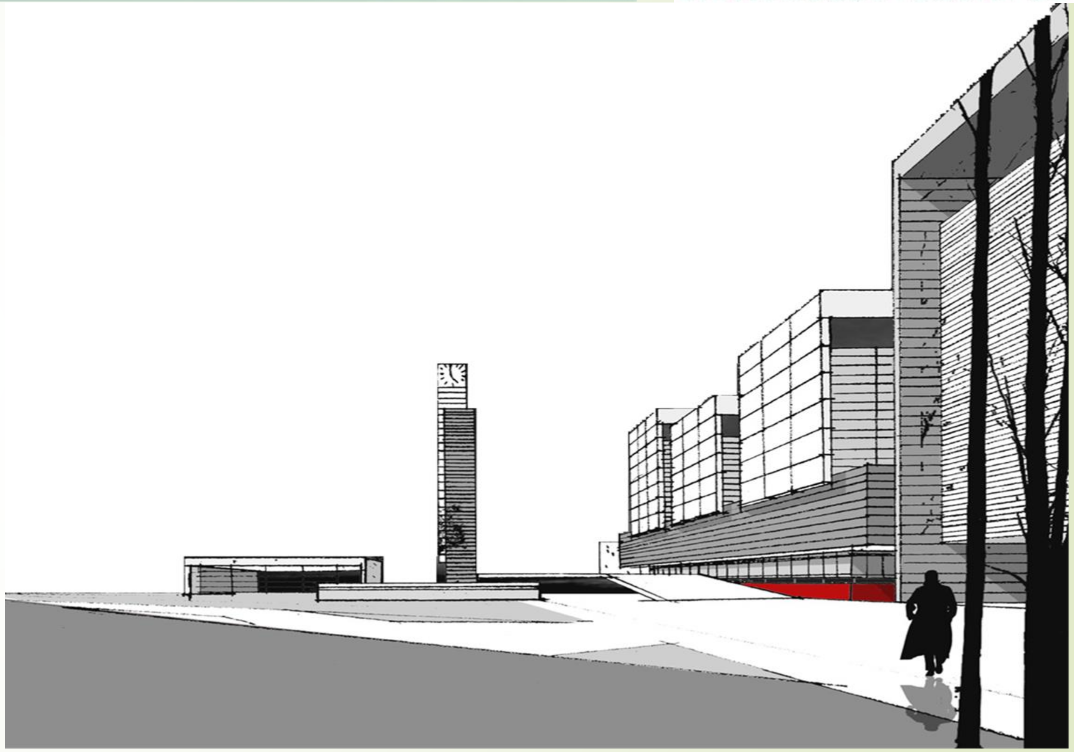
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Mecânica Quântica 2024 - 1

Momento angular

Adalberto Oliveira



Momento angular

O momento angular é definido como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k}$. A componente na direção do eixo z, por exemplo, é $L_z = xp_y - yp_x$. Na mecânica quântica, vimos que o momento deve ser substituído por uma derivada, $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x$. Com o momento angular acontece coisa parecida. O operador correspondente é obtido trocando os

O operador correspondente é obtido trocando os momentos lineares pelas derivadas apropriadas. Para a componente z ficamos com

$$L_z \rightarrow -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) . \quad (3.16)$$

Se usarmos coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta \quad (3.17)$$

as derivadas devem ser expressas da mesma forma, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (3.18)$$

Usando esses resultados, temos simplesmente

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (3.19)$$

Consideremos, como ilustração, uma partícula de massa μ que se move livremente em duas dimensões. Sua energia cinética é dada por $(p_x^2 + p_y^2)/2\mu$, quantidade que quanticamente deve ser associada com $-\hbar^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)/2\mu$. Em coordenadas polares, isso é dado por

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2\mu r^2}L_z^2 \quad (3.20)$$

O segundo termo na energia, envolvendo o momento angular, é conhecido na mecânica clássica como potencial centrífugo.

De posse da expressão para a energia, sabemos que a equação de Schödinger independente do tempo fica sendo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi(r,\theta)=E\psi(r,\theta) \quad (3.21)$$

Se fizermos a hipótese de que as autofunções dependem das coordenadas de forma separável, ou seja, que $\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, ficamos com

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2R}{dr^2}\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}R\right) = ER\Theta \quad (3.22)$$

Multiplicando tudo por r^2 e dividindo por $\psi(r,\theta)$, encontramos

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + r^2E + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+r^2E+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=0\,. \quad (3.23)$$

Os dois primeiros termos dessa equação dependem apenas de r, enquanto o terceiro termo depende apenas de θ. A igualdade só pode valer para todos os valores das coordenadas se forem satisfeitas duas equações independentes:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+r^2E=K \quad \text{e} \quad \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-K\Theta\,. \quad (3.24)$$

Os dois primeiros termos dessa equação dependem apenas de r, enquanto o terceiro termo depende apenas de θ. A igualdade só pode valer para todos os valores das coordenadas se forem satisfeitas duas equações independentes:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+r^2E=K \quad \text{e} \quad \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-K\Theta. \quad (3.24)$$

Referências

Novaes, Marcel, Nelson, Studart. Mecânica quântica básica / São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. – (Série MNPEF)

Paul A., Tipler, 1933- Física moderna A. Llewellyn; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. – 6°. ed. - [Reimpr.]- Rio de Janeiro : LTC, 2017.