

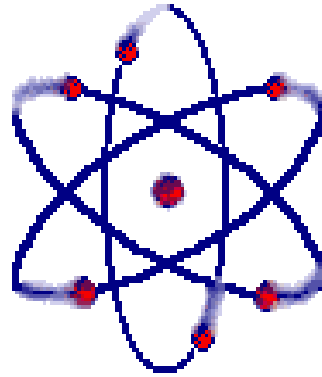


Mecânica - Quântica

Claudio Menezes R.A 22202310151

Wellington Barbosa de Souza

Prof. Dr. Prof.: Pieter W. Westera



Mecânica Quântica
Modelo de Sommerfeld
e o
Princípio da Correspondência

4-10 O MODELO DE SOMMERFELD

Uma das aplicações importantes das regras de quantização de Wilson-Sommerfeld é o caso de um átomo de hidrogênio no qual se supõe que o elétron possa se mover em órbitas *elípticas*. Isto foi feito por Sommerfeld, em uma tentativa de explicação da *estrutura fina* do espectro do hidrogênio. A estrutura fina é uma separação das linhas espectrais em várias componentes diferentes, que é encontrada em todos os espectros atômicos. Pode ser observada apenas se usarmos equipamento de resolução muito grande, já que a separação, em termos de número de onda entre as componentes adjacentes de uma única linha espectral, é da ordem de 10^{-4} vezes a separação entre as linhas adjacentes. De acordo com o modelo de Bohr, isto deve significar que o que tínhamos pensado ser um único estado de energia do átomo de hidrogênio consiste na realidade de vários estados que têm energias muito próximas.

Sommerfeld inicialmente calculou o tamanho e a forma das possíveis órbitas elípticas, bem como a energia total de um elétron se movendo em uma dessas órbitas, usando as fórmulas da mecânica clássica. Descrevendo o movimento em termos das coordenadas polares r e θ , ele aplicou as duas condições de quantização

$$\oint L \, d\theta = n_{\theta} h$$

$$\oint p_r \, dr = n_r h$$

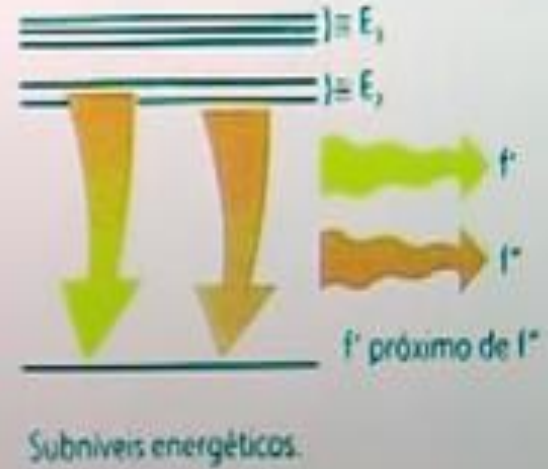
A primeira condição dá a mesma restrição para o momento angular orbital

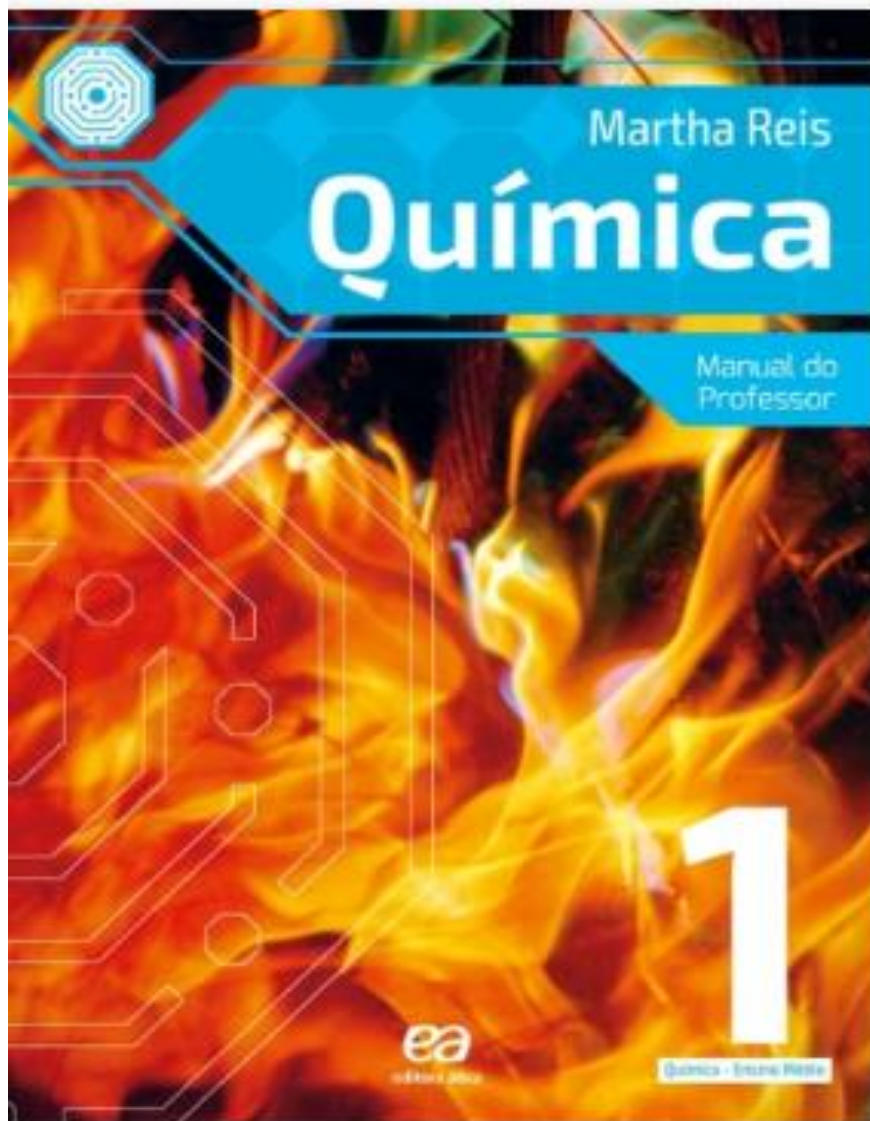
$$L = n_{\theta} \hbar$$

$$n_{\theta} = 1, 2, 3, \dots$$

O modelo de Sommerfeld :

- **Espectroscópios de melhor resolução e técnicas mais avançadas.**
- **Uma única linha, eram na verdade, um conjunto de linhas distintas muito próximas umas das outras.**
- **Estrutura fina dos espectros de emissão.**





Autora Martha Reis, faz uma das primeiras menções ao átomo de Somerfeld no Ensino Médio



Aplicando a condição de estabilidade mecânica análoga a (4-14), obtemos uma terceira equação. Dessas equações, Sommerfeld calculou os semi-eixos maior e menor a e b , que dão a forma e o tamanho das órbitas elípticas e também a energia total E de um elétron nessa órbita. Os resultados são

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu Z e^2} \quad (4-26a)$$

$$b = a \frac{n_\theta}{n} \quad (4-26b)$$

$$E = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (4-26c)$$

onde μ é a massa reduzida do elétron, e onde o número quântico n é definido por

$$n \equiv n_\theta + n_r$$

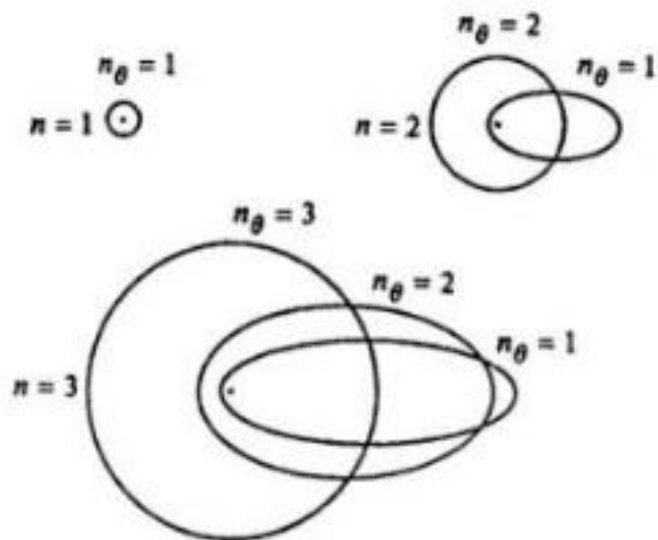
Como $n_\theta = 1, 2, 3, \dots$ e $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$, n pode tomar os valores

Para um dado valor de n , n_θ pode tomar apenas os valores

$$n_\theta = 1, 2, 3, \dots, n$$

O número inteiro n é chamado *número quântico principal*, e n_θ é chamado *número quântico azimutal*.

A equação (4-26b) mostra que a forma da órbita (a razão entre os semi-eixos maior e menor) é determinada pela razão entre n_θ e n . Para $n_\theta = n$ as órbitas são círculos de raio a . Observe que a equação que dá a em termos de n é idêntica a (4-16), a equação que dá os raios das órbitas circulares de Bohr. (Lembre que se levamos em conta o efeito da massa nuclear, temos μ em vez de m em (4-16).) A figura 4-18 mostra, em escala, as órbitas possíveis correspondentes aos três primeiros valores do número quântico principal. Correspondendo a cada valor do número quântico



de qua
 e o elê
 r de ex
 s linha
 rômico
 lidade
 re-estabelece a (4-14)
 (4-16) com μ
 como nos P de a

FIGURA 4-18. Algumas órbitas elípticas de Bohr-Sommerfeld. O núcleo está localizado no foco comum das elipses, indicado pelo ponto.

tico principal n há n diferentes órbitas possíveis. Uma destas, a órbita circular, é exatamente a órbita descrita pelo modelo de Bohr original. As outras são elípticas. Mas apesar das diferentes trajetórias de um elétron nas diferentes órbitas possíveis para um dado n , (4-26c) nos dá que a energia total do elétron é a mesma. A energia total do elétron depende apenas de n . As várias órbitas caracterizadas por um mesmo valor de n são ditas *degeneradas*. As energias de diferentes estados se “degeneram” em uma mesma energia total.

Esta degenerescência na energia total de um elétron, devida à existência de órbitas de formas diferentes mas com o mesmo n , é resultado de um equilíbrio muito delicado entre a energia potencial e cinética, que é característico do tratamento por métodos da mecânica clássica da força coulombiana inversamente proporcional ao quadrado da distância. Exatamente o mesmo fenômeno é encontrado no movimento de satélites ou de planetas, que é governado pela força gravitacional inversamente proporcional ao quadrado da distância. Por exemplo, um satélite pode ser lançado em qualquer uma de toda uma família de órbitas elípticas, todas correspondendo à mesma energia total e com o mesmo semi-eixo maior. Evidentemente não há efetivamente quantização dos parâmetros da órbita nesses casos macroscópicos, mas do ponto de vista da degenerescência, elas são completamente análogas ao caso de um átomo de hidrogênio.

Sommerfeld "removeu a degenerescência" do átomo de hidrogênio tratando, em seguida, o problema *relativisticamente*. Na discussão que segue (4-17), mostramos que, para um elétron em um átomo de hidrogênio, $v/c \approx 10^{-2}$ ou menos. Portanto, esperaríamos que as correções relativísticas para a energia total, devidas à variação relativística da massa do elétron, que é da ordem de $(v/c)^2$, serão apenas da ordem de 10^{-4} ; no entanto, esta é exatamente a ordem de grandeza da separação dos estados de energia do hidrogênio que seria necessária para explicar a estrutura fina de seu espectro. O tamanho real da correção depende da velocidade média do elétron que, por sua vez, depende da excentricidade da órbita. Após um cálculo, que não será re-

produzido aqui por ser muito tedioso, Sommerfeld mostrou que a energia total de um elétron em uma órbita caracterizada pelos números quânticos n e n_θ é igual a

$$E = -\frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (4-27a)$$

A quantidade α é um número puro, chamado *constante de estrutura fina*. Seu valor é

$$\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 7,297 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137} \quad (4-27b)$$

Na figura 4-19, representamos alguns dos primeiros estados de energia do átomo de hidrogênio em termos de um diagrama de níveis de energia. A separação entre os vários níveis com um valor comum de n foi grandemente exagerada, para ficar mais clara. Setas indicam transições entre os vários estados de energia que produzem as linhas do espectro atômico. Linhas correspondentes às transições representadas pelas setas sólidas são observadas no espectro do hidrogênio. Os comprimentos de onda dessas linhas estão em ótima concordância com as previsões obtidas de (4-27a).

No entanto, as linhas correspondentes às transições representadas pelas setas tracejadas da figura 4-19 não são encontradas no espectro. As transições correspondentes não ocorrem. Uma observação da figura mostrará que as transições ocorrem apenas se

$$n_{\theta_i} - n_{\theta_f} = \pm 1 \quad (4-28)$$

Isto é chamado uma *regra de seleção*. Ela seleciona, de todas as transições, quais as que realmente ocorrem.

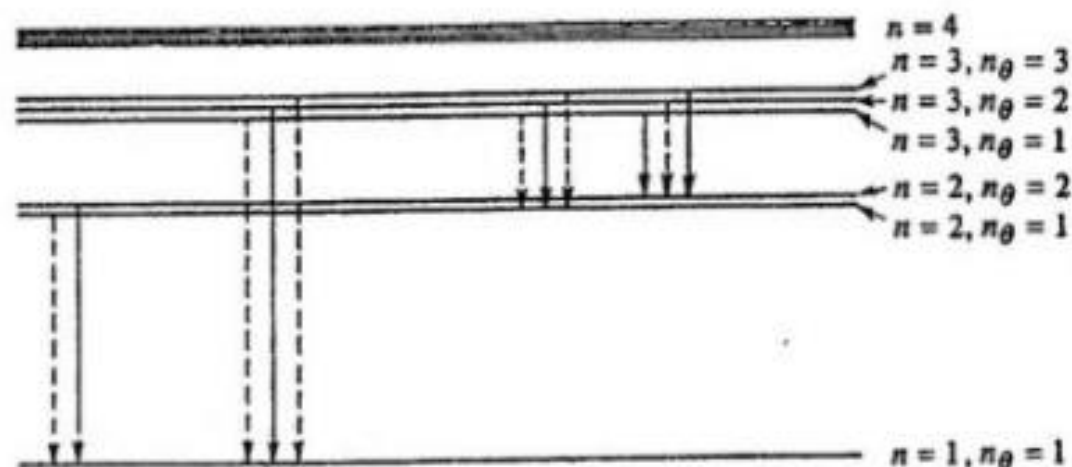


FIGURA 4-19. A separação de estrutura fina de alguns níveis de energia do átomo de hidrogênio. A separação é bastante exagerada. Transições que produzem as linhas observadas no espectro do hidrogênio são indicadas por setas sólidas.

As principais críticas e limitações do modelo atômico de Sommerfeld incluem:

- 1. Limitações da mecânica clássica:** O modelo de Sommerfeld ainda era baseado em princípios da mecânica clássica, e não incorporava completamente os conceitos da mecânica quântica que foram desenvolvidos posteriormente. Isso levou a algumas inconsistências e lacunas na explicação de certos fenômenos atômicos.
- 2. Limitações na descrição dos espectros atômicos:** Embora o modelo de Sommerfeld tenha sido capaz de explicar com sucesso o espectro de emissão do átomo de hidrogênio e a estrutura fina das linhas espectrais, ele não foi capaz de explicar completamente outros aspectos dos espectros atômicos, como as intensidades relativas das linhas espectrais.
- 3. Falta de explicação para a estrutura atômica mais complexa:** O modelo de Sommerfeld era mais adequado para descrever átomos simples, como o hidrogênio, e teve dificuldade em explicar a estrutura atômica de elementos mais complexos com múltiplos elétrons e níveis energéticos.

Essas falhas e limitações no modelo atômico de Sommerfeld foram superadas com o desenvolvimento posterior da mecânica quântica, que forneceu uma descrição mais precisa e abrangente dos fenômenos atômicos.

Referências bibliográficas:

1 - Física Quântica - Átomos, Moléculas, sólidos núcleos e Partículas

Eisberg, R., Retica, Rio de Janeiro, Campus 1979

2 - Física moderna / Paul A. Tipler e Ralph A. Llewellyn; tradução e revisão técnica

Ronaldo Sérgio de Biasi. - 6. ed. - [Reimpr.]- Rio de Janeiro : LTC, 2017

3- Aula19modelos atômicos- https://youtu.be/gerO2ng1Gl0?si=JNqRTJ24bD_Vykggacessoem

02_03_2024