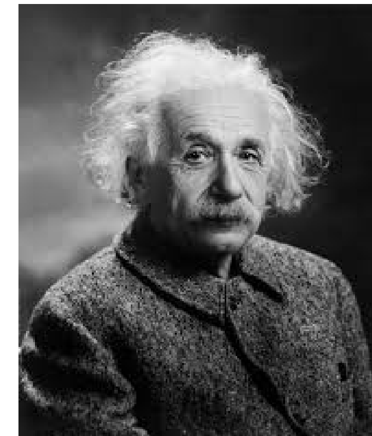
Ótica e Relatividade

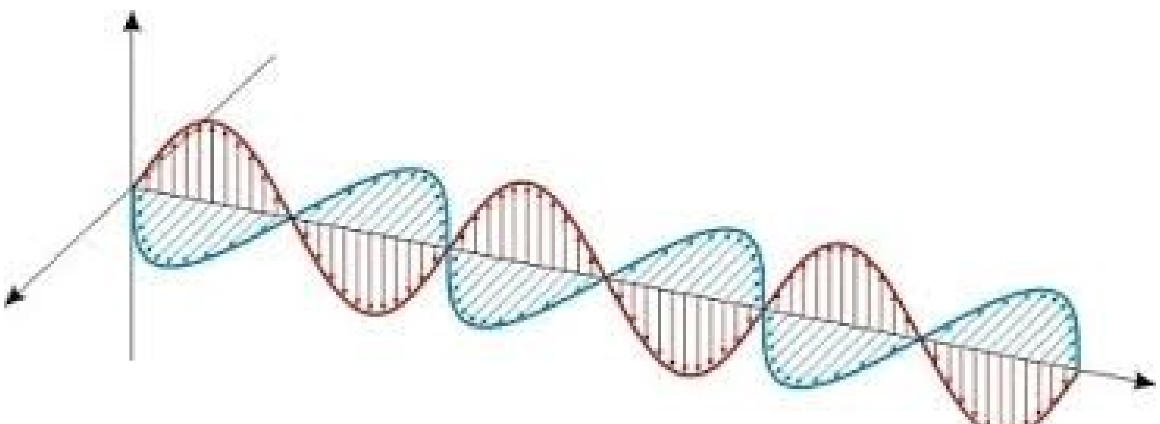
Universidade Federal do ABC

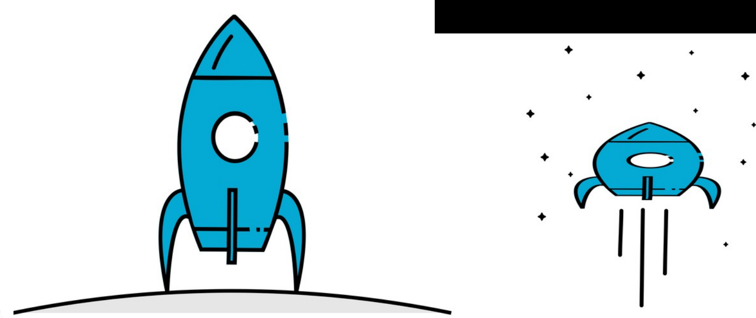
05. Modelo do Oscilador Harmônico Simples



Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html





v=0

v=0,95·c

Propriedades da Luz Além da Ótica Geométrica

A ótica geométrica é uma excelente ferramenta para descrever o comportamento da luz em termos de raios e suas interações com superfícies, baseando-se em princípios como a reflexão e a refração.

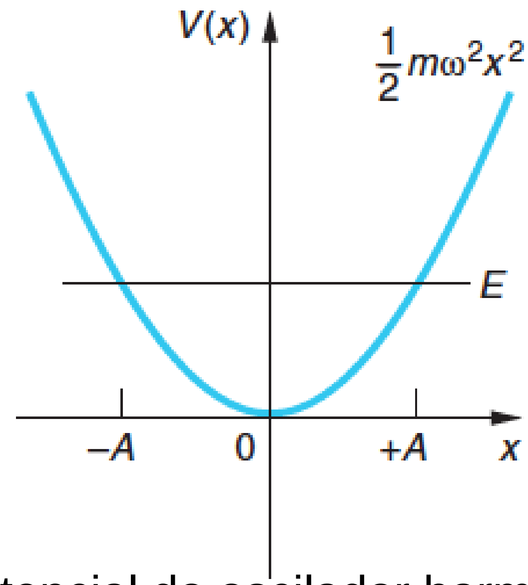
Porém, há uma série de fenômenos que ela não consegue explicar, como difração e interferência, levando ao modelo ondulatório da luz.
=> Ótica Física/Eletromagnética/Ondulatória

(e mais ainda como a dualidade onda-partícula e outras, levando aos campos da ótica quântica e da eletrodinâmica quântica, foro do escopo desta disciplina.)

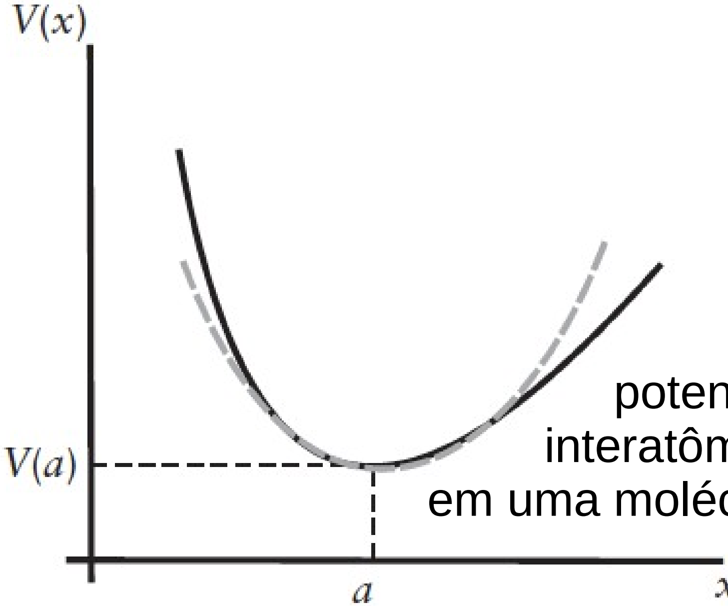
Para poder tratar da ótica ondulatória, precisamos enten-der oscilações, começando pelo oscilador harmônico.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

A importância do OHS vai muito além do sistema massa-mola. Oscilações Harmônicas surgem em uma imensa variedade de sistemas clássicos: pêndulos, fluídos, circuitos eletromagnéticos, modelagem biológica, etc., e também em sistemas quânticos.

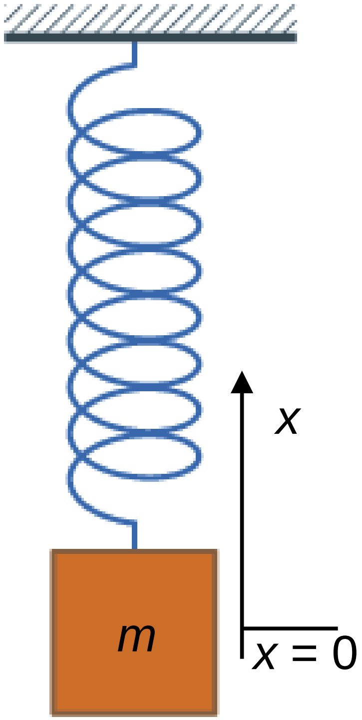


potencial do oscilador harmônico



muitos potenciais com mínimos podem ser aproximadas pelo potencial do OHS

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)



O OHS é um dos sistemas mais estudados em física clássica e um dos mais importantes. Uma exemplo é o sistema "massa-mola", uma massa *m* pendurada numa mola.

Tomando como eixo *x* a direção do possível deslocamento da massa (vertical), e como $x = 0$, a posição de equilíbrio de *m* (as forças da mola e da gravidade se cancelam).
=> *x* é o deslocamento de *m* em relação à posição de equilíbrio.

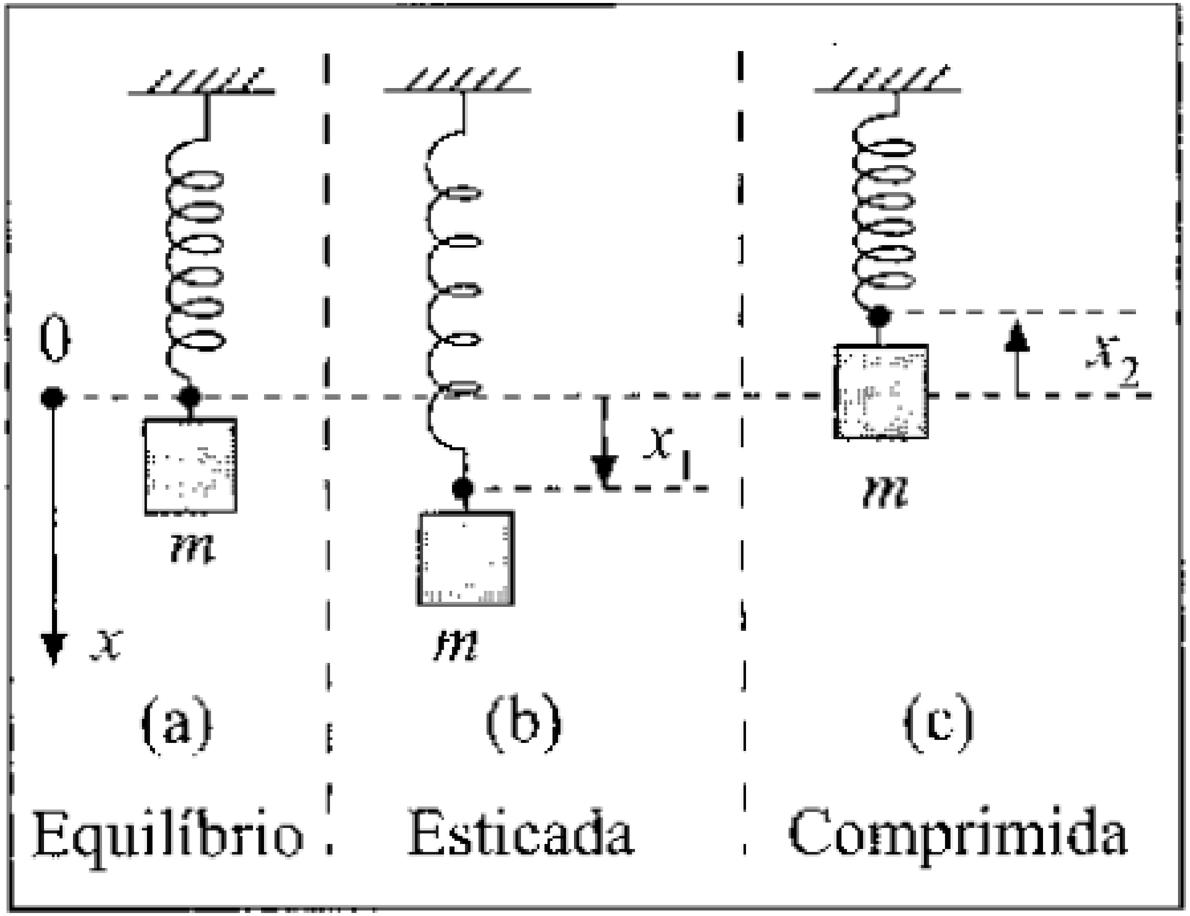
Se afastamos a massa desta posição, $x \neq 0$, a combinação mola-gravidade aplica uma força restauradora:

$F = -kx$,

onde *k* é a constante da mola ou de Hooke.

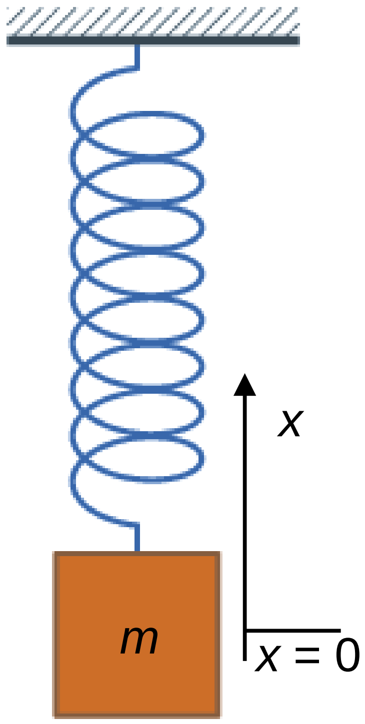
O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

mg é negativa, já que *g* é na direção negativa de *x*, e a força da mola é positiva (pra cima)



mg e a força da mola se cancelam	$x < 0$ A força da mola domina => $F = -kx > 0$	$x > 0$ *mg* domina => $F = -kx < 0$

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)



$F = -kx$

Assim, podemos associar uma energia potencial $V(x)$ à posição x da massa:

$V(x) = -\int_0^x F\,dx = -\int_0^x -kx'\,dx' = \frac{1}{2}kx^2$

Pela segunda lei de Newton:

$F = m\,d^2x/dt^2 = -kx$,

uma equação diferencial,
com aquela conseguimos achar $x(t)$

Uma solução é $A \cdot \cos \sqrt{k/m} \cdot t = A \cdot \cos \omega t$, onde $\omega := \sqrt{k/m}$.
o que descreve o movimento da massa, quando é soltada em $t = 0$ da posição $x = A$.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

$F = -kx = -m\omega^2 x,$

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$

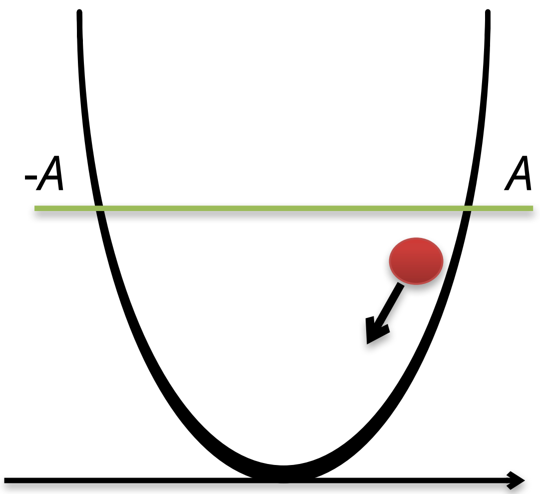
$x(t) = A\cdot\cos\omega t = A\cdot\cos\sqrt{k/m}\cdot t$

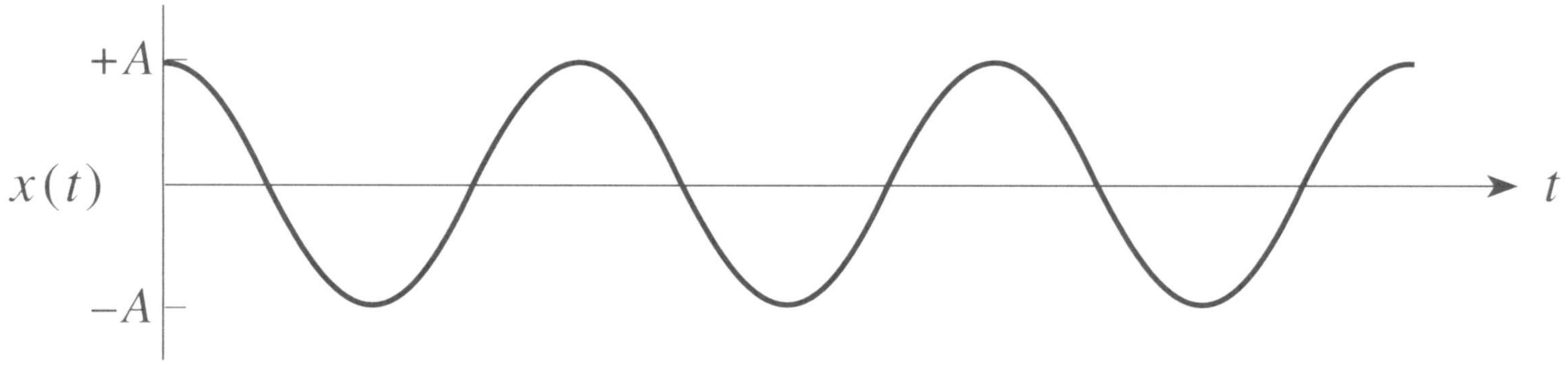
$\Rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = -A\sqrt{k/m}\cdot\text{sen}\,\sqrt{k/m}\cdot t$

$\quad = -A\omega\cdot\text{sen}\,\omega\cdot t$

$\Rightarrow a(t) = \ddot{x}(t) = -Ak/m\cdot\cos\sqrt{k/m}\cdot t$

$\quad = -A\omega^2\cdot\cos\omega\cdot t = -\omega^2 x(t)$





O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Olhando de novo pra equação que levou a esta solução:

$F = m\,\ddot{x}(t) = -kx$ ou $\boxed{\ddot{x}(t) = -\text{const.}\cdot x(t)}$

Se algum problema na física leva a uma equação desta forma, uma solução será

$x(t) = A\cdot\cos\omega t$, onde $\omega = \sqrt{\text{const.}}$

Chamamos ela de Equação do Oscilador Harmonico.

!!! A constante da proporcionalidade entre x e $\ddot{x}$ tem que ser negativa, isto é, a força tem que ser restauradora, senão a solução será outra (exponencial).

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

$\ddot{x}(t) = -\text{const.} \cdot x(t)$

$x(t) = A \cdot \cos \omega t$, onde $\omega = \sqrt{\text{const.}}$

Já que a solução é obtida integrando duas vezes, deveríam surgir duas constantes de integração, levando a duas soluções independentes.

A outra é $B \cdot \text{sen}\, \omega t$, que descreve o mesmo comportamente, adiantado por ¼ período.

Já que a equação do oscilador harmônico é linear (a 2ª derivada é linear), qualquer combinação linear de soluções também é solução:

=> solução geral: $x(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \text{sen}\, \omega t$

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

$x(t) = a \cdot \cos \omega t + b \cdot \text{sen}\, \omega t$

Esta solução também pode ser escrita como
$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$,
com
$A = +\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = -\text{tg}^{-1}(b/a)$ <=> $a = A \cdot \cos \varphi$, $b = -A \cdot \text{sen}\, \varphi$
(Bom exercício: comprove isto usando a identidade trigonométrica $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$).

Dependendo do problema, a primeira ou a segunda versão pode ser mais útil.
Exemplo: Caso $x_0 = x(t=0)$ e/ou $\dot{x}_0$ é dado, na primeira versão isto te dá diretamente o valor de a e/ou b, já que
$x(0) = a \cdot \cos \omega \cdot 0 + b \cdot \text{sen}\, \omega \cdot 0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad a = x_0$
$\dot{x}(0) = -a\omega \cdot \text{sen}\, \omega \cdot 0 + b\omega \cdot \cos \omega \cdot 0 = -a \cdot 0 + b \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad b = \dot{x}_0/\omega$

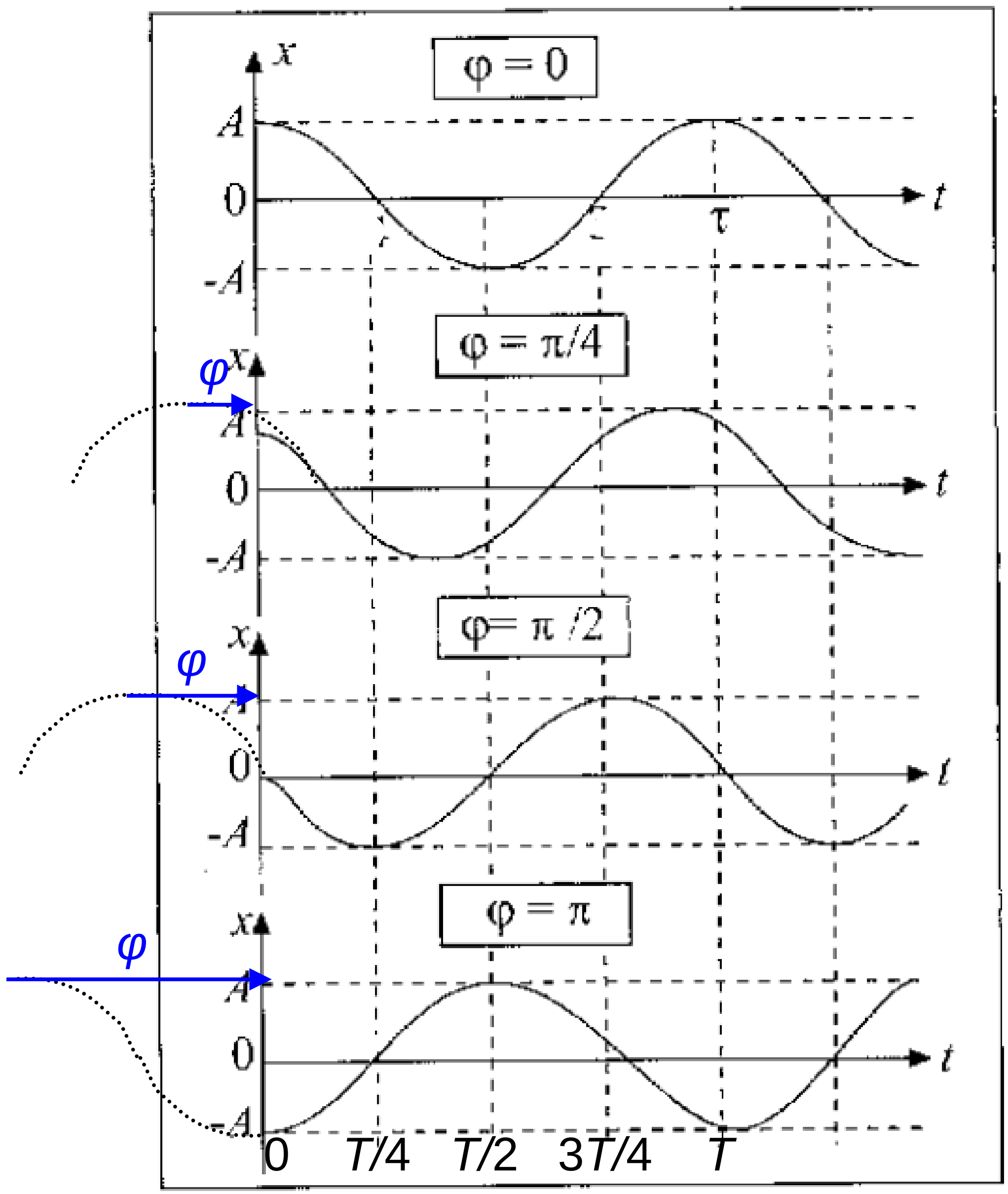
O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

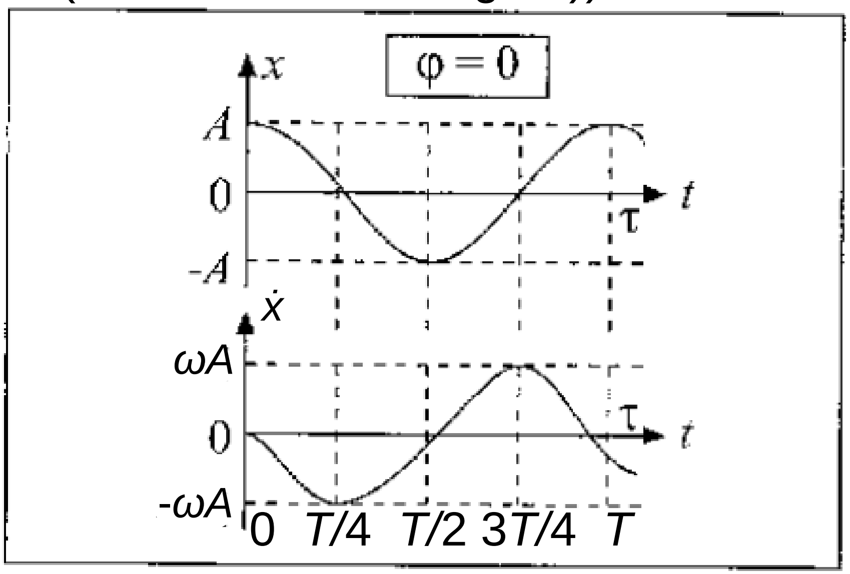
Dando nomes pras grandezas:

A = amplitude [mesma unidade que x]
ω = frequência angular [rad/s, ou simplesmente s^{-1}]
$\nu := \omega/2\pi$ = frequência (número de oscilações por unidade de tempo) [também s^{-1} = Hz (Hertz)]
$T := 1/\nu = 2\pi/\omega$ período da oscilação [s]
φ = fase da oscilação [rad, ou sem unidade]

Soluções do OHS



O pico de $\dot{x}$ = -$A\omega$·sen (ωt + φ) ocorre um quarto de um período antes do pico de x (e o de $\ddot{x}$ = -$A\omega^2$·cos (ωt + φ) mais um quarto de período antes (não mostrado na figura))



O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Energia do Oscilador Harmônico

Voltando pro sistema massa-mola:
Já conhecemos a energia potencial do sistema:
$V(x)$ ou $U(x) = ½kx^2$
$\Rightarrow U(t) = U(x(t)) = ½kx^2(t) = ½k(A\cdot\cos(\omega t + \varphi))^2$
$= ½m\omega^2A^2\cdot\cos^2(\omega t + \varphi)$ (já que $\omega = \sqrt{k/m}$)

E a energia cinética?
$K(t) = ½mv^2 = ½m\dot{x}^2 = ½m(-A\omega\cdot\text{sen}\ \omega\cdot t)^2$
$= ½m\omega^2A^2\cdot\text{sen}^2(\omega t + \varphi)$

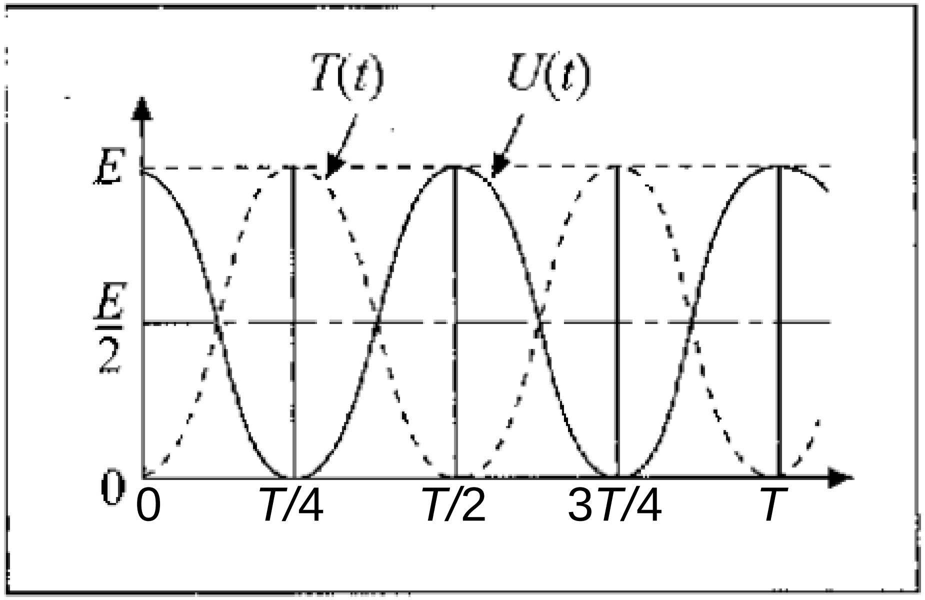
A energia total é $E(t) = U(t) + K(t)$
$= ½m\omega^2A^2\cdot\cos^2(\omega t + \varphi) + ½m\omega^2A^2\cdot\text{sen}^2(\omega t + \varphi)$
$= ½m\omega^2A^2\cdot(\cos^2(\omega t + \varphi) + \text{sen}^2(\omega t + \varphi)) = ½m\omega^2A^2$
constante => conservação da energia

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Energia do Oscilador Harmônico

$U(t) = ½m\omega^2A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$
com picos para $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow \omega t + \varphi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$
e pontos zero para $\omega t + \varphi = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$

$K(t) = ½m\omega^2A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega t + \varphi)$
picos em
$\omega t + \varphi = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$
e pontos zero
em $\omega t + \varphi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$



A energia alterna entre potencial e cinética cada uma oscilando com o duplo da frequência do oscilador, já que $\cos^2\theta = ½\cdot(1 + \cos 2\theta)$ e $\text{sen}^2\theta = ½\cdot(1 - \cos 2\theta)$.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Energia do Oscilador Harmônico

O valor médio de uma grandeza $f(t)$ que oscila junto com o oscilador (com o mesmo período) é

$$\overline{f} = 1/T \cdot \int_0^T f(t)\, dt$$

pras energias potencial e cinética isto dá (fácil usando as identidades do slide anterior):

$$\overline{U} = \overline{K} = \tfrac{1}{4} \cdot m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2} \cdot E$$

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Energia do Oscilador Harmônico

Algumas figuras ilustrando esta troca-troca:

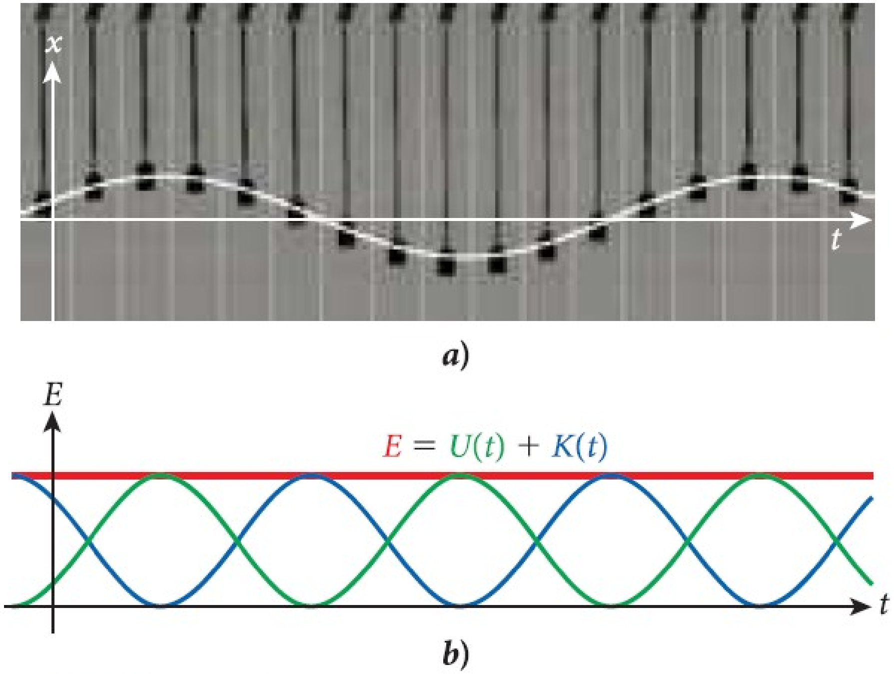
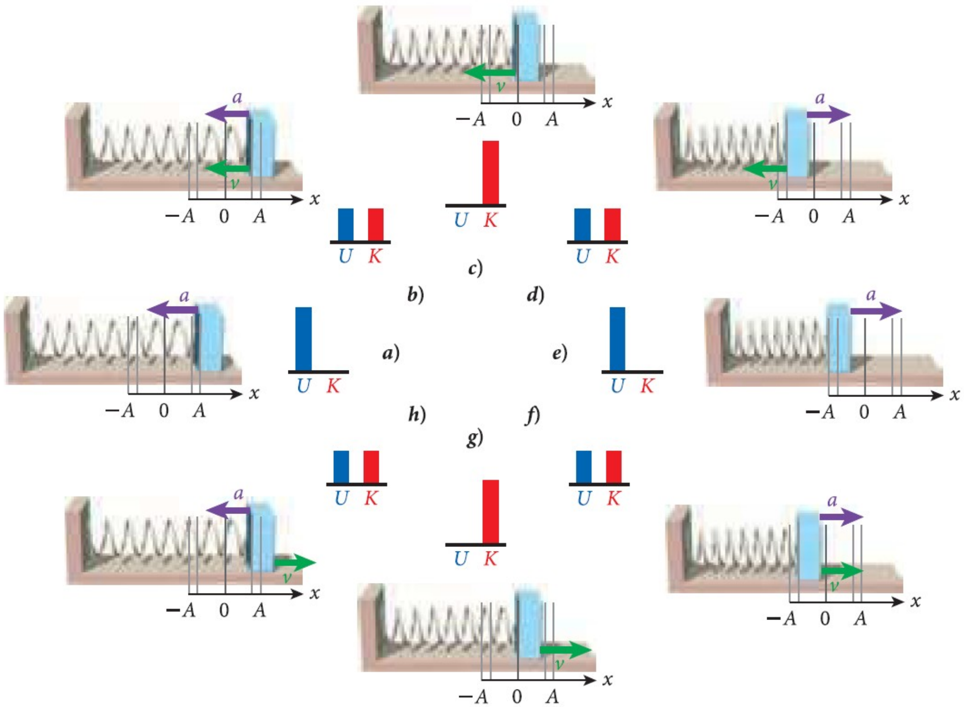


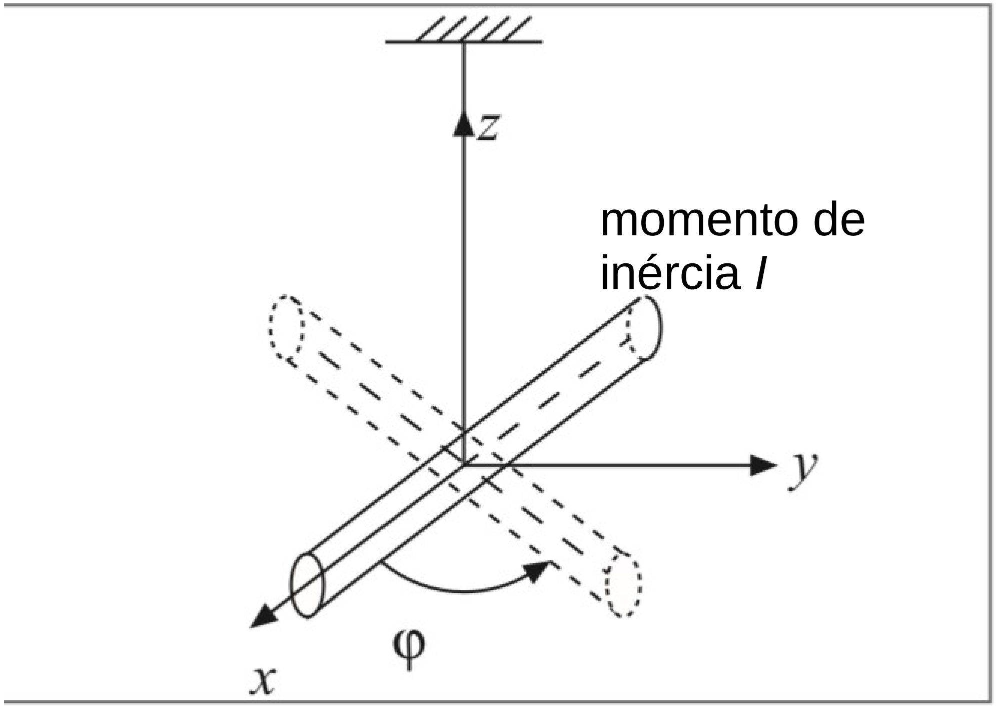
FIGURA 14.14 Oscilaciones armónicas de una masa unida a un resorte: *a*) desplazamiento como una función del tiempo (lo mismo que en la figura 14.2); *b*) energías potencial y cinética como función del tiempo en la misma escala de tiempo.



O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

Pêndulo de Torção



Grandeza variável (corresponde ao x):
ângulo de torção φ

Torque restauradora:
$\tau = -\kappa\varphi$, onde
κ = módulo de torção

FeMec: $\tau = I\alpha$,
onde $\alpha = d^2\varphi/dt^2$ = aceleração angular

=> $-\kappa\varphi = I \cdot d^2\varphi/dt^2$ => $d^2\varphi/dt^2 = -\omega^2\varphi$, onde $\omega = \sqrt{\kappa/I}$
etc.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

Pêndulo Simples

Grandeza variável:
deslocamento angular θ

A força restauradora é a componente tangencial $\mathbf{F}_t$ da força gravitacional (a radial é cancelada pela tração da corda)

$\Rightarrow -mg\cdot \text{sen}\,\theta = ma_t = m\ell\ddot{\theta}$
$\Rightarrow \ddot{\theta} = -g/\ell \cdot \text{sen}\,\theta$

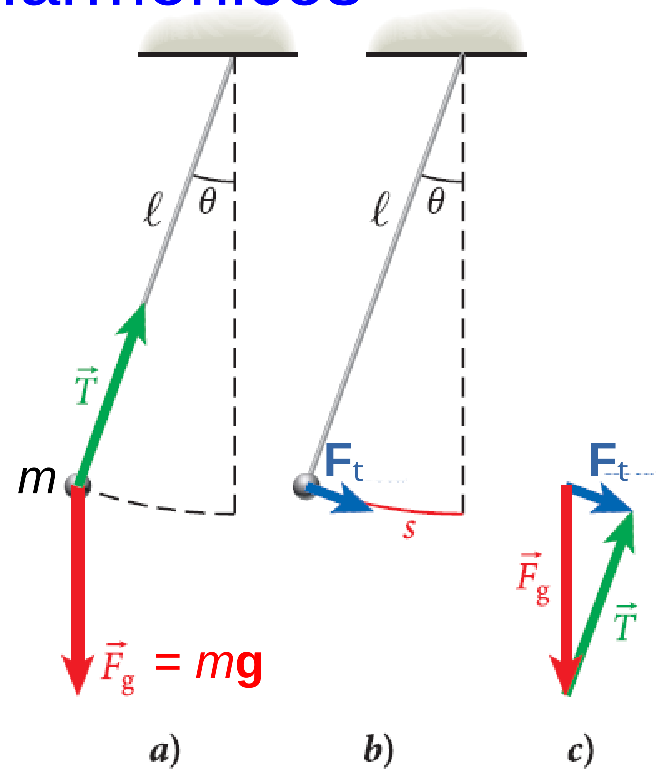


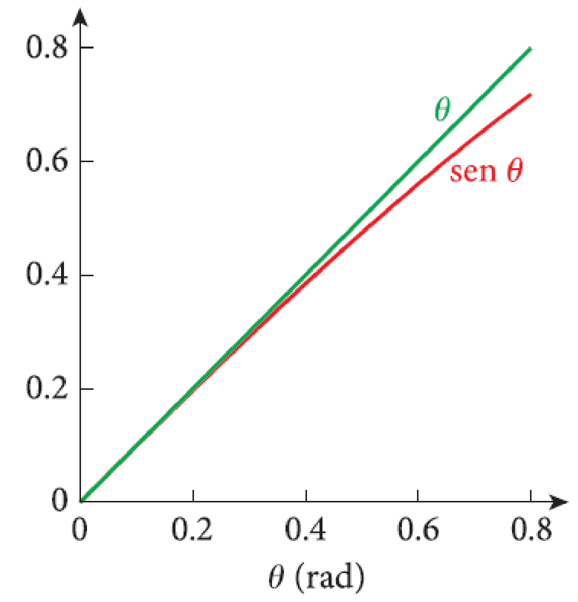
FIGURA 14.10 Un péndulo *a*) con los vectores fuerza debidos a la gravedad y la tensión de la cuerda y *b*) con el vector fuerza neta. *c*) Construcción vectorial de la fuerza neta.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

Pêndulo Simples

$\ddot{\theta} = -g/\ell \cdot \text{sen}\,\theta$



Para ângulos pequenos
(θ < 10° ou 0.17 rad)
podemos usar sen $\theta \sim \theta$:

$\ddot{\theta} = -g/\ell \cdot \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$,
onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ou $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

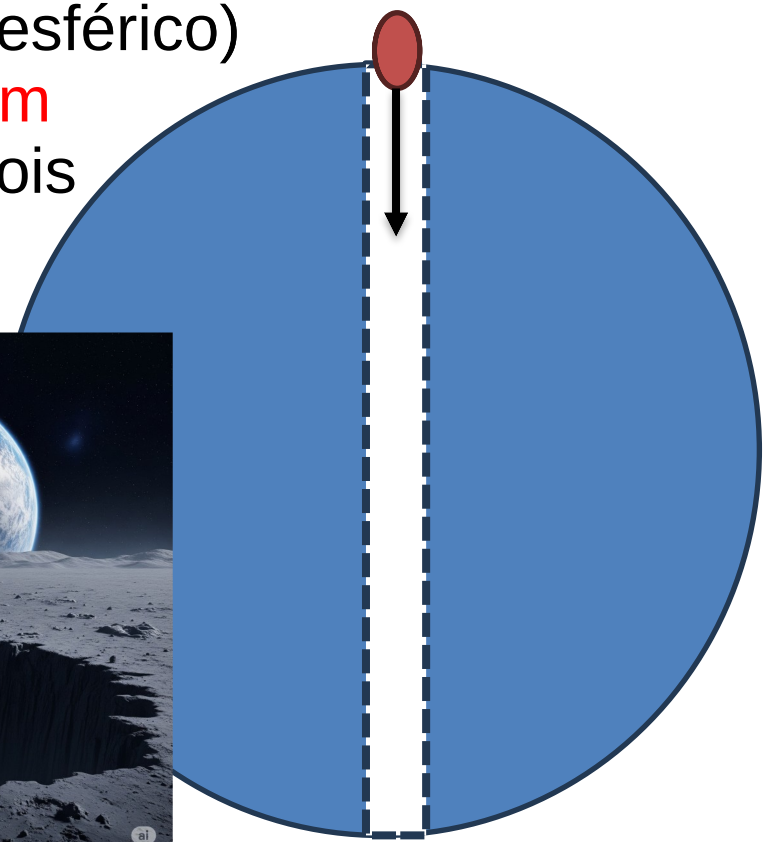
Para pequenas amplitudes, o período de oscilação de um pêndulo simples independe da amplitude, fato já conhecido desde Galileu e naquele se baseia o funcionamento dos primeiros relógios mecânicos.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

O Fura-Lua

Meio de transporte hipotético, naquele se faz um túnel que atravessa a Lua (ou outro corpo celeste esférico) com massa M e raio R, e é acelerado sem atrito pela gravitação até o centro, e depois desacelerado, parando exatamente do lado oposto.



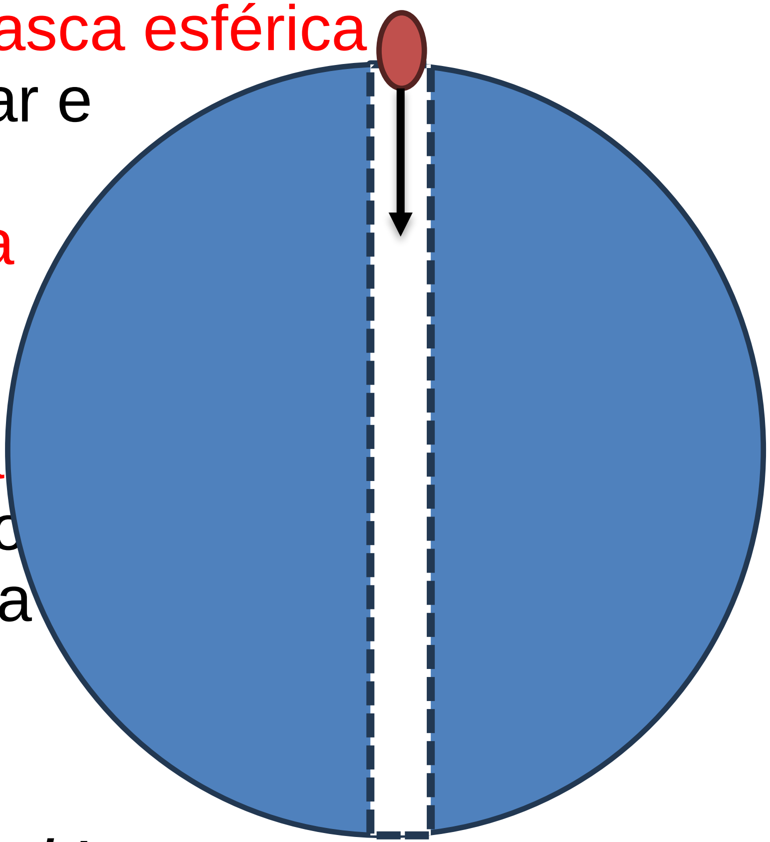
Caso não se desce naquele momento, se cai de volta, etc., e faz um movimento oscilador ida e volta entre os dois lados.

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

O Fura-Lua

Supondo, que a Lua tenha densidade constante ρ e usando a seguinte consequência do teorema da casca esférica (=> FeMec(?), Introdução à Física Estelar e à Cosmologia):
uma distribuição esfericamente simétrica de massa exerce sobre uma massa m na distância r do seu centro uma força equivalente à força que a massa contida na esfera com raio r, M_r, excerceria, caso se encontrasse concentrada no centro da esfera:



$F(r) = GM_r m/r^2$, onde
$M_r = \int_0^r dM = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^r \rho(r')\cdot 4\pi r'^2\, dr'$

O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

O Fura-Lua

Calculando o tempo para atravessar a Lua ida e volta (i.e. o período de oscilação):

$a = d^2r/dt^2 = -GM_r/r^2 = -G4\pi r^3\rho/3r^2$

$= -4\pi G\rho/3 \cdot r$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{4\pi G\rho/3}$

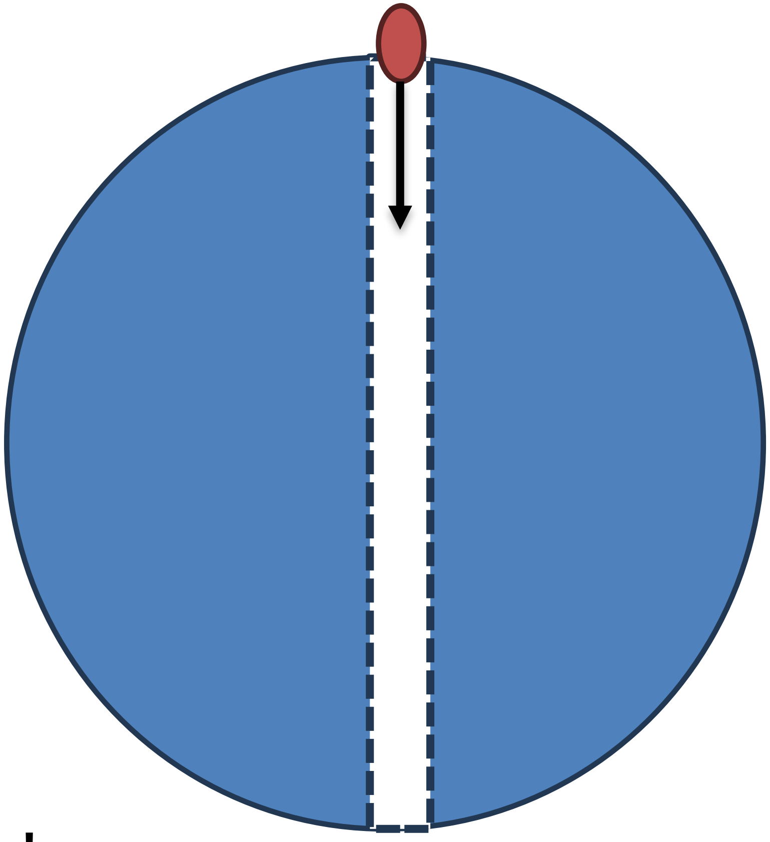
$\Rightarrow T = 2\pi/\omega = \sqrt{3\pi/G\rho}$ *

$= 2\pi\cdot\sqrt{R^3/GM}$

Lua: 108 min

Terra: 84 min

*O tempo para atravessar o astro depende apenas da sua densidade!



O Oscilador Harmônico Simples (OHS)

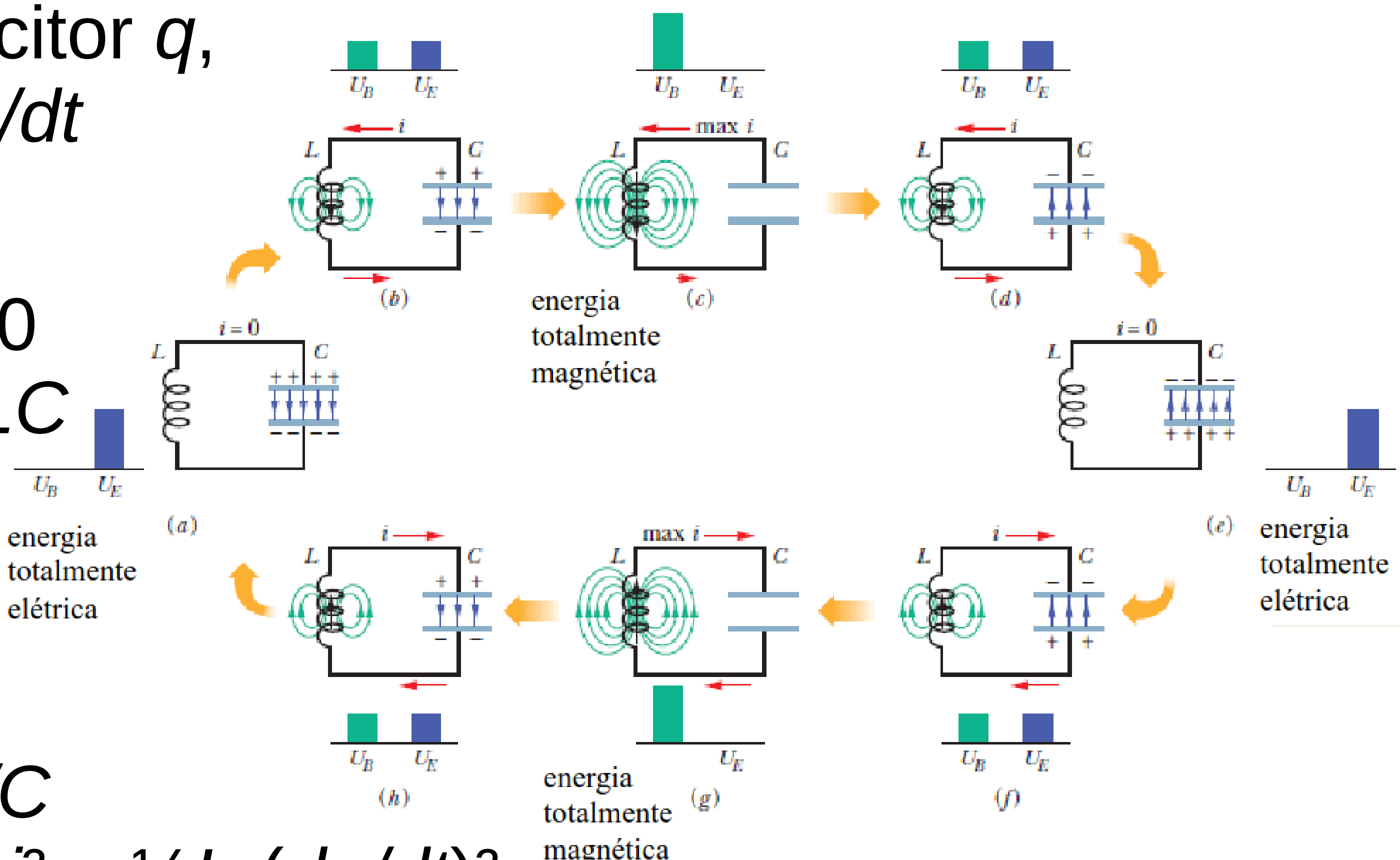
Outros Exemplos de Osciladores Harmônicos

O Circuito *LC* (=> Fenômenos Eletromagnéticos)

Carga no capacitor q,
Corrente $i = dq/dt$

lei das malhas:
$L \cdot di/dt + q/C = 0$
$\Rightarrow d^2q/dt = -q/LC$

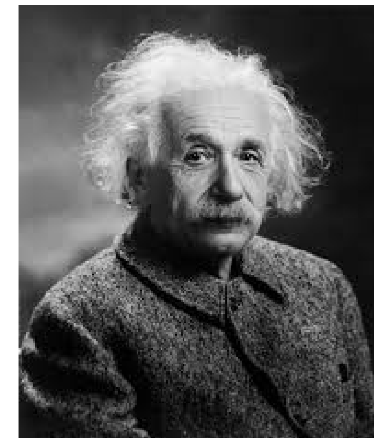
$\Rightarrow \omega = 1/\sqrt{LC}$



Energia no capacitor: $\frac{1}{2}q^2/C$
no indutor: $\frac{1}{2} \cdot Li^2 = \frac{1}{2}L \cdot (dq/dt)^2$

Ótica e Relatividade

Universidade Federal do ABC



FIM PRA HOJE