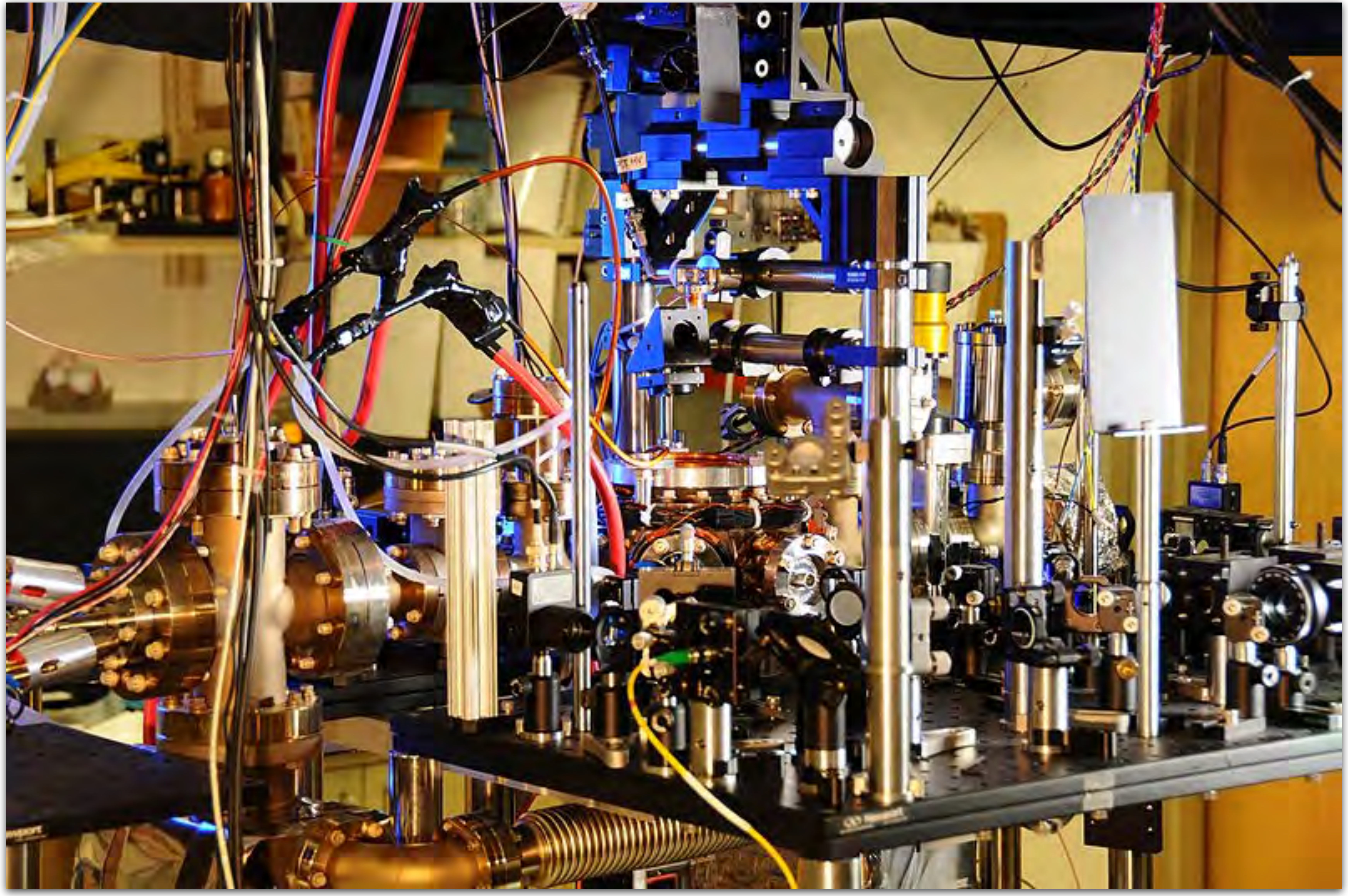
- Na prática, a passagem do tempo é medida através de algum sistema periódico (um relógio).
- Exemplos primitivos: um pêndulo, a pulsação cardíaca, o ciclo dia-e-noite.

Unidades e Dimensões

- O **segundo** foi inicialmente definido como 1/86.400 de um dia solar. Contudo, a velocidade de rotação da Terra varia lentamente, então esta não é uma definição estável para o segundo.

- Atualmente, o segundo é definido a partir das propriedades atômicas do átomo de Césio-133. Esta definição é conveniente pois sabemos que os átomos de Césio se comportam da mesma forma, independente da rotação da Terra ou de outros fatores.
- Com base nessa idéia, relógios atômicos de precisão extraordinária podem ser construídos, permitindo medir a passagem do tempo com grande precisão.

Unidades e Dimensões



Relógio atômico baseado em Itérbio (Yb), nos EUA: este relógio é tão preciso que espera-se um atraso de cerca de 1s ao longo de toda a idade do universo (+ de 10 bilhões de anos!).

Unidades e Dimensões

- Outra grandeza fundamental é a **MASSA**.
- A massa está ligada à inércia de um corpo. A definição precisa do que é massa será vista no curso de Fenômenos Mecânicos.
- Nunca é demais relembrar: **MASSA** não é o mesmo que **PESO**.

- Até 2019, o padrão internacional de massa era um cilindro de liga platina-irídio, guardada num centro de metrologia em Sèvres, na França.

Unidades e Dimensões

- Em 20 de maio de 2019, o padrão internacional do quilograma foi alterado.
- A definição atual do quilograma é baseada no valor de uma constante universal da física, a constante de Planck, que pode ser medida com muita precisão.
- Um quilograma é definido como: a massa tal que a constante de Planck vale exatamente $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ kg\ m^2 / s$.
- De novo, pode não parecer uma definição muito prática, mas assim como as definições correntes para o metro e o segundo, ela pode ser aferida com muita precisão através de experimentos adequados, e independe da existência e estabilidade de um sistema físico específico.

Unidades e Dimensões

- **Comprimento**, **tempo** e **massa** são dimensões básicas.
- Outras grandezas, também dimensionais, podem ser consideradas derivadas.
- Por exemplo:
  - **velocidade** é definida como uma razão entre comprimento e tempo
  - **aceleração** é definida como uma razão entre velocidade e tempo
  - **força** é definida como um produto entre massa e aceleração
  - ...

Em 1975, um acordo internacional instituiu o **SI – Sistema Internacional** de Unidades, que define grandezas e unidades básicas. Todas as demais grandezas usadas na ciência são derivadas destas grandezas básicas.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol[8]
Intensidade luminosa	candela	cd

PARTE 2: ANÁLISE DIMENSIONAL, TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES

Unidades e Dimensões

- **Por que saber de tudo isso?**
- Uma grandeza física **dimensional** só está bem definida quando indicamos a unidade utilizada. Assim, se você resolveu um problema, e encontrou como resposta uma velocidade $v = 10$, sua resposta não faz sentido!
- Só faz sentido comparar grandezas de mesma dimensão (mesmo que estejam expressas em unidades diferentes). Faz sentido se perguntar se uma jarda é maior do que um metro, mas não faz sentido se perguntar se um segundo é menor que um quilograma.
- Todos os termos numa dada equação devem necessariamente possuir a mesma dimensão.

Unidades e Dimensões

- **Análise Dimensional:** todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.
- Por exemplo: encontre a fórmula do período do pêndulo, em termos do seu comprimento e da aceleração da gravidade *g*.

$$[\tau] = \text{tempo} = T$$

$$[\ell] = L$$

$$[g] = \frac{L}{T^2}$$

$$\tau \sim \sqrt{\frac{1}{g} \times \ell}$$

$$T = \sqrt{\frac{T^2}{\cancel{L}} \times \cancel{L}} = T$$

$$\boxed{\tau = 2\pi \sqrt{\ell / g}}$$

Unidades e Dimensões

- **Análise Dimensional**
- Outro exemplo: digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:
- Isso está correto?

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + \cancel{2(\Delta x)^2} \qquad x,\ \cancel{t},\ \cancel{v},\ a$$

$$\frac{L^2}{T^2} = \frac{L^2}{T^2} + \cancel{L^2}$$

$$\cancel{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2} \longrightarrow \frac{L^2}{T^2}$$

$$a\,\Delta x \longrightarrow \frac{L}{T^2} \times L = \frac{L^2}{T^2}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$$

- **Conversão de Unidades:** podemos converter livremente uma grandeza de uma unidade para outra, desde que mantendo sempre a consistência dimensional.

- Por exemplo: uma régua de **1 jarda** tem o mesmo tamanho que uma régua de **0,9144 metros**.

$$1\ jarda = 0{,}9144\ m$$

- Consequentemente, podemos escrever:

$$\frac{1\ jarda}{0{,}9144\ m} = 1 \qquad \frac{0{,}9144\ m}{1\ jarda} = 1$$

$$\frac{1\ jarda}{0{,}9144\ m} = 1 \qquad \frac{0{,}9144\ m}{1\ jarda} = 1$$

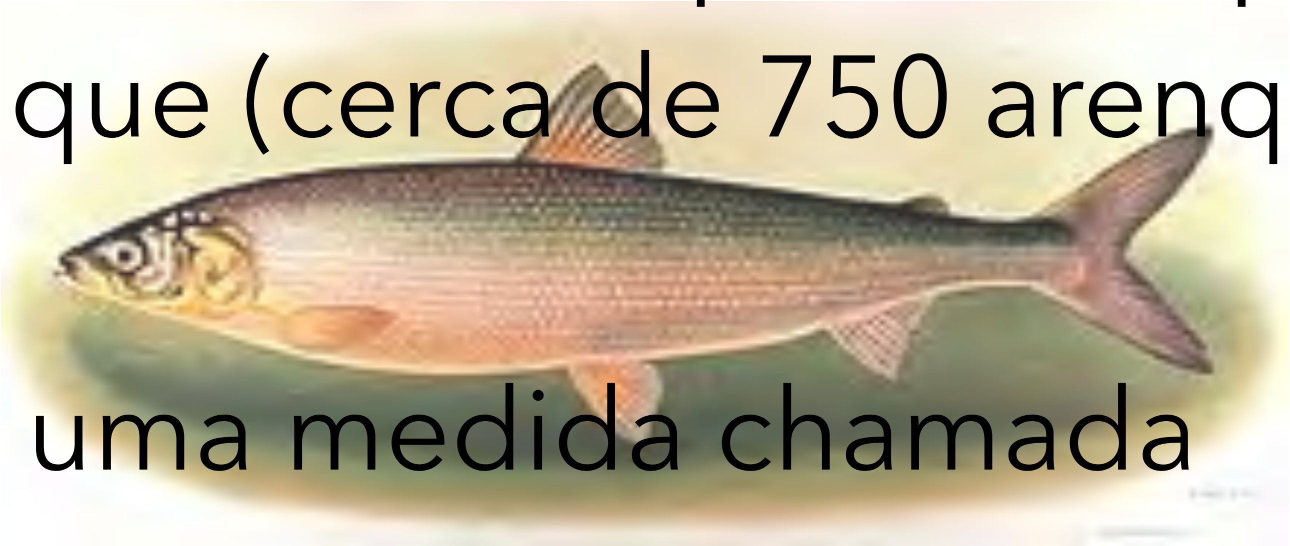
$$15\,jardas = 15\,jardas \times \frac{0{,}9144\,m}{1\,jarda} = 15 \times 0{,}9144\,m = 13{,}71\,m$$

$$20\,m = 20\,m \times \frac{1\,jarda}{0{,}9144\,m} = \frac{20}{0{,}9144}\ jardas = 21{,}87\,jardas$$

- Note: **15 jardas** e **13,71 m** representam o **mesmo comprimento**, em **unidades diferentes**.

Unidades e Dimensões

- Outro exemplo: Um arenque é um peixe abundante no Atlântico Norte. Um cran é uma unidade de volume britânica para arenques frescos: 1 cran = 170,474 litros de arenque (cerca de 750 arenques).



- Suponha que na Arábia Saudita, usa-se uma medida chamada côvados: 1 côvados = 48,26 cm.
- Suponha que você queira vender 1255 crans de arenques na Arábia.
- Quantos côvados cúbicos você deverá declarar à "Receita Federal" Árabe?

$$\frac{170,474L}{1cran} = 1$$

$$\frac{1.000cm^3}{1L} = 1$$

$$\frac{1côvado}{48,26cm} = 1$$

$$1255crans = 1255crans \times \left(\frac{170,474L}{1cran}\right) \times \left(\frac{1.000cm^3}{1L}\right) \times \left(\frac{1côvado}{48,26cm}\right)^3$$

$$= 1255 \times 170,474 \times 1.000 \times \left(\frac{1}{48,26}\right)^3 côvados^3 = 1,903 \times 10^3 côvados^3$$

Para aprender mais…

- Seções 1.1 até 1.4 do livro-texto (Serway, Princípios da Física 1).
- A redefinição do quilograma em 2019 motivou muitas notícias que você pode encontrar pela internet. Também muitos vídeos interessantes podem ser encontrados, como https://www.youtube.com/watch?v=m-fFRLWBzm8 (em inglês).
- No artigo: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0284, publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física, a nova definição do quilograma é discutida de forma didática.
- Também na mesma revista, o artigo http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0003 discute análise dimensional em detalhe.

TÓPICO 4 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

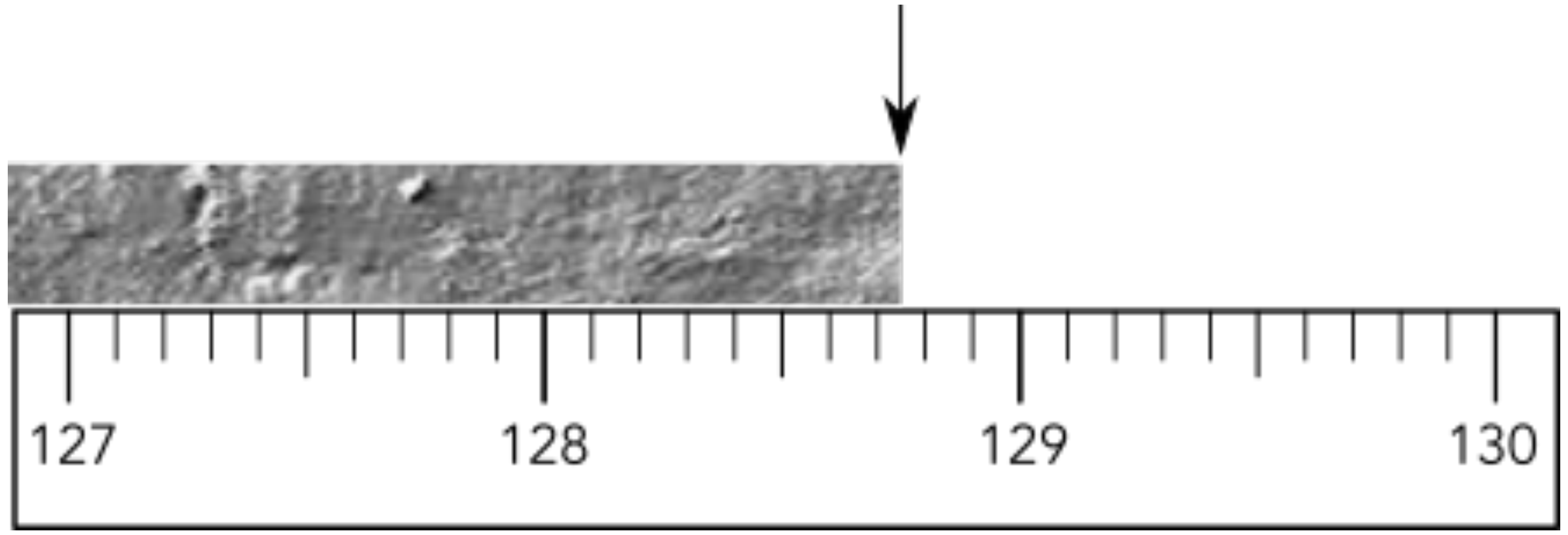
Medidas e Incertezas

- O resultado de uma medida deve conter as seguintes informações:
  - o valor da grandeza
  - a incerteza da medição
  - a unidade (caso pertinente)

- Vamos ver agora como podemos estimar a incerteza de uma das medidas mais simples que podemos fazer: medir o comprimento de um objeto usando uma régua.
- Esse exemplo, além de útil na prática do laboratório, vai nos motivar à definição de **algarismos significativos**, que é o tópico principal que queremos discutir.

Algarismos Significativos

Veja o seguinte exemplo:



A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$

Qual a incerteza?

0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.

L = 128,75 ± 0,05 cm

δx = metade da menor graduação do instrumento

O mesmo vale para: medida de ângulos usando um transferidor, temperatura usando um termômetro de mercúrio, etc…

Algarismos Significativos

- Em casos mais complicados, tanto a medida quanto a incerteza podem resultar em números “quebrados”, aí temos que arredondar de uma forma consistente.

- Note que não faz sentido escrever, por exemplo:

$$g = 9{,}82435 \pm 0{,}03 \ m/s^2$$

- Por outro lado, δx será sempre uma *estimativa* da incerteza, também não fará sentido expressá-lo com muita precisão.

  Por exemplo:

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}034594 \ m/s^2$$

- O arredondamento tanto da incerteza quanto da medida deve ser consistente:

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}03 \ m/s^2$$

Algarismos Significativos

- São os algarismos sobre os quais temos algum conhecimento de uma dada grandeza, *excluindo eventuais zeros à esquerda*, usados para acertos de unidades, *e potências de dez.*
- *Atenção: zeros à direita contam como algarismos significativos!*
- Quem vai determinar o número de algarismos significativos da grandeza medida será a sua *incerteza* estimada.

MEDIDA (mm)	A. SIGNIFICATIVOS
57,896	5
$5,79 \times 10^4$	3
$5,789600 \times 10^4$	7
$0,007 \times 10^4$	1

Medidas e Incertezas

Regras práticas para apresentação de resultados:

- Durante os cálculos intermediários, tanto da grandeza de interesse quando da sua incerteza, utilize *todos* (ou pelo menos um número apreciável) dos algarismos que a calculadora apresenta.
- *Os arredondamentos serão sempre a última etapa*.
- Após calcular a incerteza, arredonde para apenas UM algarismo significativo.
- Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
- A notação científica pode ser usada para se evitar ambiguidades. Neste caso, deve-se usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza quanto para sua incerteza.

Medidas e Incertezas

Regra para arredondamentos:

- Existe uma regra oficial de arredondamento dada pela ABNT NBR 5891.
  Vamos adotar uma versão simplificada dessa regra.

$,37\boxed{4}88 \rightarrow ,37\boxed{5}$

$,37\boxed{4}38 \rightarrow ,37\boxed{4}$

$,37\boxed{4}500 \rightarrow ,37\boxed{4}$

$,37\boxed{5}500 \rightarrow ,37\boxed{6}$

- Se o próximo digito for 6,7,8,9 - arredondar para cima.
- Se o próximo dígito for 0,1,2,3,4 - arredondar para baixo.
- Se o próximo digito for 5 – arredondar para cima se o último digito a considerar for ímpar, ou para baixo, se for par.

Medidas e Incertezas

Exemplos:

NOTAÇÃO ERRADA	NOTAÇÃO CORRETA
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$0,00002002 \pm 0,0000005$	$(200 \pm 5) \times 10^{-7}$
$(45 \pm 2,6) \times 10^{-3}$	$(45 \pm 3) \times 10^{-3}$

Medidas e Incertezas

Exemplo 1:

Valor calculado: 56,745737703 m/s

Incerteza calculada: 0,0034593 m/s

Incerteza arredondada: 0,003 m/s

Valor arredondado: 56,746 m/s

Resultado da medida:
$56{,}746 \pm 0{,}003$ m/s

Exemplo 2:

Valor calculado: 0,0056745737703 m/s → 5,6745737703 mm/s

Incerteza calculada: 0,000037593 m/s → 0,037593 mm/s

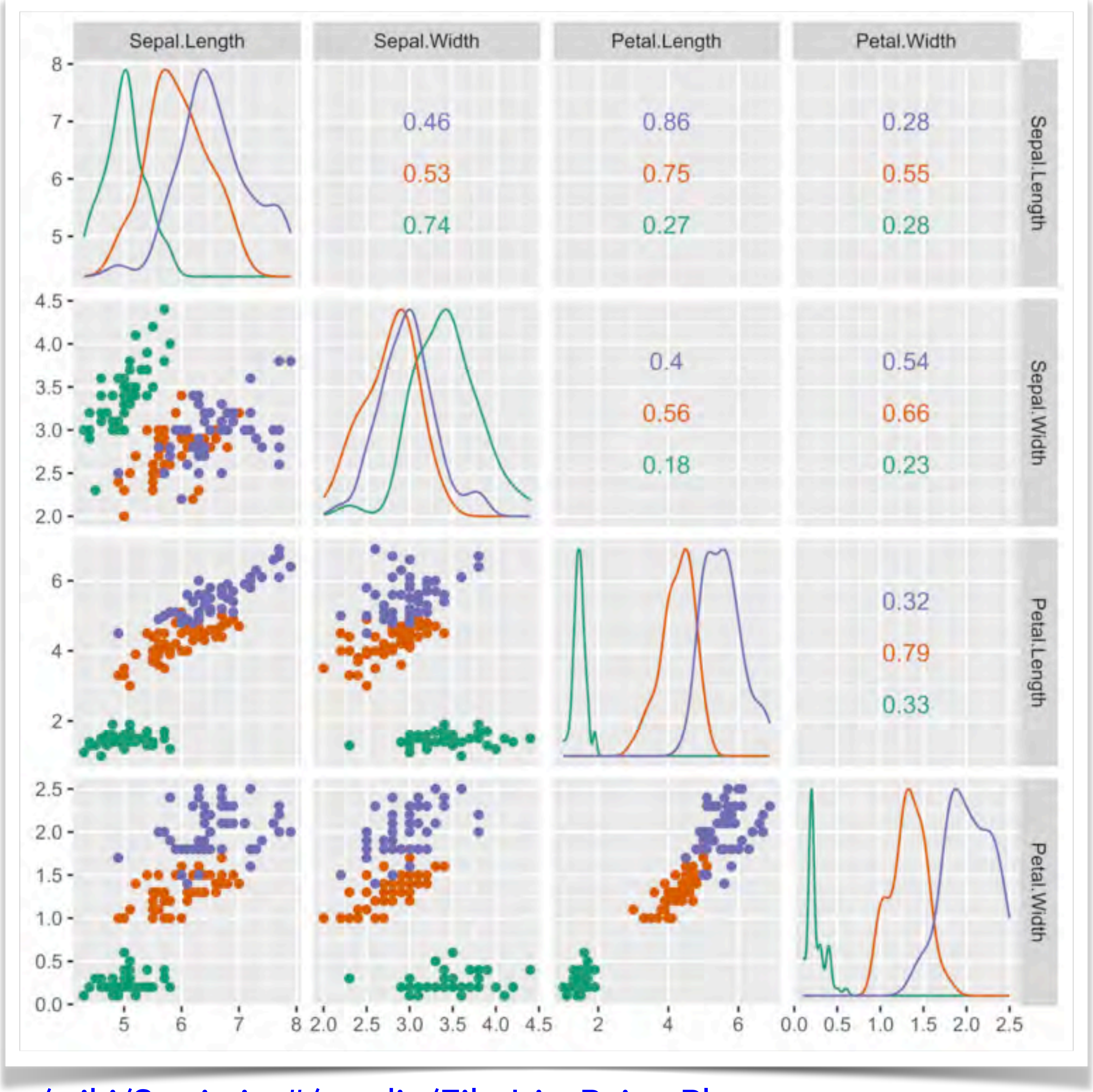
Incerteza arredondada: 0,04 mm/s

Valor arredondado: 5,67 mm/s

Resultado da medida:
$5{,}67 \pm 0{,}03$ mm/s

$0{,}00567 \pm 0{,}0003$ m/s
$(5{,}67 \pm 0{,}03) \times 10^{-3}$ m/s

TÓPICO 5 - AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DA INCERTEZA



https://en.wikipedia.org/wiki/Statistics#/media/File:Iris_Pairs_Plot.png

Avaliação estatística de erros

Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza, devemos fazer uma análise estatística. Uma vantagem é que erros aleatórios tendem a se cancelar quando fazemos médias de varias observações.

Exemplo:

Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2{,}00 \pm 0{,}05\ m$, medido com o cronômetro de um telefone celular.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Avaliação estatística de erros

Definições

Valor Médio: $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desvio padrão **da média:** $$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Estimativa para o valor/incerteza da grandeza medida: $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$

Medidas e Incertezas

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Valor médio:

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = 0{,}627s$$

Incerteza da média:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2} = 0{,}010651s$$

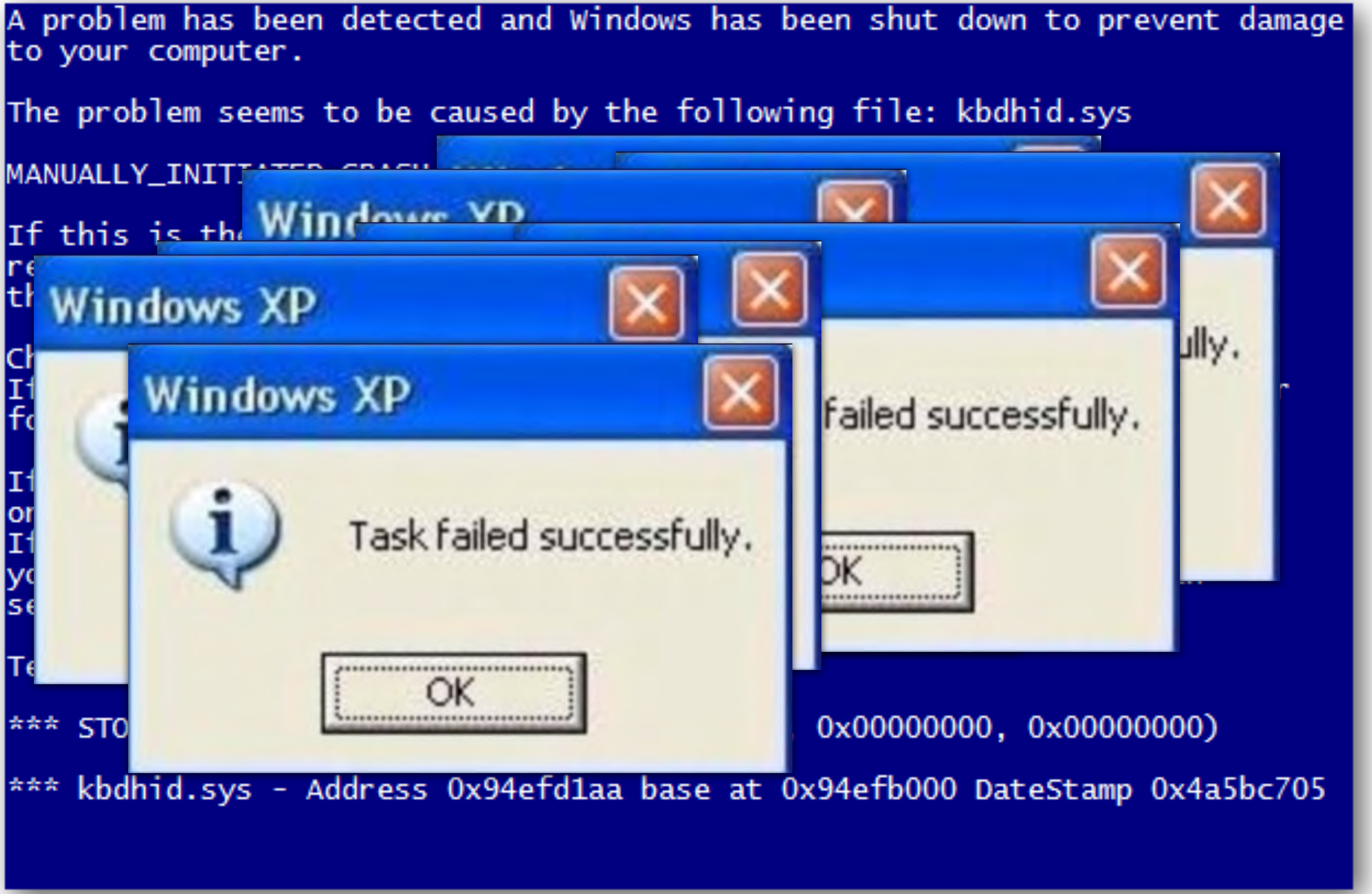
Apresentação do Resultado:

$$\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = (0{,}63 \pm 0{,}01)s$$

Para aprender mais...

- Laboratório de mecânica : subsídios para o ensino de Física experimental, Lima Júnior et al, IF-UFRGS. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/90438
- Métodos estatísticos são discutidos na disciplina obrigatória do BCT **Introdução à Probabilidade e Estatística**.
- Vídeos da Khan Academy Brasil sobre probabilidade e estatística: vídeos 10 a 13.

TÓPICO 6 - PROPAGAÇÃO DE ERROS



Propagação de Erros

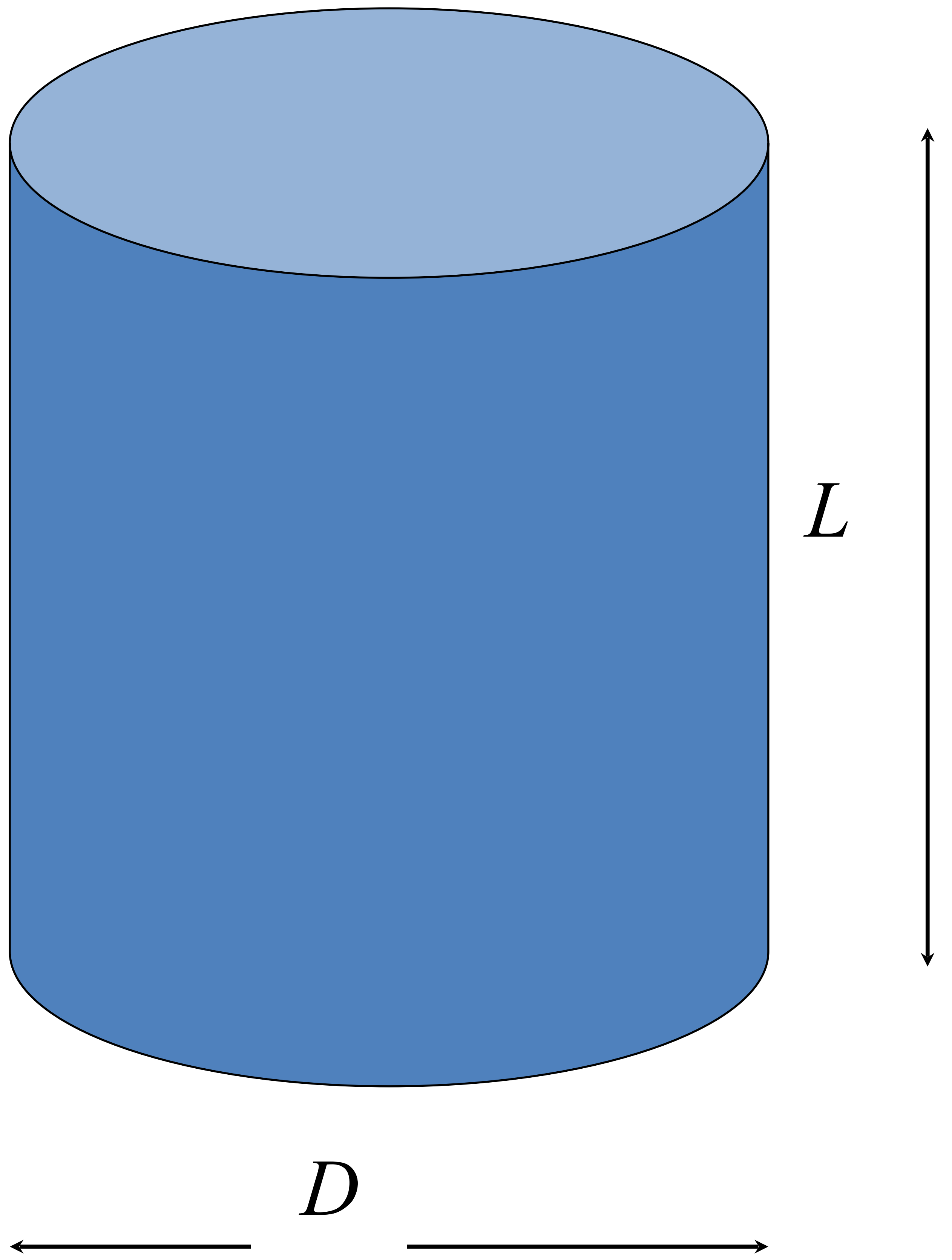
- Você mede o diâmetro e a altura de um cilindro, usando uma régua, fita métrica etc…
- Essas medidas estão associadas a uma incerteza, devida às limitações do instrumento de medida.

$$D = \overline{D} \pm \sigma_D, \qquad L = \overline{L} \pm \sigma_L$$

- A partir de *D* e *L*, podemos calcular o volume do cilindro através de uma fórmula:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

- O valor de *V* também terá uma incerteza. Como calcular?



Propagação de Erros

- Suponha: $D = 5{,}00 \pm 0{,}05\, cm \quad L = 12{,}50 \pm 0{,}05\, cm$

- Valor médio: $V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5{,}00)^2}{4}(12{,}50) cm^3 \approx 245{,}437 cm^3$

- Como calcular a incerteza de *V*?
- Uma maneira simples: calcular o valor máximo e mínimo possível para *V*.

$$V_{max} = \pi \frac{(5{,}05)^2}{4}(12{,}55) cm^3 \approx 251{,}372 cm^3 \qquad V_{min} = \pi \frac{(4{,}95)^2}{4}(12{,}45) cm^3 \approx 239{,}591 cm^3$$

$$\delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} \approx 5{,}89058\, cm^3 \approx 6\, cm^3$$

Propagação de Erros

- Suponha: $D = 5{,}00 \pm 0{,}05\, cm \quad L = 12{,}50 \pm 0{,}05\, cm$

- Valor médio: $V = 245{,}437 cm^3 = 245 cm^3$

- Incerteza: $\delta V = 6\, cm^3$

- Resultado final: $$\boxed{V = (245 \pm 6)\, cm^3}$$

- Esse procedimento de considerar "valores máximos e mínimos" nos dá uma ideia grosseira da incerteza do volume devida à incerteza das medidas do diâmetro e da altura. Mas dá para fazer melhor!

Propagação de Erros

- Relação entre a grandeza medida experimentalmente (variável independente) e a grandeza final desejada (variável dependente): uma função!

$$y = y(x)$$

- Variação *dx* na variável independente causa variação *dy* na variável dependente

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Propagação de Erros

- Em geral, temos uma função de várias variáveis (várias grandezas independentes):

$$F = F(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

- Variação da grandeza dependente em função da variação das independentes: **derivadas parciais**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \cdots$$

- Para evitar cancelamentos entre diferentes termos:

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 (dx_2)^2 + \cdots}$$

Propagação de Erros

- Fórmula geral para a propagação de erros para uma função

$$F = F(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

$$\boxed{\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 (dx_2)^2 + \cdots}}$$

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = x^m potência simples	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|m\frac{\sigma_x}{x}\right\|$
w = ax multiplicação por constante	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\frac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
w = ax + b	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\frac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
w = ax^py^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = \|ab\ \cos(bx)\|\sigma_x$ $b\sigma_x$ em radianos

Propagação de Erros

- Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2}$$

$$= \overline{V} \sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$= 245\sqrt{4\left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,5}\right)^2}$$

$$= 5\,cm^3$$

- Resultado final:

$$\boxed{V = (245 \pm 5)\,cm^3}$$

Exercício

- Determine a aceleração gravitacional g considerando o exemplo do experimento de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de *h = 2,00 ± 0,05 m,* foi medido com o cronômetro do um telefone celular.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

$$t = t_m \pm \sigma_m = (0{,}63 \pm 0{,}01)\ s$$

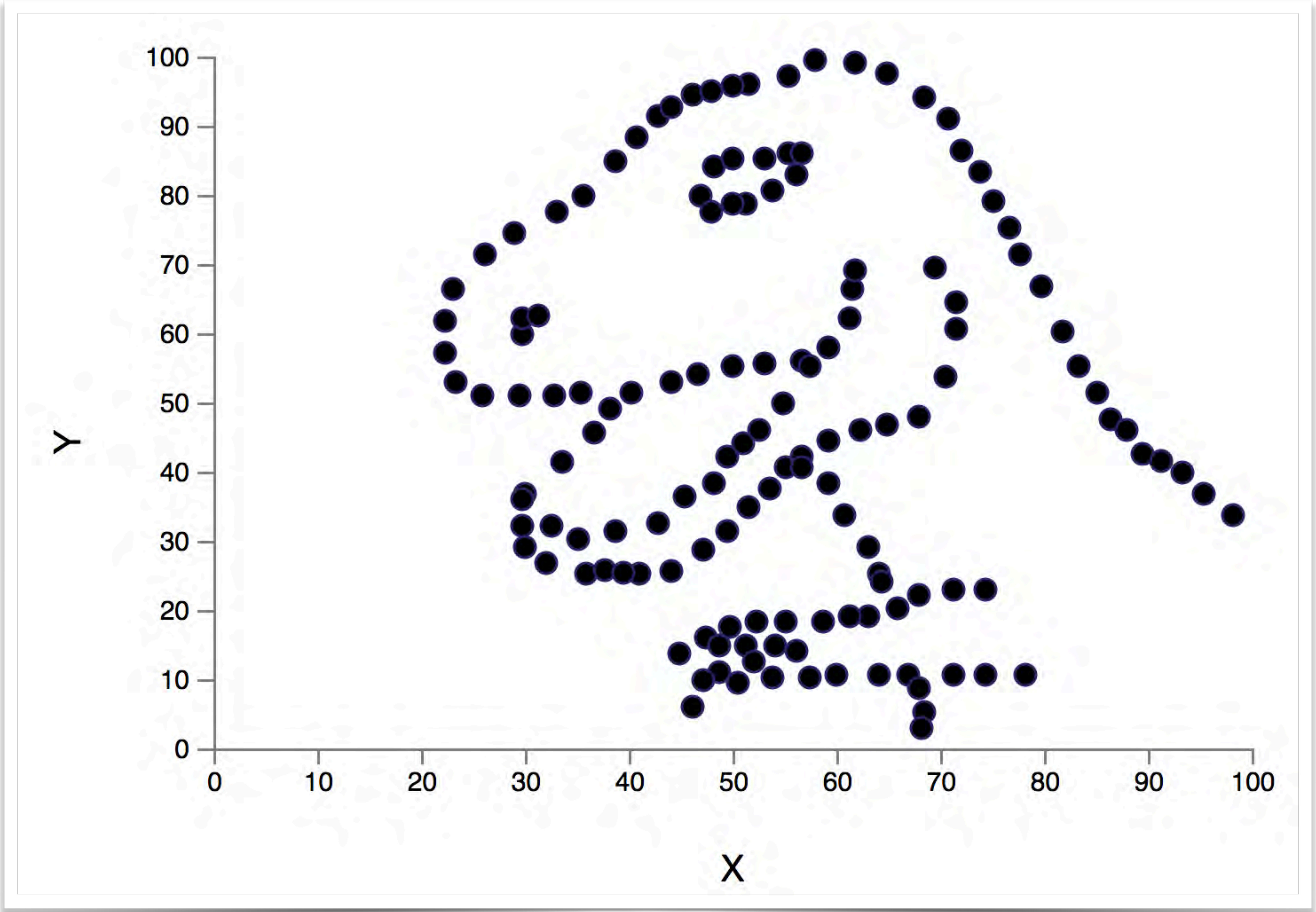
$$\bar{g} = 2\frac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10.0781\ m/s^2$$

$$g = 2\frac{h}{t^2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} = 0.407237\ m/s^2$$

$$\boxed{g = (10{,}1 \pm 0{,}4)\ m/s^2}$$

TÓPICO 7 - GRÁFICOS - CONCEITOS BÁSICOS



CUIDADO COM O GRAFOSSAURO!

http://nerd.bradyleavitt.com/2017/08/08/why-you-should-always-visualize-your-data/

Gráficos - Conceitos Básicos

- O que todo gráfico precisa apresentar?
  - Título ou Legenda (o que é este gráficos?)
  - Eixos com nomes das variáveis, escalas, e unidades (quais as grandezas e unidades escolhidas para os eixos?)
  - Dados experimentais (com incertezas!)
  - Função teórica, curvas médias, modelo ajustado (opcional)

Gráficos - Conceitos Básicos

- Todo gráfico deve ter um título, pelo qual é referido no texto. Geralmente, o título do gráfico é colocado na parte superior do gráfico, em destaque.
- Caso o gráfico seja inserido dentro de um texto, o mesmo deve ser acompanhado de uma legenda, logo abaixo do gráfico, numerada, que explique de forma sucinta o seu conteúdo.
- No caso da presença de uma legenda, o título do gráfico torna-se OPCIONAL, já que a legenda acaba suprindo o leitor de informação suficiente para o entendimento do gráfico.
- A legenda deve conter uma descrição sucinta do que é apresentado no gráfico. Note que uma legenda tipo “velocidade vs tempo” é redundante pois esta informação já está contida nos rótulos dos eixos.

Gráficos - Conceitos Básicos

- Cada um dos eixos deve conter o nome (ou símbolo) da variável representada, a escala de leitura e a unidade correspondente.
- Escolha uma escala conveniente para a qual o gráfico represente bem o intervalo medido para cada variável.
- A regra prática para esta definição é dividir a faixa de variação de cada variável pelo número de divisões principais disponíveis. Toma-se então um arredondamento a valor superior e de fácil leitura. Estes valores de fácil leitura são: 1, 2 ou 5 unidades ou qualquer múltiplo ou submúltiplo de 10 delas.
- As escalas dos eixos não precisam começar na origem (zero, zero). Elas devem abranger a faixa de variação que você quer representar. É conveniente que os limites da escala correspondam a um número inteiro de divisões principais.

Gráficos - Conceitos Básicos

- Indique os valores correspondentes às divisões principais abaixo do eixo x e à esquerda do eixo y usando números grandes.
- As unidades devem ser escolhidas de maneira a minimizar o número de dígitos nos valores que indicam o valor da divisão principal. Uma regra prática é tentar usar no máximo três dígitos nestes valores, fazendo uso de potências de 10 na expressão das unidades para completar a informação.
- Ao traçar os eixos no papel milimetrado, não use a escala marcada no papel pelo fabricante. É você quem define a sua escala, baseando-se nos seus dados. Também não use os eixos nas margens do papel. Desenhe os seus próprios, porque você precisará de espaço para a identificação das variáveis e para a legenda.
- Por fim, abaixo ou à esquerda dos números da escala, conforme o caso, escreva o nome (ou símbolo) da variável correspondente e a unidade para leitura entre parênteses (km, 105 N/cm, etc.).

Gráficos - Conceitos Básicos

- Assinale no gráfico a posição dos pontos experimentais: USE MARCAS BEM VISÍVEIS (em geral, círculos cheios).
- NUNCA indique as coordenadas dos pontos graficados no eixo.
- Coloque barras de erros nos pontos, se for o caso. Se os erros são menores que o tamanho dos pontos, indique isso na legenda.
- Às vezes, ajuda a visualização traçar a melhor curva média dos pontos, ignorando alguns pontos que fogem demasiadamente do comportamento médio.
- Em outras palavras, pode-se dizer que a curva média deve ser traçada de maneira a minimizar os deslocamentos da curva em relação aos pontos experimentais ao longo do traçado.
- NUNCA LIGUE OS PONTOS EXPERIMENTAIS.

Gráficos - Conceitos Básicos

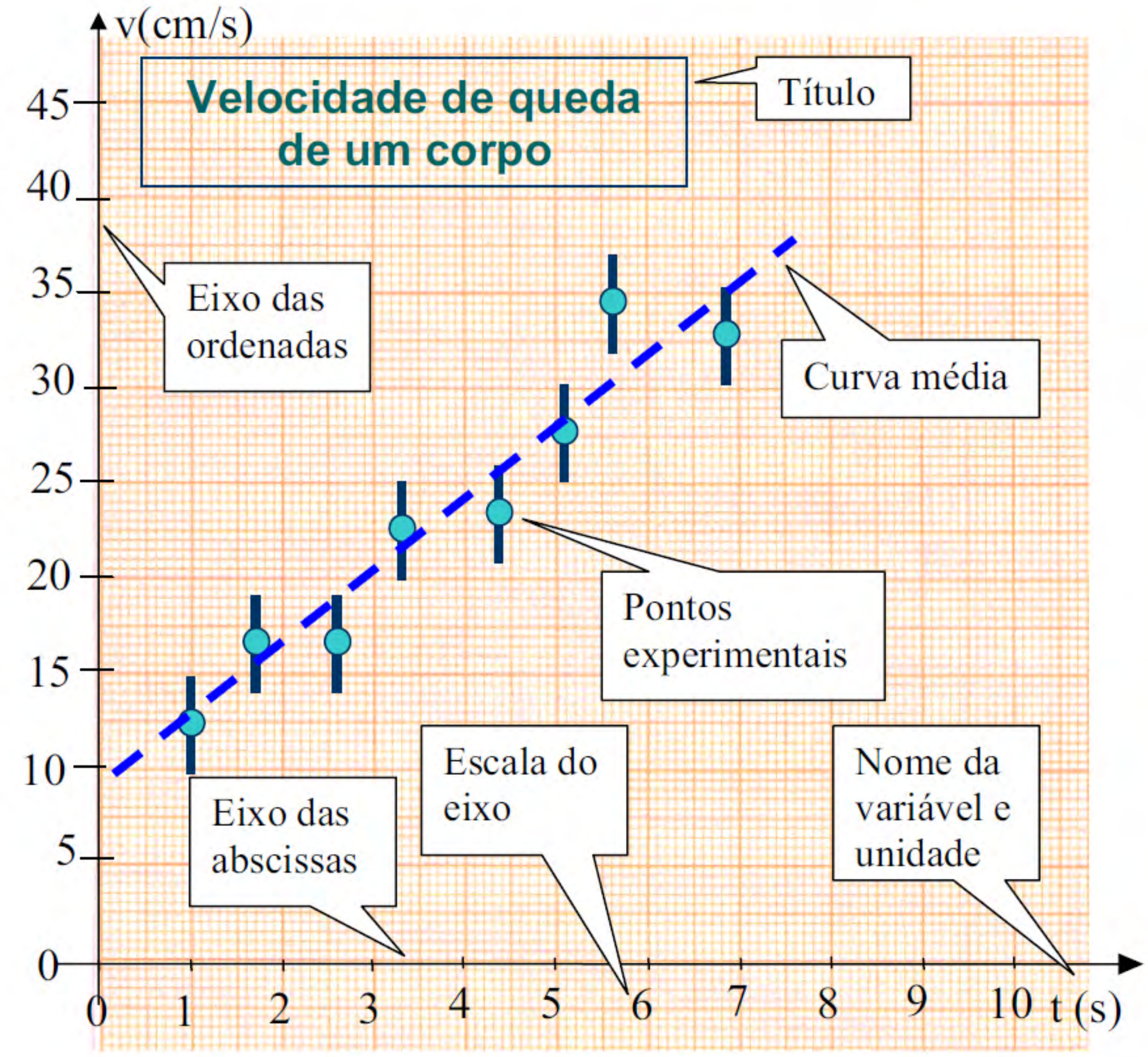
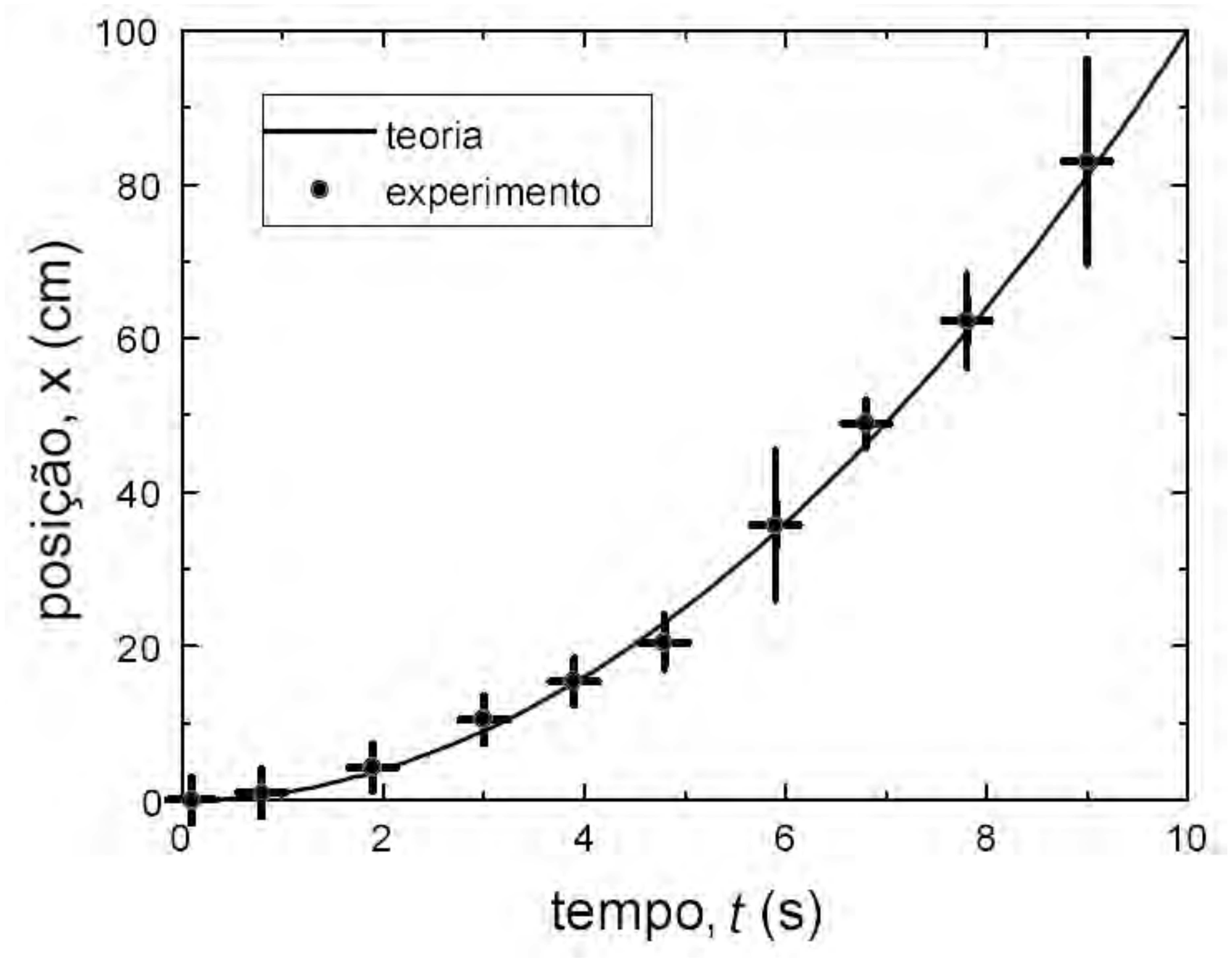


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Gráficos - Exemplos bem feitos



Gráficos - Exemplos bem feitos

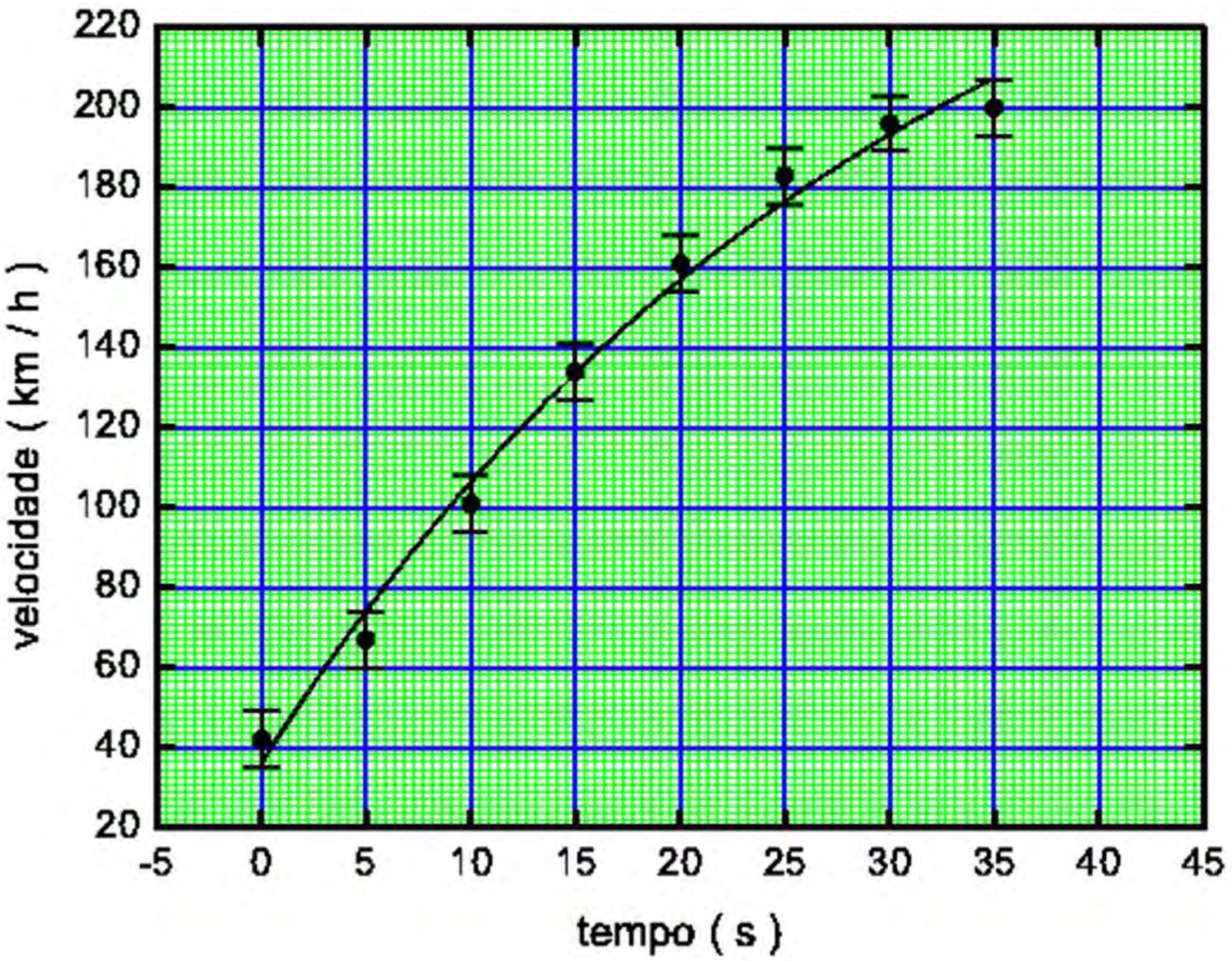
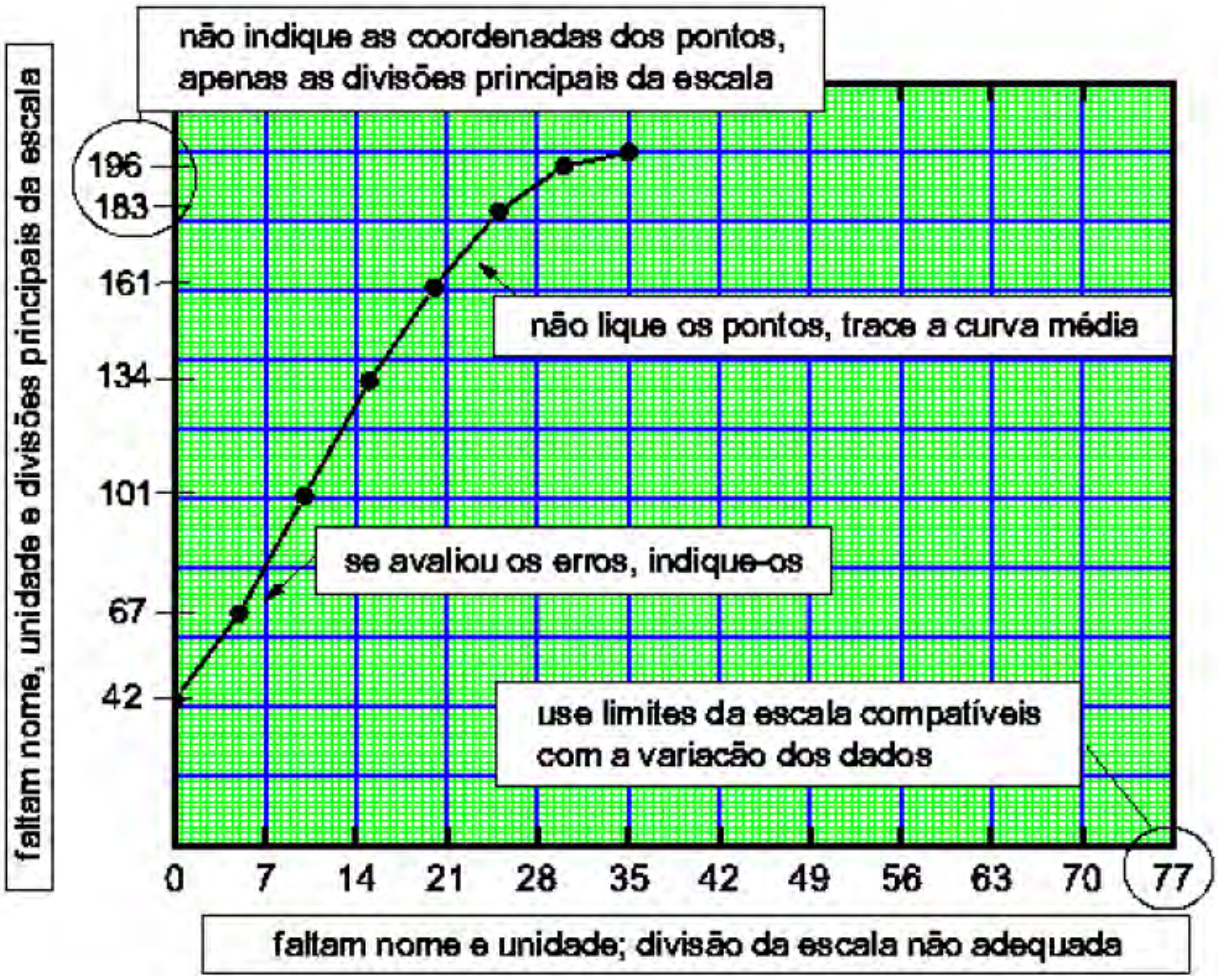
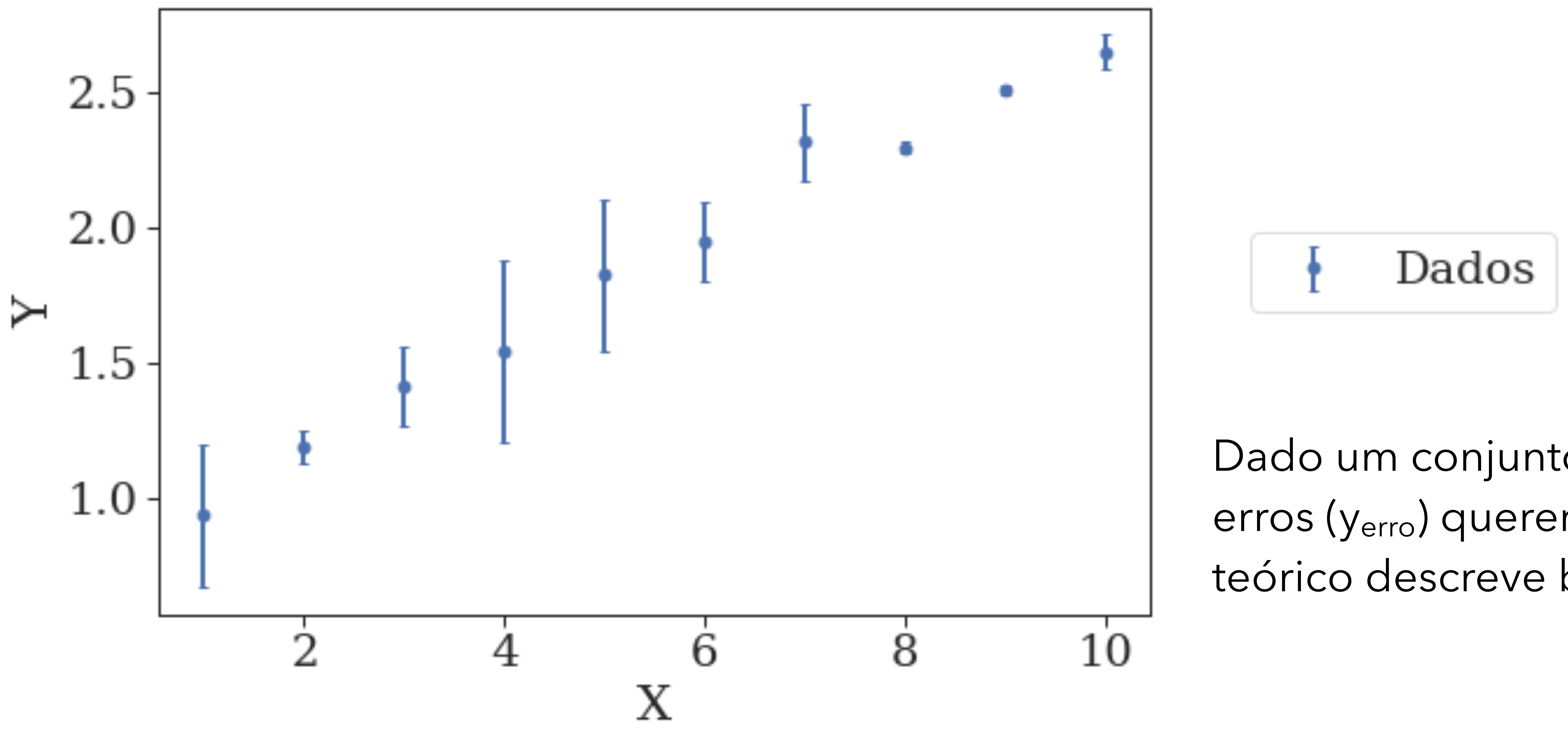


Figura 1: variação da velocidade em função do tempo de um corpo se deslocando em movimento variado

Gráficos - Exemplos com problemas



Método de mínimos quadrados



Dado um conjunto de medidas (x,y) e seus erros (y_{erro}) queremos estimar qual modelo teórico descreve bem estes dados.

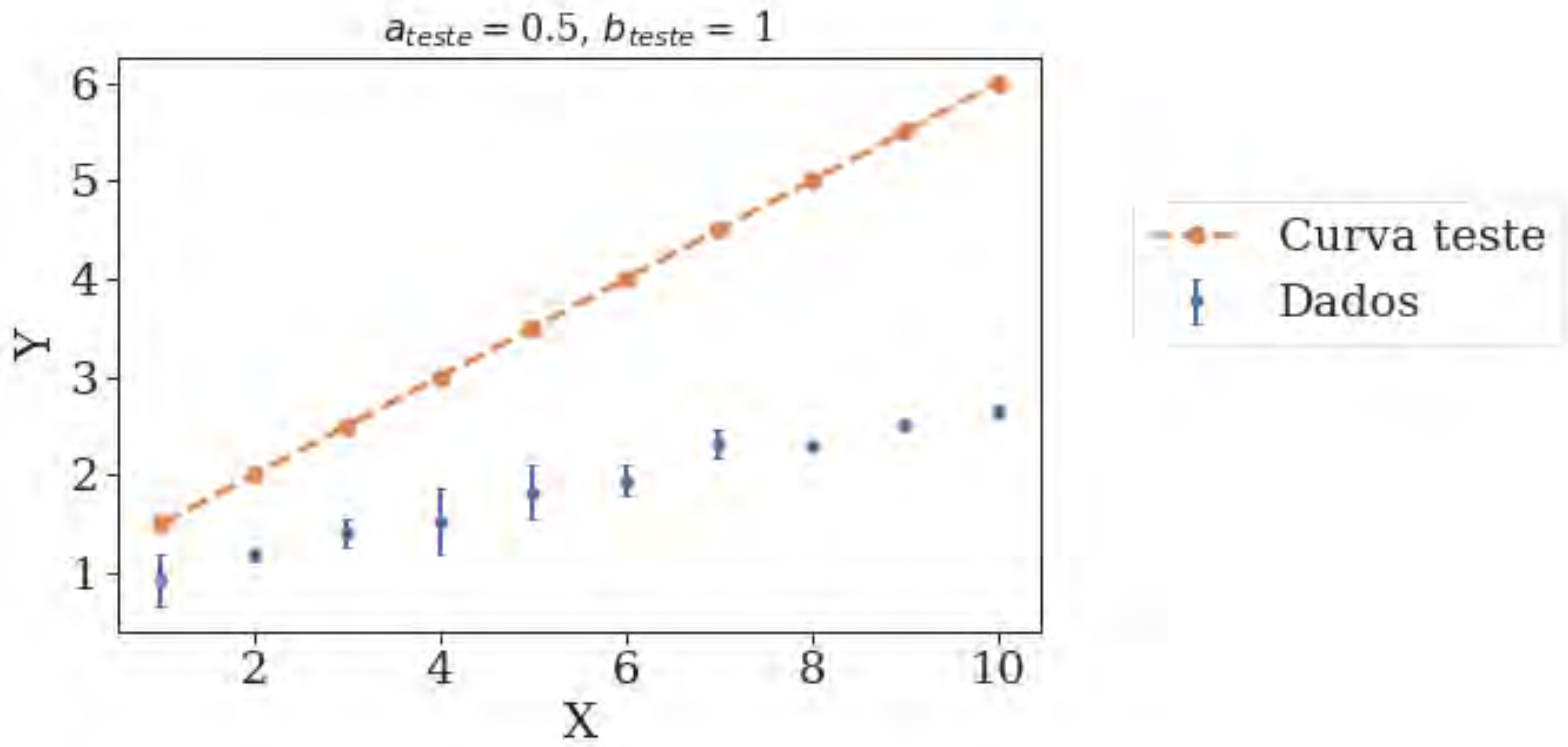
- O caso mais simples corresponde a um modelo linear, onde espera-se que a curva que corretamente descreve os dados é uma reta. Neste caso, o modelo mais geral corresponde a equação da reta:

$$f(x) = ax + b$$

- **a = coeficiente angular**
- **b = coeficiente linear**

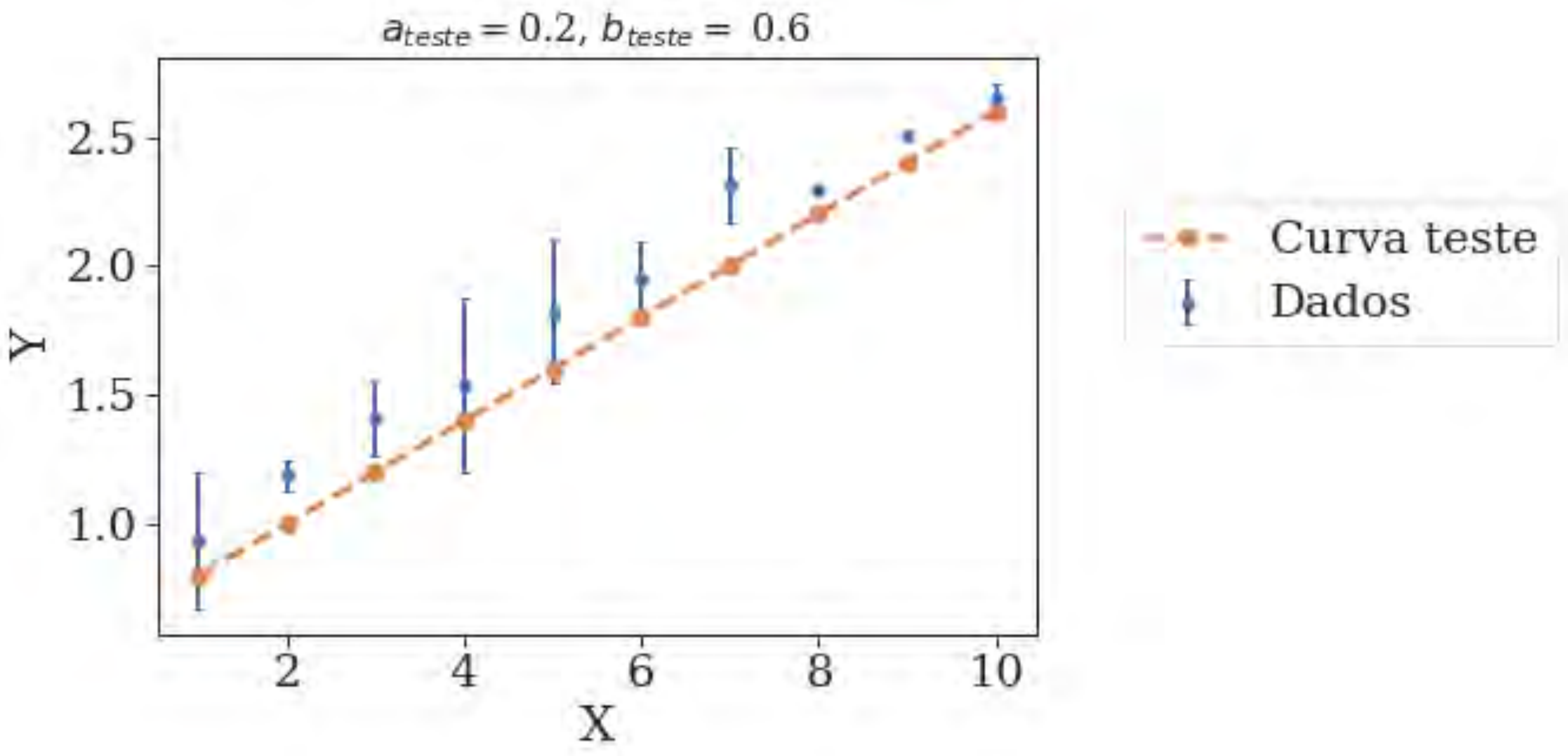
Método de mínimos quadrados

- A partir dos dados medidos queremos encontrar o valor dos coeficientes (*a* e *b*) que melhor descreve os dados experimentais.
- Se escolhermos $a=0,5$ e $b = 1$ e calcularmos $f(x)$ para os valores de x medidos, obtemos:



Método de mínimos quadrados

- Porém se escolhermos *a=0,2* e *b = 0,6*, obtemos:



- A segunda escolha claramente descreve os dados de maneira mais adequada.
- Como podemos determinar os melhores valores de *a* e *b* possíveis de forma quantitativa?

Método de mínimos quadrados

- Existem diversos métodos estatísticos que nos permitem determinar os coeficientes *a* e *b* e que possuem uma sólida fundamentação teórica.
- Nós adotaremos o método dos "mínimos quadrados".

- Vamos usar o seguinte parâmetro para estimar a qualidade do nosso ajuste, ou seja, o quão adequada é a nossa escolha para os parâmetros *a* e *b*:

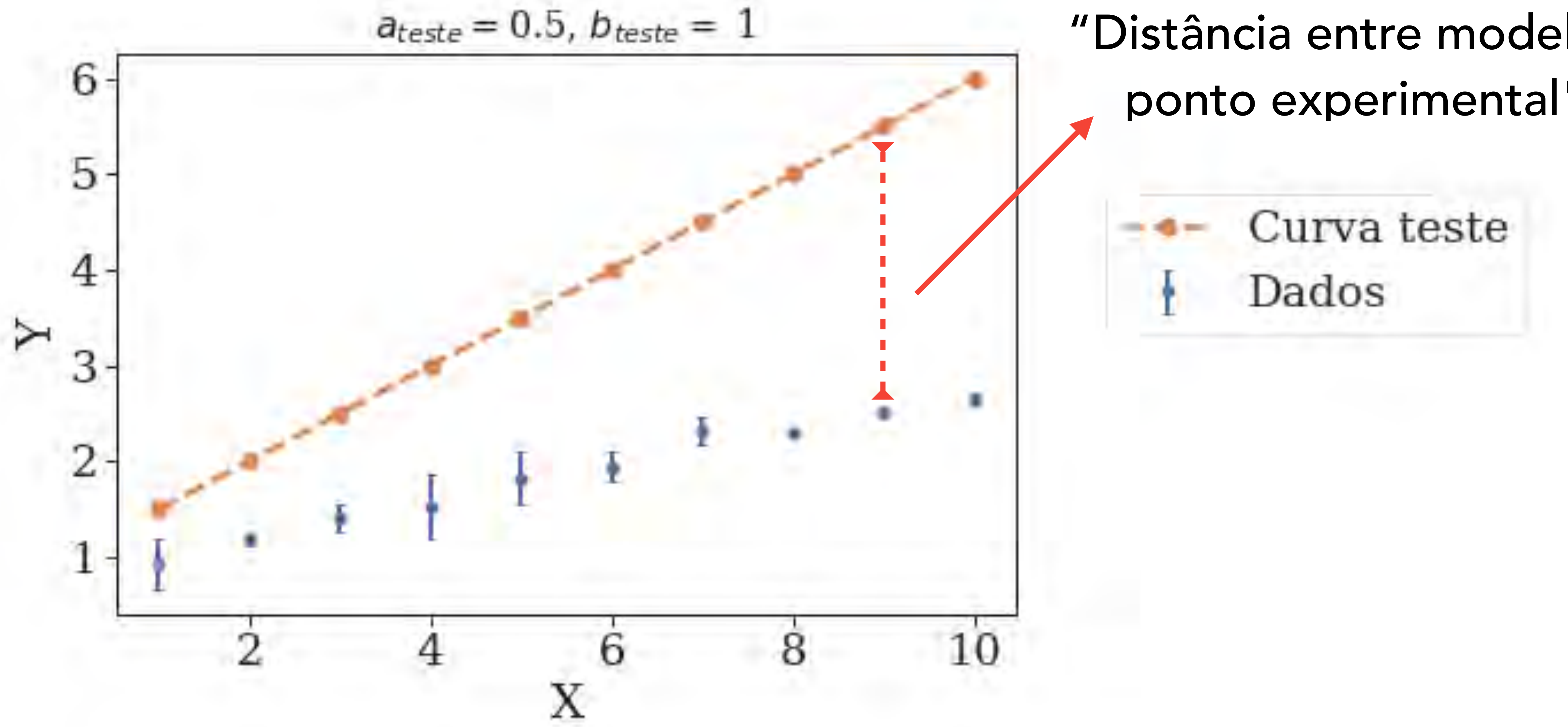
$$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (a x_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

("chi-quadrado" ou residual)

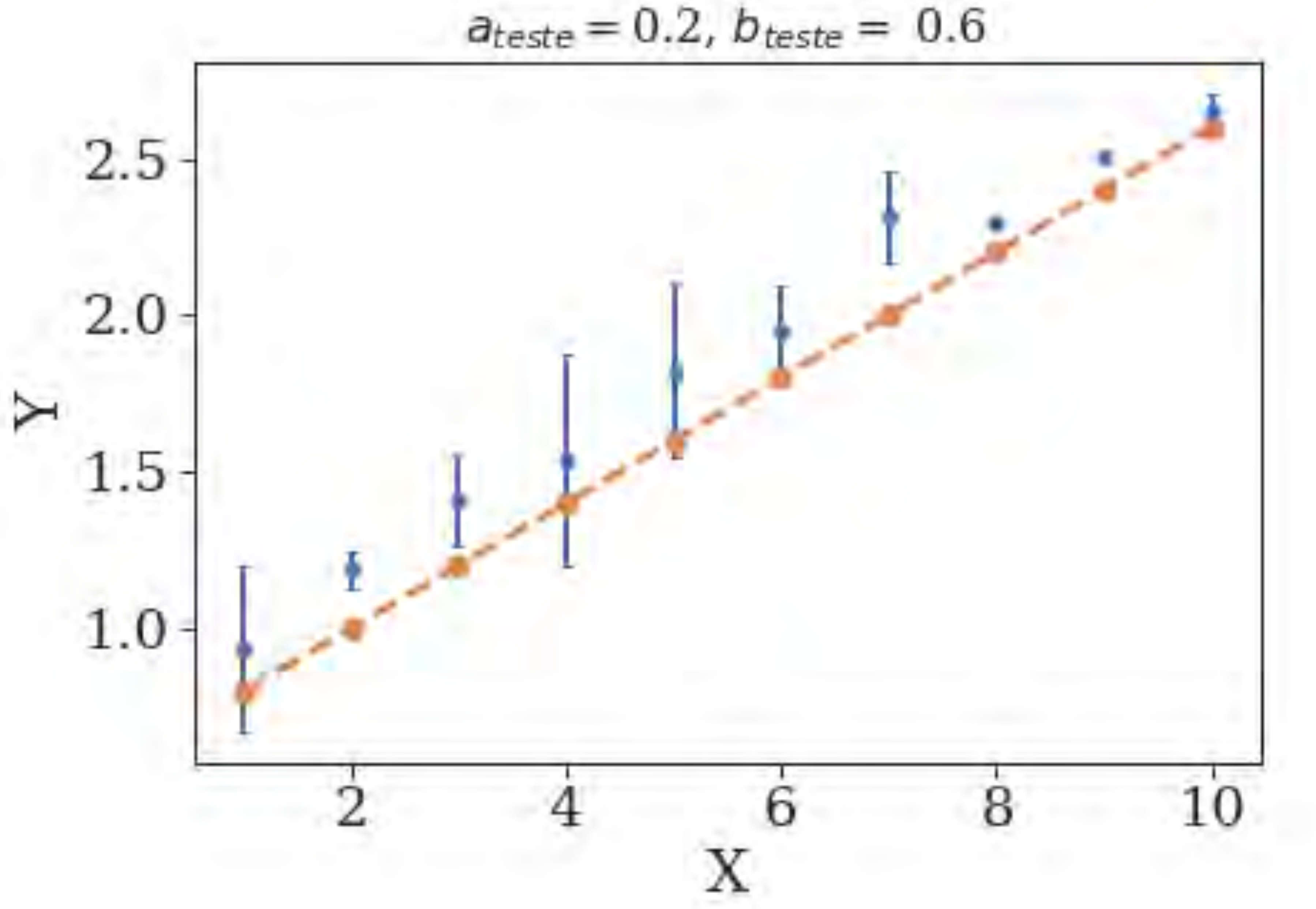
- N = número de dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e linear

Método de mínimos quadrados

- Utilizando o exemplo anterior:



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i}\right]^2 = 55.306$$



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i}\right]^2 = 83$$

Quanto menor o valor de $\chi 2$ melhor o ajuste da curva.

Método de mínimos quadrados

- Portanto basta escolhermos os valores de *a* e *b* que minimizam $\chi 2$
- O mínimo de $\chi 2$ é pode ser obtido através das derivadas com relação aos coeficientes (parâmetros) *a* e *b*.
- O resultado é:

$$a = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2 - \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)} \qquad b = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) - a\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$$

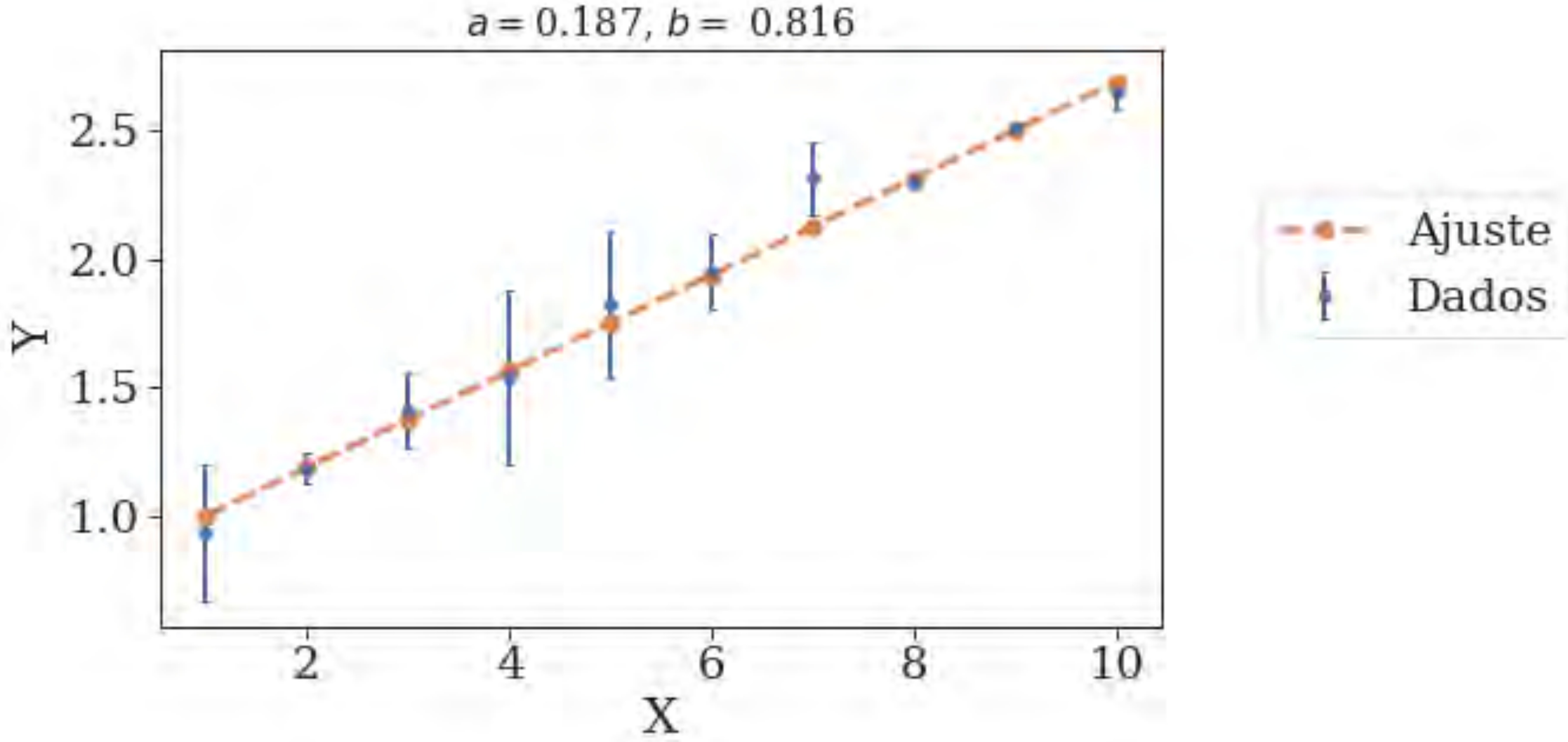
- A soma é sobre todos os dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e linear

Método de mínimos quadrados

- Aplicando estas fórmulas para o exemplo anterior obtemos:

$$a = 0,187\ , b = 0,82\ \left(\chi^2 = 3\right)$$

- Utilizando estes valores para traçar a curva, temos:



- Vemos que obtemos um ótimo ajuste e que o valor do residual é menor do que os obtidos anteriores, como esperado, já que os valores calculados de a e b minimizam $\chi 2$

Método de mínimos quadrados

- Finalmente também é possível estimar a incerteza nos coeficientes *a* e *b*, ou seja, o quanto podemos variar *a* e *b* e ainda obter um bom ajuste para os dados.
- Utilizando métodos estatísticos pode-se mostrar que estas incertezas são dadas por:

$$\Delta a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \qquad \Delta b = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\langle x \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

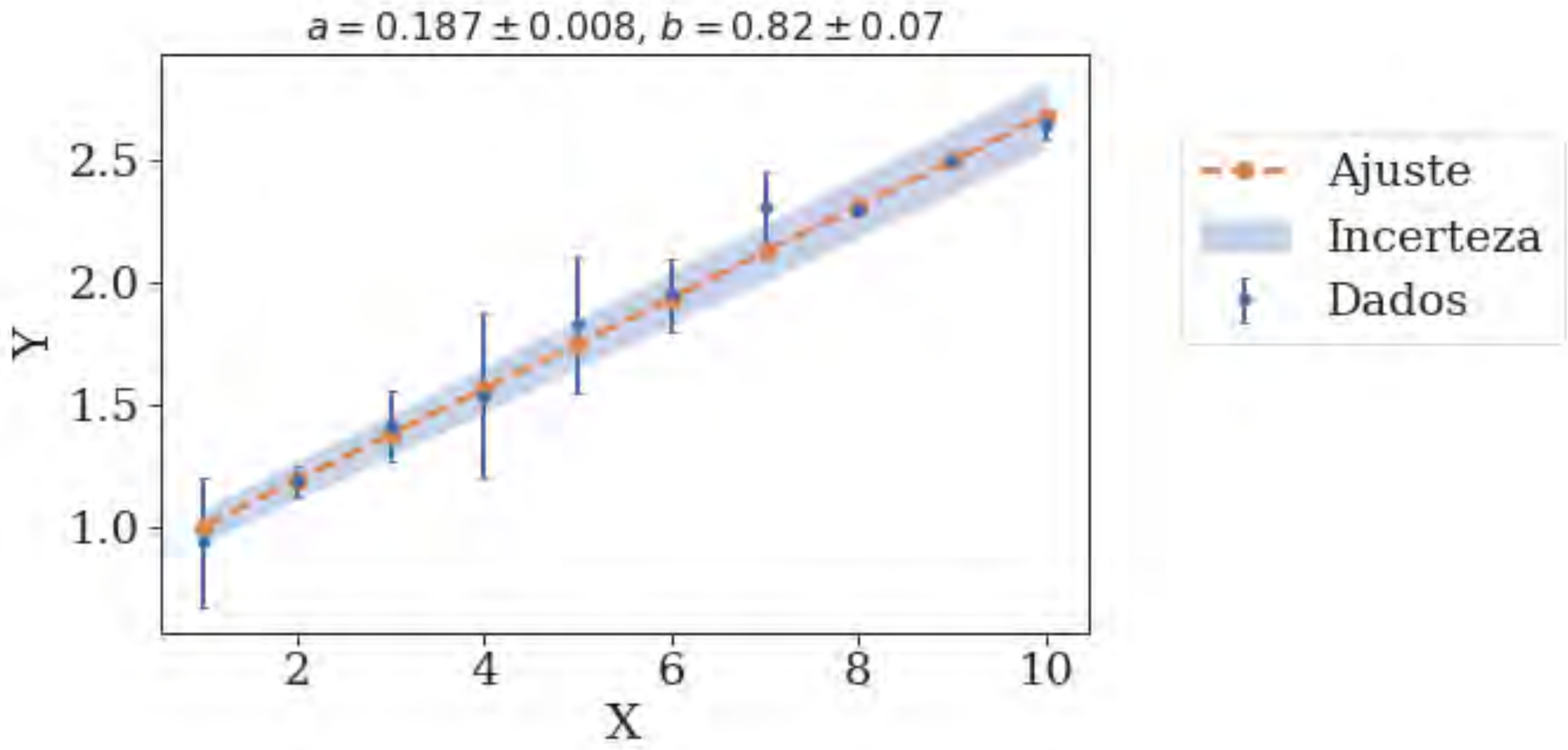
$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{N}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

- A soma é sobre todos os dados experimentais
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i= erro experimental de y_i

Método de mínimos quadrados

- Aplicando este método para o exemplo anterior obtemos:

$$\Delta a = 0,008 \ , \ \Delta b = 0,07$$



Para aprender mais…

- Alguns videos do Khan Academy Brasil mostram como deduzir os valores ótimos para *a* e *b* pelo método de mínimos quadrados (num caso particular): veja aqui, os vídeos 81 a 87.
- Cuidado: as fórmulas apresentadas aqui são mais gerais do que as obtidas nesses vídeos…