



Ótica e Relatividade

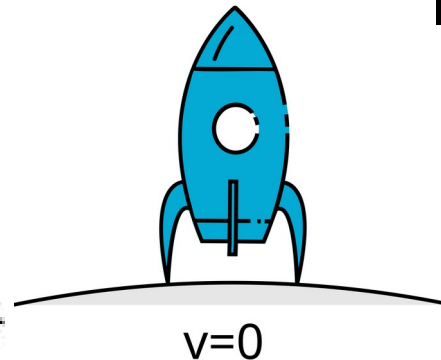
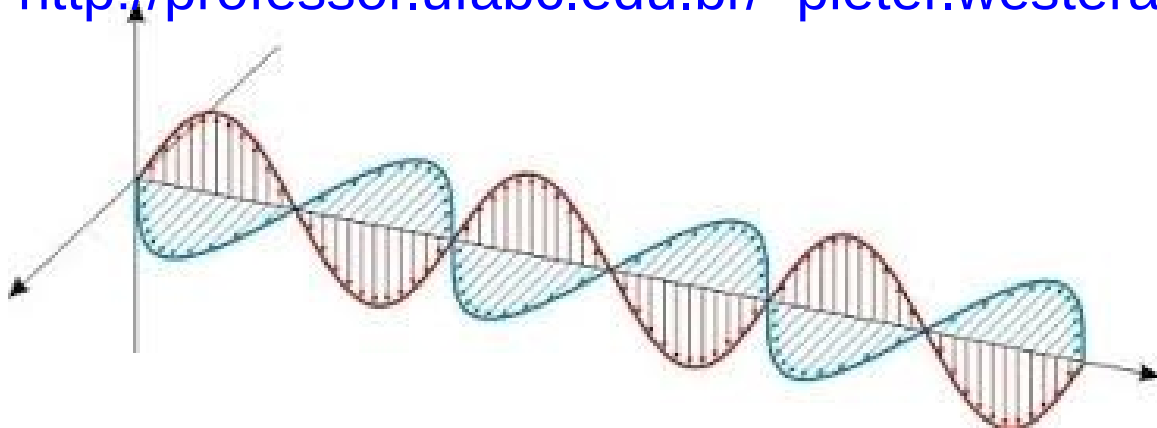
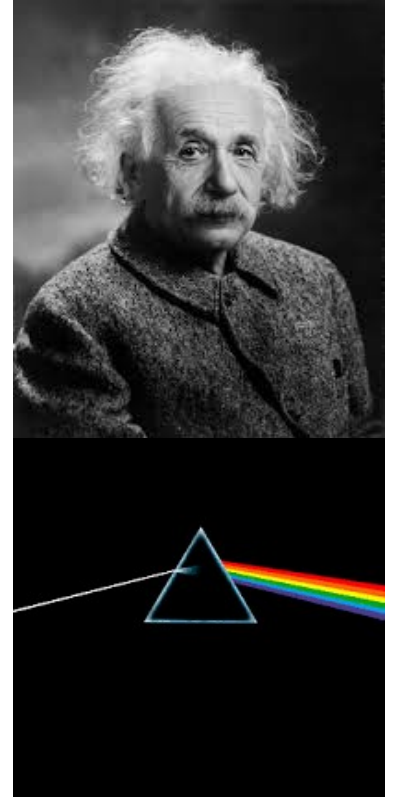
Universidade Federal do ABC

06. OHS e Movimento Circular, Formalismo Complexo, Osciladores e Ondas, Dedução da Equação de Ondas Mecânicas em Meios Materiais

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

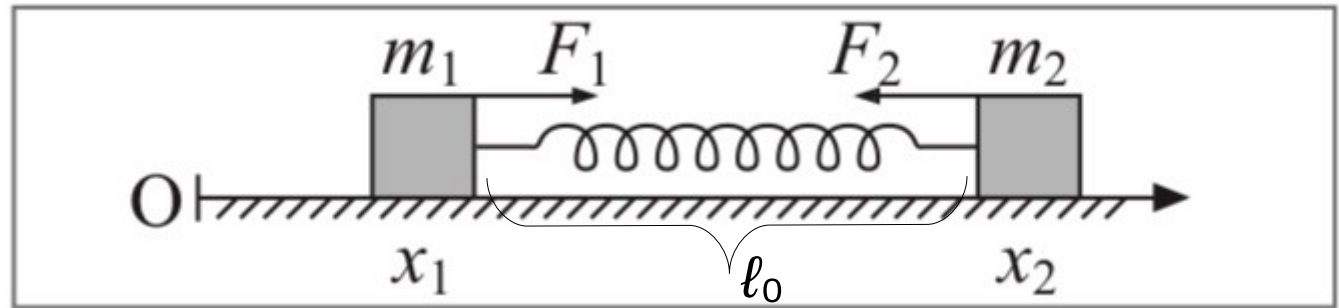
<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



Oscilações de Duas Partículas

Oscilação de Duas Partículas Acopladas

Nenhuma força externa, massa da mola desprezível,



=> centro de massa: $x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$

ℓ_0 : Distância de equilíbrio (mola relaxada)

=> Deformação da mola $x = (x_2 - x_1) - \ell_0$

=> $F_1 = m_1 \ddot{x}_1 = kx$, $F_2 = m_2 \ddot{x}_2 = -kx$

=> $\ddot{x}_{CM} = (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) / (m_1 + m_2) = (kx - kx) / (m_1 + m_2) = 0$

O centro de massa se desloca com velocidade constante, como era de se esperar (senão o sistema conseguiria se auto-acelerar).

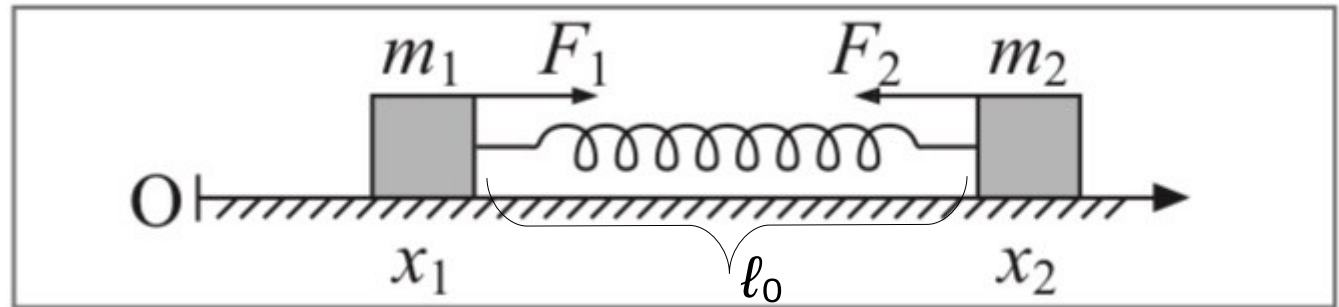
Oscilações de Duas Partículas

Oscilação de Duas Partículas Acopladas

$$\begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = kx \quad | \cdot m_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -kx \quad | \cdot m_1 \end{array}$$

\Rightarrow

$$\begin{array}{l} m_1 m_2 \ddot{x}_1 = m_2 kx, \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -m_1 kx \end{array}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow -k(m_1+m_2)x &= m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = m_1 m_2 d^2(x_2 - x_1 - l_0)/dt^2 \\ &= m_1 m_2 \ddot{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \ddot{x} = -kx$, onde $\mu := m_1 m_2 / (m_1 + m_2) =$ **massa reduzida**

A **coordenada relativa** x do sistema de duas massas obedece exatamente à equação do **oscilador harmônico**, com a massa dada pela **massa reduzida**.

Oscilações de Duas Partículas

Oscilação de Duas Partículas Acopladas

A **energia potencial** do sistema é **apenas** a energia potencial da **mola**, $U = \frac{1}{2}kx^2$.

E a **energia cinética**?

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \dots \text{ [um monte de passos chatos]} \\ = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_1m_2\dot{x}^2/(m_1+m_2) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$$

Os **movimentos** dos sistemas

- como um **todo**: massa m_1+m_2 , posição x_{CM} ,

$$U = 0, K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\text{CM}}^2, \text{ e}$$

- **interno**: massa reduzida μ , deformação da mola x ,

$$U = \frac{1}{2}kx^2, K = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$$

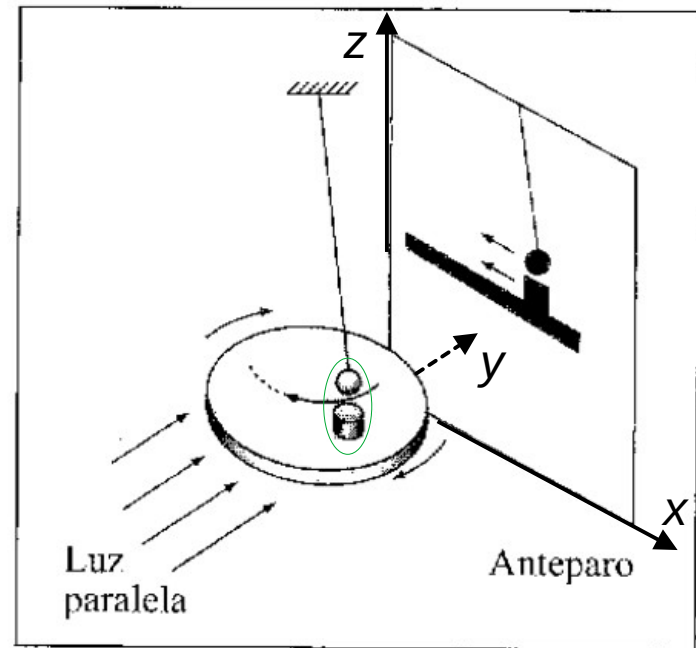
podem ser tratados **independentemente**.

Movimento Circular Uniforme

Oscilador Harmônico Simples em Duas Dimensões

Será que há uma **ligação** entre o **oscilador harmônico** e o **movimento circular uniforme** (MCU, \Rightarrow FeMec)? Ambos parecem tão oscilatórios....

Supondo um **corpo** em **movimento circular uniforme** no **plano xy** e olhando pra **coordenada x** da **posição** dele, aqui realizada pela **projeção** por luz vindo na direção y em cima do plano xz .



Movimento Circular Uniforme

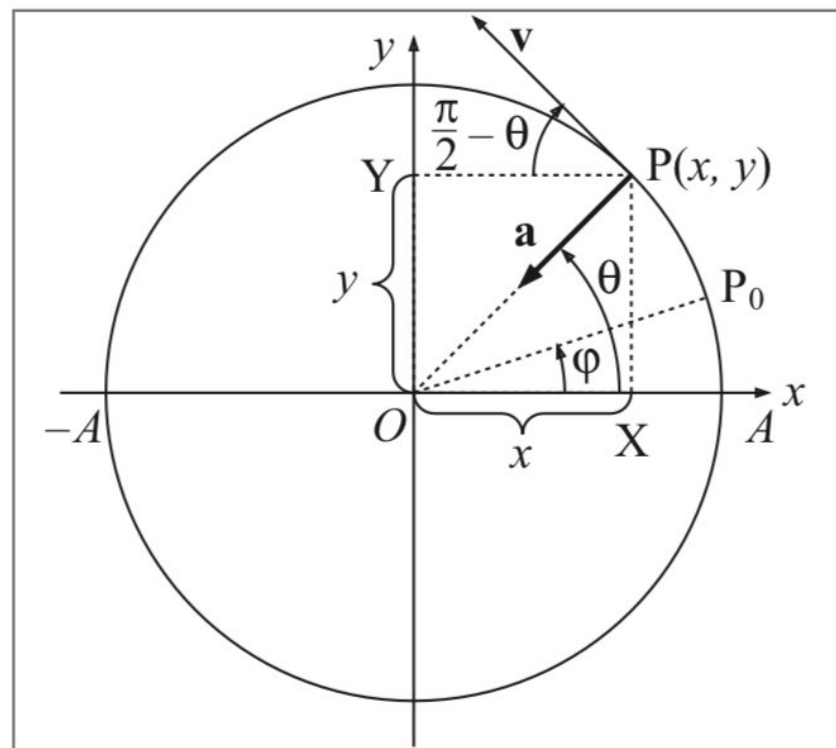
Oscilador Harmônico Simples em Duas Dimensões

Raio do movimento A ,
coordenada angular θ ,
ângulo inicial φ ,
velocidade angular ω

Pelo desenho dá para ver:

$$x(t) = A \cdot \cos \theta(t) = A \cdot \cos (\omega t + \varphi),$$
$$\text{e } y(t) = A \cdot \sin (\omega t + \varphi)$$

=> As **coordenadas** x e y fazem **oscilações harmônicas!**



vetor posição: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = A \cdot (\cos (\omega t + \varphi), \sin (\omega t + \varphi))$

velocidade: $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = A\omega \cdot (-\sin (\omega t + \varphi), \cos (\omega t + \varphi))$

ac.: $\mathbf{a}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}) = -A\omega^2 \cdot (\cos (\omega t + \varphi), \sin (\omega t + \varphi)) = -\omega^2 \cdot \mathbf{r}(t)$

Movimento Circular Uniforme

Oscilador Harmônico Simples em Duas Dimensões

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$
$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

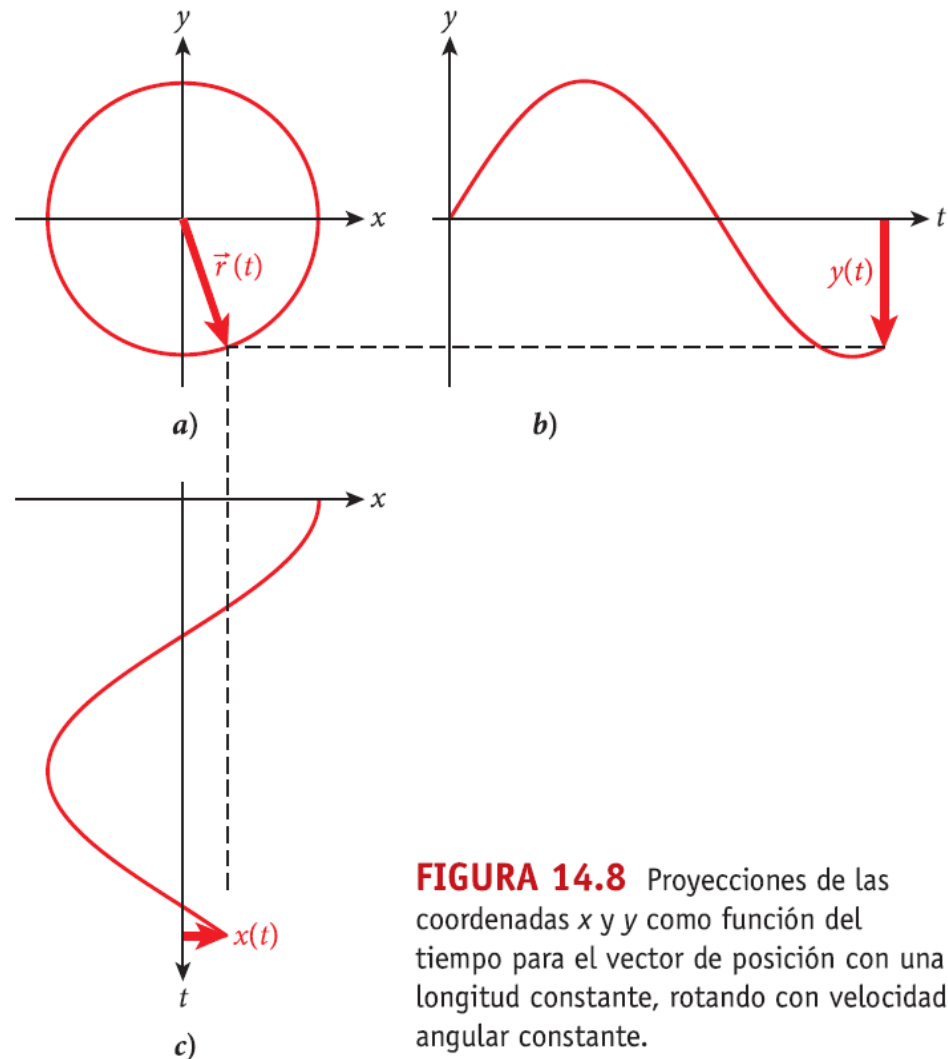


FIGURA 14.8 Projeções de las coordenadas x y y como función del tiempo para el vector de posición con una longitud constante, rotando con velocidad angular constante.

Movimento Circular Uniforme

Oscilador Harmônico Simples em Duas Dimensões

$$\mathbf{r}(t) = A \cdot (\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi))$$

$$\mathbf{v}(t) = A\omega \cdot (-\sin(\omega t + \varphi), \cos(\omega t + \varphi))$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \cdot \mathbf{r}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= A^2\omega \cdot (-\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi)) \\ &= 0 \Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{v} \quad \text{como já sabíamos sobre o MCU.} \end{aligned}$$

$$\text{e } \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{centrípeta}} = -\omega^2 \mathbf{r} \parallel \mathbf{r} \text{ na direção oposta que } \mathbf{r} \text{ como também já sabíamos.}$$

Números Complexos

Lembrete(?)

Definindo $i := \sqrt{-1}$ = **unidade imaginária**,
números complexos têm uma
parte real e uma **parte imaginária**:
 $z = a + bi$, com $a = \text{Re}\{z\}$, $b = \text{Im}\{z\}$

Chamamos de **complexo conjugado** de z :
 z^* ou $\bar{z} = a - bi$,

Assim $\text{Re}\{z\} = \frac{1}{2} \cdot (z + z^*)$, $\text{Im}\{z\} = \frac{1}{2i} \cdot (z - z^*)$

Definimos o **módulo** de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*}$,

já que $zz^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

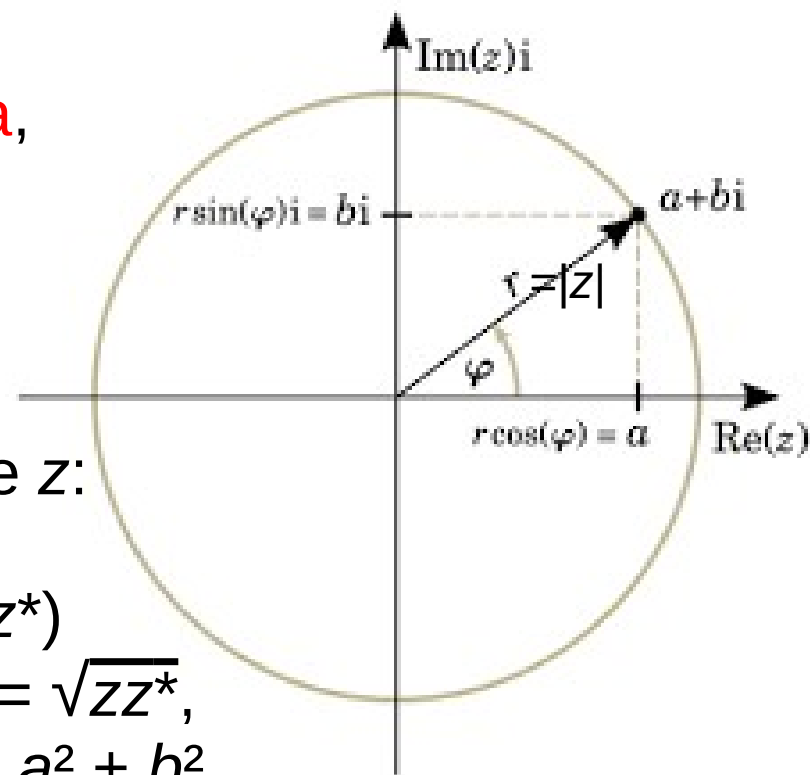
soma: $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

produto: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

módulo do produto: $|z_1 z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2}$

$$= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - \cancel{2a_1 a_2 b_1 b_2} + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + \cancel{2a_1 b_2 b_1 a_2} + b_1^2 a_2^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = |z_1| |z_2|$$



Números Complexos

Fórmula de Euler

Fazendo expansões de Taylor em x de e^{ix} e e^{-ix} , e tomando as partes real e imaginária, se vê que:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \cdot \sin x$$

\Rightarrow

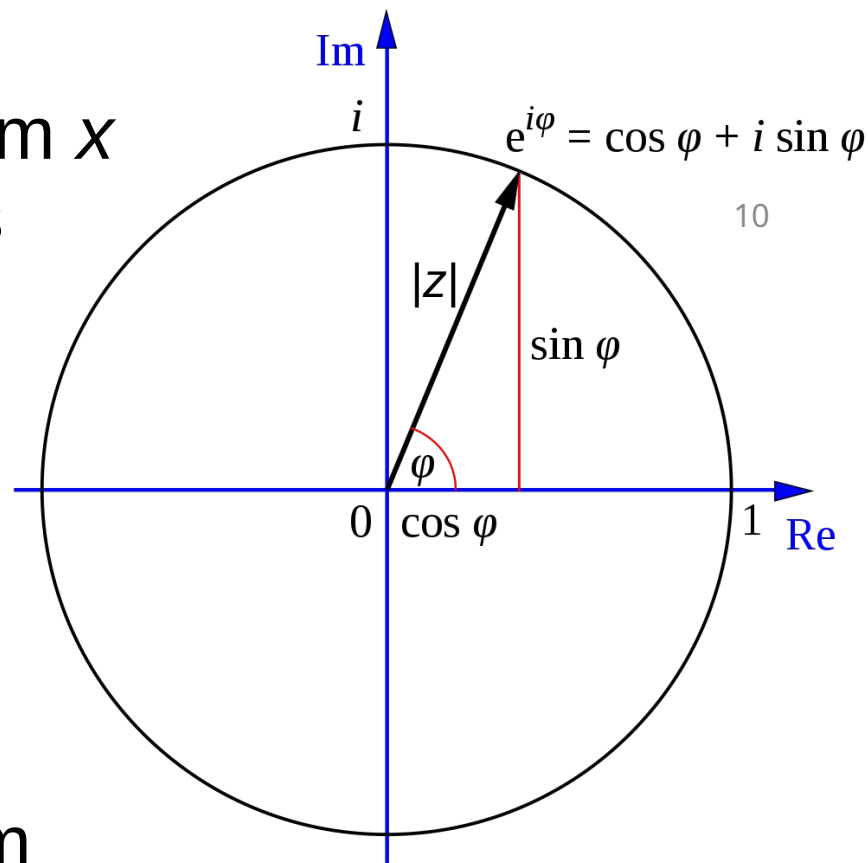
$$\cos x = \operatorname{Re}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad e$$

$$\sin x = \operatorname{Im}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Assim conseguimos escrever um

número complexo z na sua **forma polar**:

$z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, onde $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{Im}\{z\}/\operatorname{Re}\{z\}$
(! cuidado com a periodicidade do tg , para $\operatorname{Im}\{z\}$ negativo temos $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{Im}\{z\}/\operatorname{Re}\{z\} + \pi$)



Números Complexos

Números Complexos em Equações Diferenciais

Se z_1 e z_2 forem **complexos** ($\in \mathbb{C}$) e λ_1 e λ_2 , **reais** ($\in \mathbb{R}$), então $\text{Re}\{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\} = \lambda_1 \text{Re}\{z_1\} + \lambda_2 \text{Re}\{z_2\}$

(a operação "Re{" é linear em \mathbb{R})

e, se z for uma **função** (i.e. de t , $z = z(t)$), então

$$\text{Re}\{dz/dt\} = d\text{Re}\{z\}/dt$$

=> Em uma **equação diferencial linear** com **coeficientes reais**, se $z(t)$ for uma **solução**, então

$x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$ **também** é solução (e $\bar{z}(t)$, e $\text{Im}\{z(t)\}$ tb.)

(pode ser provado aplicando $\text{Re}\{dz/dt\} = d\text{Re}\{z\}/dt$ e a linearidade de Re{" em \mathbb{R} na própria equação diferencial)

Às vezes é mais fácil **estender** o problema pro **plano complexo**, achar um **solução complexa** e depois pegar a **parte real**, do que tentar achar uma solução real diretamente.

Números Complexos

Oscilador Harmônico e o Formalismo Complexo

Um exemplo disso é o **Oscilador Harmônico**.

Partindo da **equação** do **Oscilador Harmônico** (mas chamando a grandeza procurada de z em lugar de x),

$$d^2z/dt^2 = -\text{const.} \cdot z,$$

podemos "chutar" $z(t) = C \cdot e^{\alpha t}$

Já que $d^2z/dt^2 = d^2(C \cdot e^{\alpha t})/dt^2 = \alpha^2 C \cdot e^{\alpha t} = \alpha^2 z(t)$ podemos concluir que o chute deu **certo** com $\alpha = i\sqrt{\text{const.}} = i\omega$ e C qualquer valor complexo.

Definindo $A := |C|$ podemos escrever C como $Ae^{i\varphi}$;

$$\Rightarrow z(t) = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

e $x(t) = \text{Re}\{z(t)\} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (e $\text{Im}\{z(t)\} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$)

As **mesmas soluções** que antes.

Números Complexos

Interlúdio: Força Resistiva (Fricção, Atrito)

Um **corpo** de massa m , que está se **deslocando** por um **fluido**, sofre uma **força oposta** a sua **velocidade** e **proporcional** a esta:

$F = -bv$, o que leva à **equação diferencial** $dv/dt = -b/m \cdot v$.
Com o mesmo chute (função exponencial) chegamos à **solução** $v = v_0 e^{-bt/m}$
(**velocidade tendendo exponencialmente a zero** => FeMec).

Se quisermos determinar a **posição** em **função** do **tempo**, $x(t)$ (por exemplo se conhecemos a posição inicial), podemos escrever a equação diferencial como

$$d^2x/dt^2 + b/m \cdot dx/dt = 0$$

$$\text{solução: } x = x_\infty - v_0 m/b \cdot e^{-bt/m} = x_0 + v_0 m/b \cdot (1 - e^{-bt/m})$$

Números Complexos

Oscilador Harmônico Amortecido

Olhando agora para um **oscilador harmônico** submetido a uma **força resistiva**:

A **força total** agindo sobre a **massa** é $F = -bv - kx$

$$\Rightarrow d^2x/dt^2 + b/m \cdot dx/dt + k/m \cdot x = 0$$

Chutando de novo $x(t) = C \cdot e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow dx/dt = C\alpha \cdot e^{\alpha t} = \alpha x(t), \quad d^2x/dt^2 = C\alpha^2 \cdot e^{\alpha t} = \alpha^2 x(t)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 x(t) + b/m \cdot \alpha x(t) + k/m \cdot x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + b/m \cdot \alpha + k/m = 0$$

Pela fórmula de Bhaskara, $\alpha = -b/2m \pm \sqrt{(b/2m)^2 - k/m}$

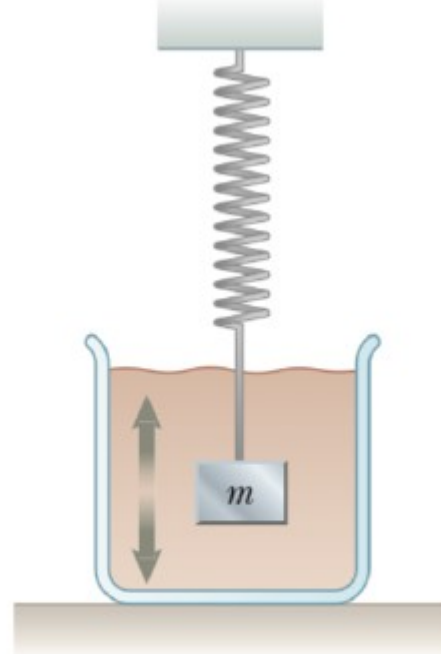


Figura 1.20 Exemplo de um oscilador amortecido é um corpo preso a uma mola e submerso em um líquido viscoso.

Pêndulo Amortecido

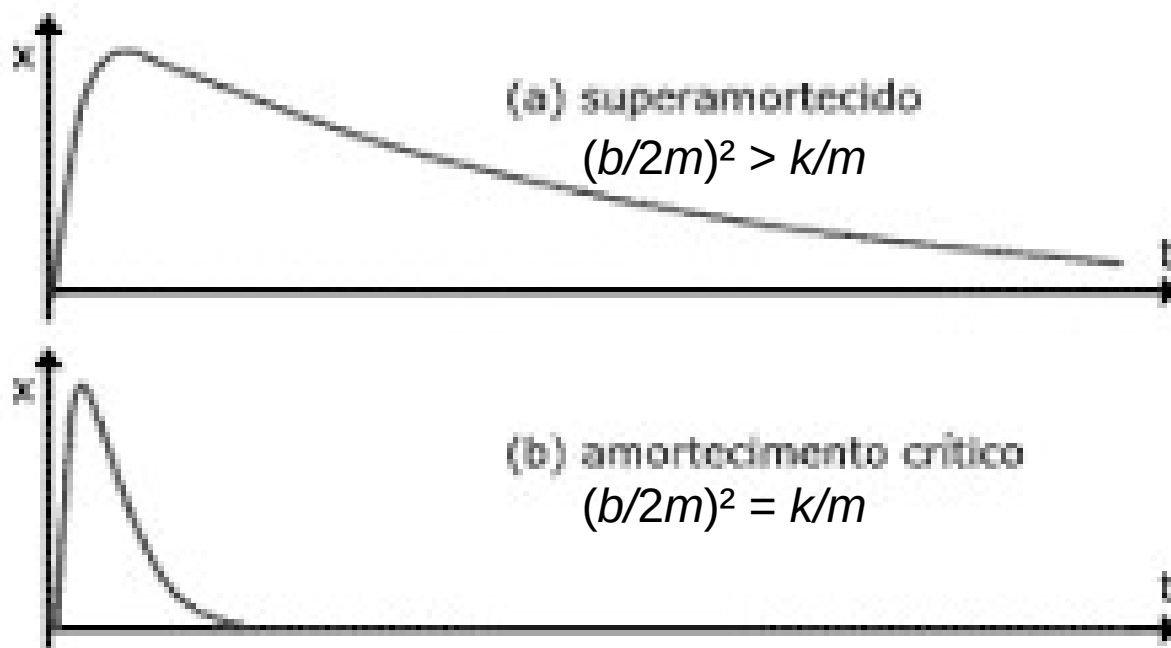
Oscilador Harmônico Amortecido

$$x(t) = C \cdot e^{\alpha t}, \text{ onde } \alpha = -b/2m \pm \sqrt{(b/2m)^2 - k/m}$$

Caso $(b/2m)^2 \geq k/m$, α é **real** e **negativo**

=> **exponencial decaindo**, a **força resistiva** é tão **forte**, que o oscilador **não** consegue **completar** nem uma **oscilação**.

Não vamos entrar em mais detalhes sobre este caso.



Pêndulo Amortecido

Oscilador Harmônico Amortecido

$$x(t) = C \cdot e^{\alpha t}, \text{ onde } \alpha = -b/2m \pm \sqrt{(b/2m)^2 - k/m}$$

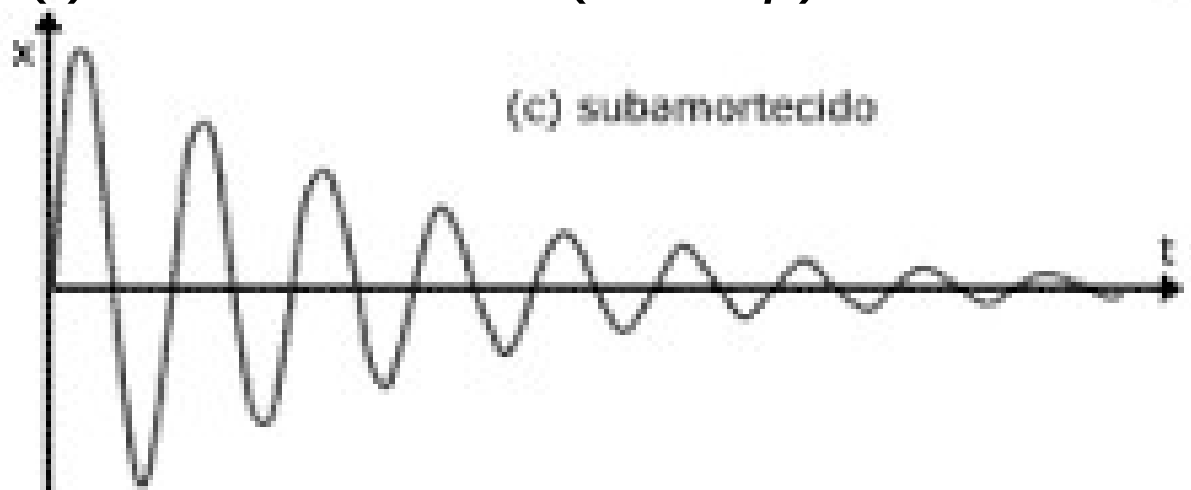
$$\text{Caso } (b/2m)^2 < k/m, \alpha = -b/2m \pm \sqrt{k/m - (b/2m)^2} \cdot i$$

$$\Rightarrow x(t) = C \cdot e^{-b/2m \pm \sqrt{k/m - (b/2m)^2} \cdot i} = C \cdot e^{-b/2m} \cdot e^{\pm \sqrt{k/m - (b/2m)^2} \cdot i}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{x(t)\} = C \cdot e^{-b/2m} \cdot \cos \omega t, \text{ onde } \omega = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$$

Já que $\text{Im}\{x(t)\} = C \cdot e^{-b/2m} \cdot \text{sen } \omega t$ também é solução, a **solução geral** será $x(t) = C \cdot e^{-b/2m} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Oscilação com **período** mais longo que **sem resistência** e com **amplitude** (e energia) **caindo exponencialmente**.



Pêndulo Amortecido

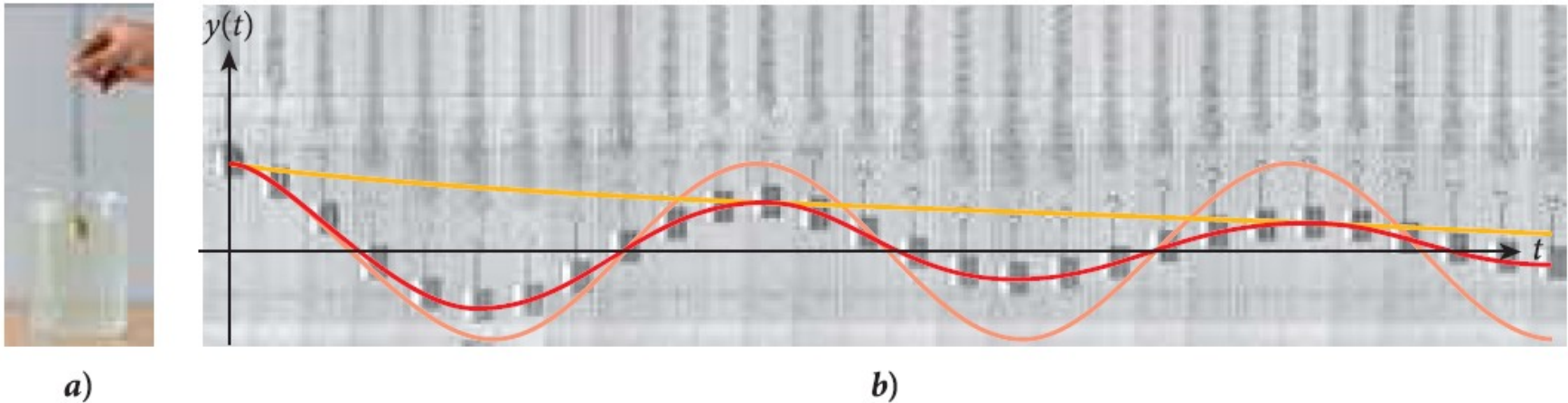


FIGURA 14.18 Ejemplo del movimiento armónico amortiguado: masa unida a un resorte oscilando en agua. a) Condiciones iniciales. b) Cuadros de video que muestran el movimiento de la masa después de ser liberada.

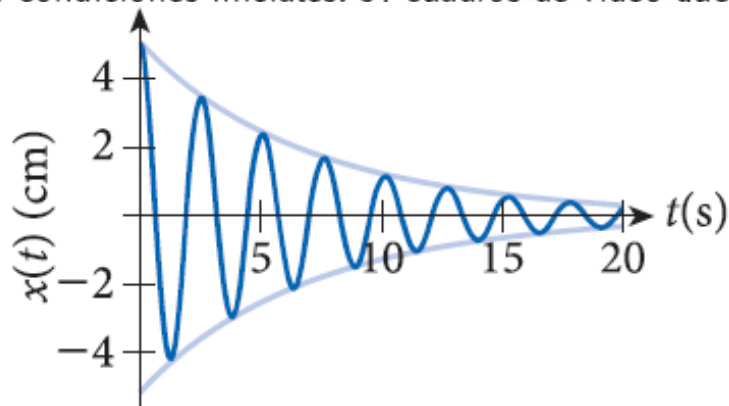
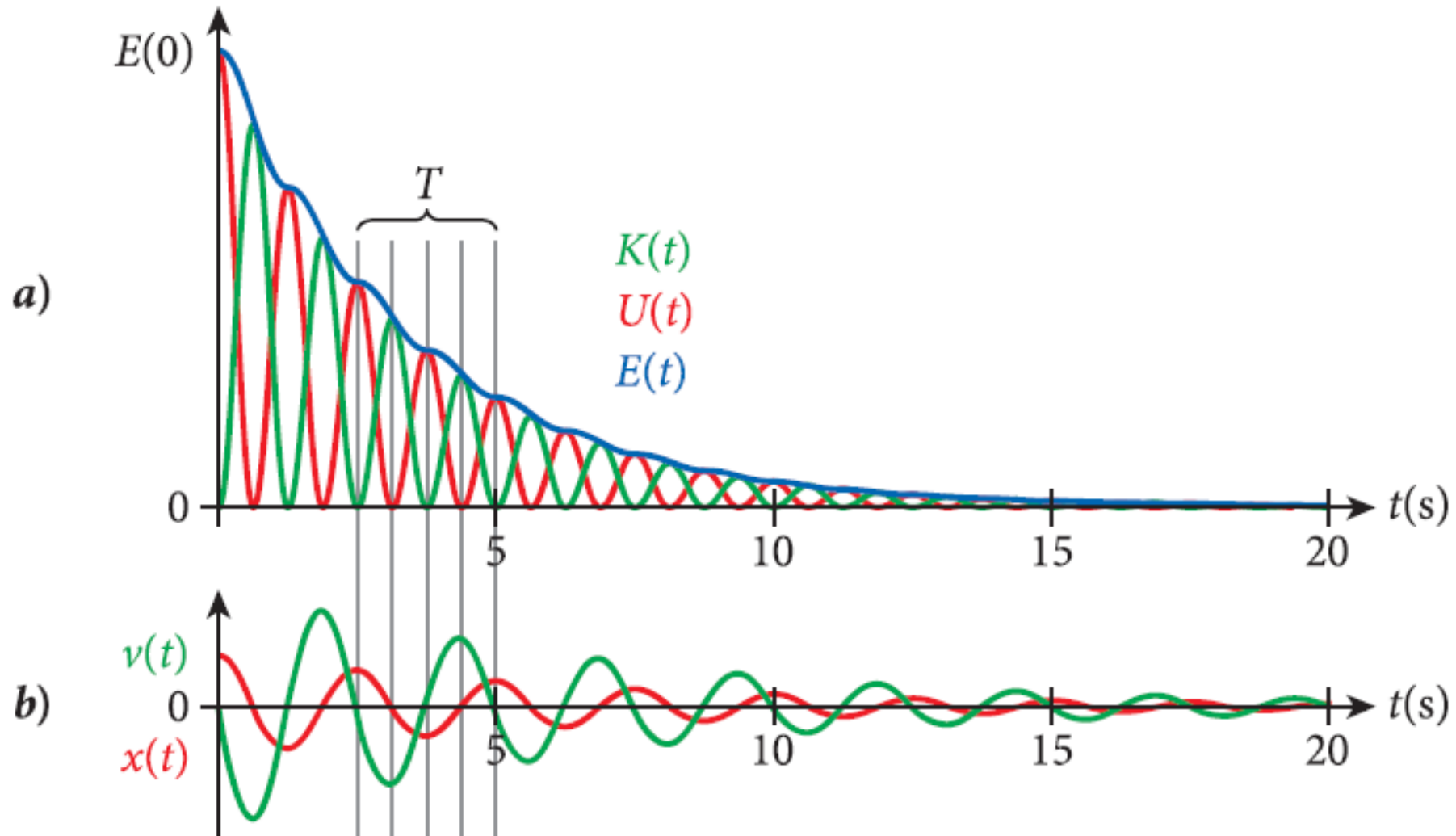


FIGURA 14.19 Posición contra tiempo para una oscilación armónica débilmente amortiguada.

Pêndulo Amortecido

Energias Potencial, Cinética e Total, posição e velocidade



Oscilações Forçadas

Oscilador Submetido a uma Oscilação Externa

Chamando a **frequência "natural"** (não amortecido), $\sqrt{k/m}$, do oscilador de ω_0 , vamos **"empurrá"**-lo por uma **força externa** da forma $F = F_0 \text{sen } \omega t$.

(! ω não é necessariamente igual a ω_0)

Assim a equação diferencial a resolver vira

$$d^2x/dt^2 + b/m \cdot dx/dt + k/m \cdot x - F_0/m \cdot \text{sen } \omega t = 0$$

A solução **tende** rapidamente a $A \cdot \text{cos} (\omega t + \varphi)$, isto é, o **sistema** logo **oscilará** com a **frequência** da **força externa**,

onde $A = F_0/m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}$

Oscilações Forçadas

Wikipedia

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \text{ com}$$
$$A = F_0/m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}$$

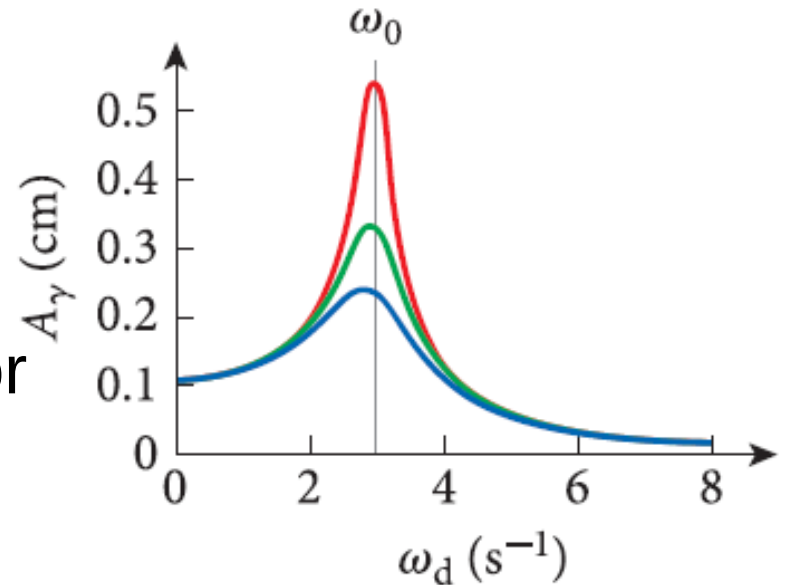
A **amplitude** fica **grande** para $\omega = \omega_0$, ou seja, quando se cutuca o oscilador com a sua **frequência "natural"**, fenômeno chamado **ressonância**.

Por isto, ω_0 também é chamada de **frequência de ressonância**.

Quanto **menor** a **força resistiva**, tanto **maior** a **amplitude** da **oscilação forçada**, tendendo a ∞ para $b \rightarrow 0$.

=> **catástrofe de ressonância**.

Obviamente, alguma coisa acontecerá antes, nem que seja a quebra do oscilador.



Amplitude da oscilação forçada para três valores de amortecimento: **alta**, **intermediária** e **baixa**

A Equação da Onda

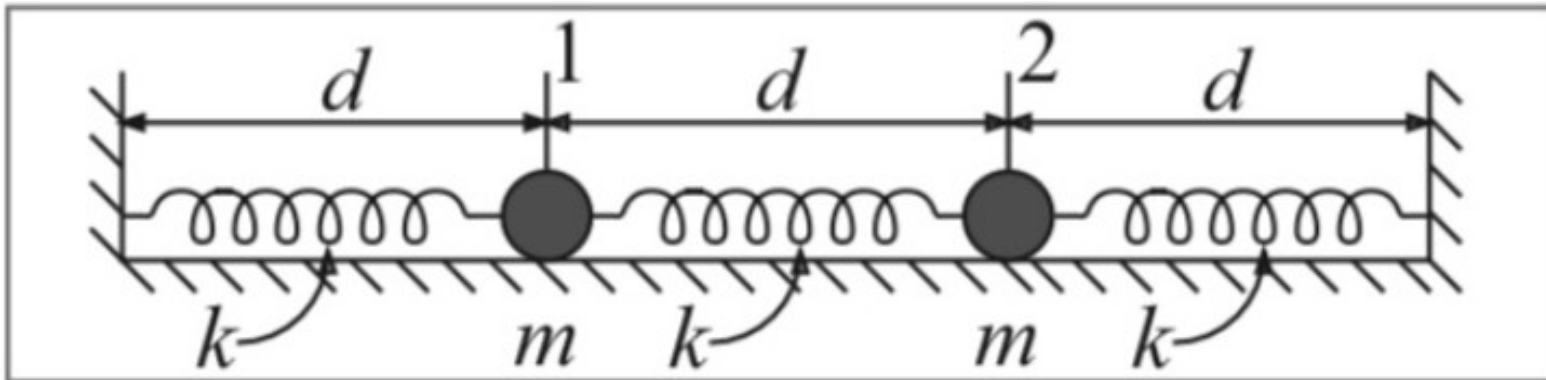
Osciladores e Ondas

Entre outros, o **oscilador harmônico** é importante, por que ele oferece um **caminho intuitivo** para chegar a uma outra das **equações fundamentais** da física: a **equação da onda**.

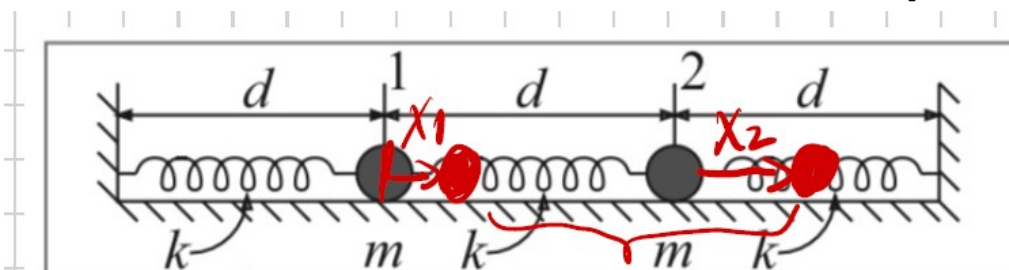
Em particular, vamos mostrar como um **conjunto** de **osciladores harmônicos acoplados** pode ser resolvido de forma sistemática e, no limite do **contínuo**, essa descrição é dada pela **equação da onda**.

A Equação da Onda

Dois Osciladores acoplados



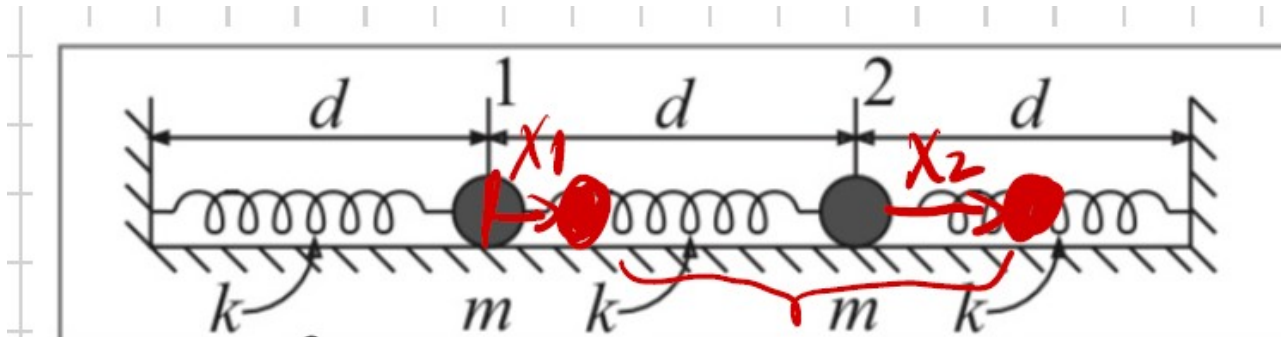
Considere **duas massas m acopladas** por **molhas** de constante de mola k e comprimento de equilíbrio d .



Chamando os **deslocamentos** destas massas em **relação** a suas **posições de equilíbrio** de x_1 e x_2 .

A Equação da Onda

Dois Osciladores acoplados



Força agindo na 1ª massa: $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$
 $= -2kx_1 + kx_2$ (1)

" na 2ª massa: $m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2$ (2)

Definindo $x_+(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $x_-(t) = x_1(t) - x_2(t)$

\Rightarrow (1) + (2): $m\ddot{x}_+(t) = -2kx_1 + kx_1 + kx_2 - 2kx_2 = -kx_+$

(1) - (2): $m\ddot{x}_-(t) = -2kx_1 - kx_1 + kx_2 + 2kx_2 = -3kx_-$

Dois **equações de osciladores harmônicos independentes!**

A Equação da Onda

Dois Osciladores acoplados

$$m\ddot{x}_+(t) = -kx_+,$$

=> oscilador harmônico com

$$\omega_+ = \sqrt{k/m},$$

$$m\ddot{x}_-(t) = -3kx_-,$$

oscilador harmônico com

$$\omega_- = \sqrt{3k/m}$$

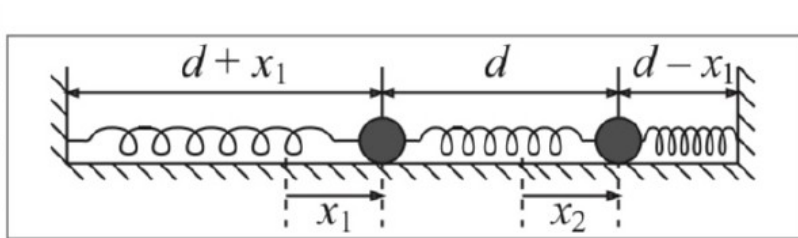


Figura 4.17 Modo simétrico.

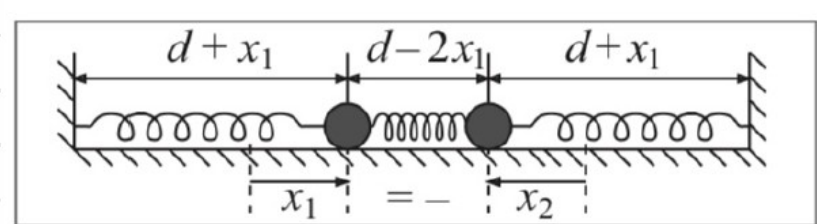
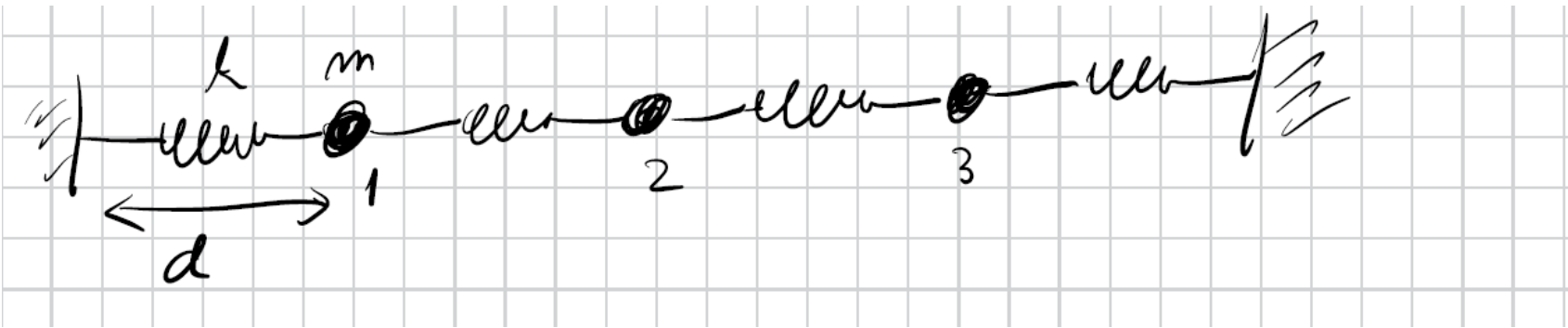


Figura 4.18 Modo antissimétrico.

Chamamos estes dois modos de oscilação de **modos normais**.

A Equação da Onda

Três Osciladores acoplados



Fazendo a mesma coisa para **três** osciladores acoplados:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$$

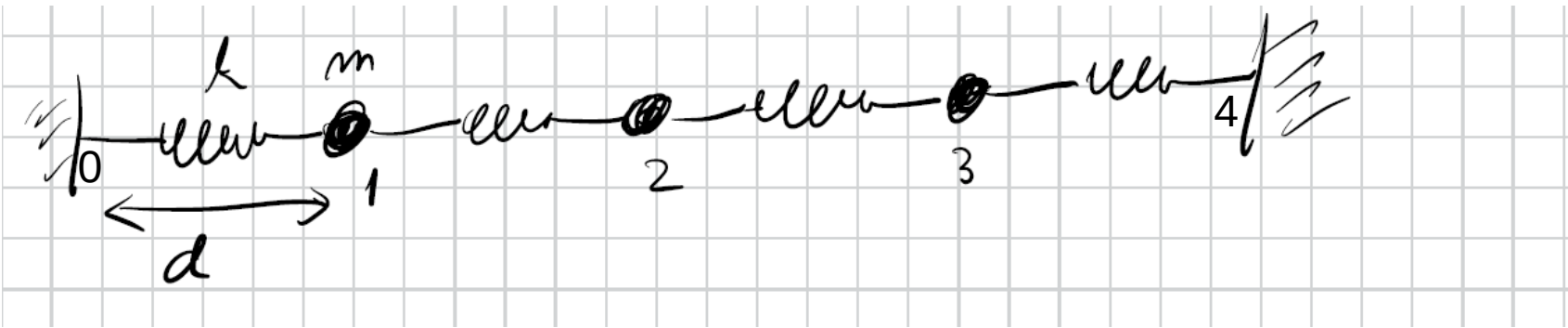
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - kx_3 = kx_2 - 2kx_3$$

Também é possível **desacoplar** estas três equações definindo **três modos normais**, mas isto não interessa neste momento.

A Equação da Onda

Três Osciladores acoplados



Para chegar na **mesma forma** pras três equações chamamos as posições das **paredes** de x_0 e x_4 . Já que as paredes **nunca** são **deslocados** das suas posições "de equilíbrio" temos $x_0 = x_4 = 0$:

$$m\ddot{x}_1 = kx_0 - 2kx_1 + kx_2$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

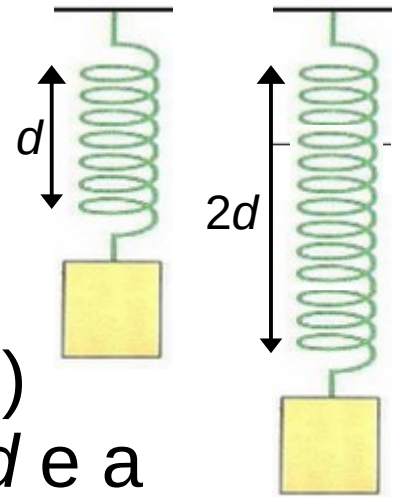
$$m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3 + kx_4$$

$$\text{ou simplesmente } m\ddot{x}_i = kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3$$

A Equação da Onda

Antes de Continuar: Algo sobre Molas

Se duas molas têm as **mesmas propriedades** (material, diâmetro do fio, diâmetro das voltas, número de voltas por unidade de comprimento no estado relaxado) menos o **comprimento**, uma delas medindo d e a outra medindo $2d$, a segunda se comportará como duas molas de d "em série". Aplicando uma força F , o deslocamento será $-2F/k$, i.e. duas vezes o deslocamento da mola de d .

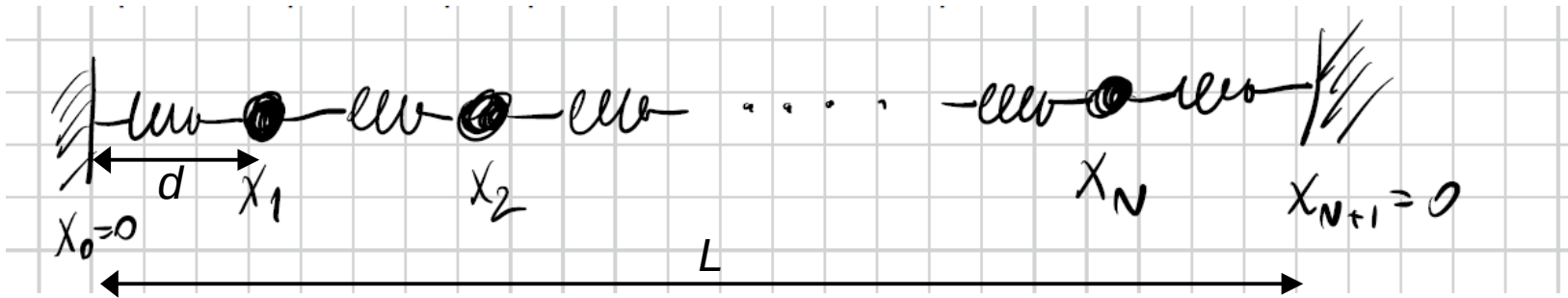


Já que $k = -F/x$, a constante de mola será metade da de comprimento d . => A **constante de mola** é **inversamente proporcional** ao **comprimento**:

$$k = -F/x \propto d^{-1} = K/d$$

A Equação da Onda

N Osciladores e o Limite Contínuo



Generalizando o resultado de 3 para N osciladores:

$$\ddot{x}_i = k/m \cdot (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ com } x_0 = x_{N+1} = 0$$

Sendo o **comprimento** do **sistema** L :

=> **Distância** de **equilíbrio** de cada **par**:

$$d = L/(N+1) \sim L/N \text{ (para grandes } N)$$

Chamando a **densidade linear** (massa por unidade de comprimento) de $\mu = Nm/L = m/d$

$$\Rightarrow \ddot{x}_i = (K/d)/\mu d \cdot (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = K/\mu \cdot 1/d^2 \cdot (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

A Equação da Onda

N Osciladores e o Limite Contínuo

$$\ddot{x}_i = K/\mu \cdot 1/d^2 \cdot (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

Em lugar de especificar a i -ésima massinha pelo índice i , usaremos sua **posição de equilíbrio** $x = id$ como **variável**, chamamos o **desvio do equilíbrio** $x_i(t)$ de $A(x, t)$, então então \ddot{x}_i vira $\partial^2 A / \partial t^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial^2 A / \partial t^2 &= K/\mu \cdot 1/d^2 \cdot [A((i-1)d, t) - 2A(id, t) + A((i+1)d, t)] \\ &= K/\mu \cdot 1/d^2 \cdot [A((i-1)d, t) - A(id, t) - A(id, t) + A((i+1)d, t)] \\ &= K/\mu \cdot 1/d \cdot ([A((i+1)d, t) - A(id, t)]/d - [A(id, t) - A((i-1)d, t)]/d) \end{aligned}$$

Fazendo $N \rightarrow \infty \Rightarrow d \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \partial^2 A / \partial t^2 &= K/\mu \cdot 1/d \cdot (\partial A(id, t) / \partial x - \partial A((i-1)d, t) / \partial x) \\ &= K/\mu \cdot \partial^2 A / \partial x^2 \end{aligned}$$

A Equação da Onda

N Osciladores e o Limite Contínuo

$$\partial^2 A / \partial t^2 = K / \mu \cdot \partial^2 A / \partial x^2 \Rightarrow \partial^2 A / \partial x^2 - \mu / K \cdot \partial^2 A / \partial t^2 = 0$$

Chamamos uma **equação** da **forma**

$$\partial^2 y(x, t) / \partial x^2 - \text{const.} \cdot \partial^2 y(x, t) / \partial t^2 = 0$$

de **Equação da Onda**.

frequentemente escrevemos a constante como $1/v^2$ (obviamente, $v = 1/\sqrt{\text{const.}}$, no caso das molas acopladas, $v = \sqrt{K/\mu}$):

$$\partial^2 y(x, t) / \partial x^2 - 1/v^2 \cdot \partial^2 y(x, t) / \partial t^2 = 0$$

Como o nome sugere, as **soluções** são **ondas**, veremos isto na próxima aula.



Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

