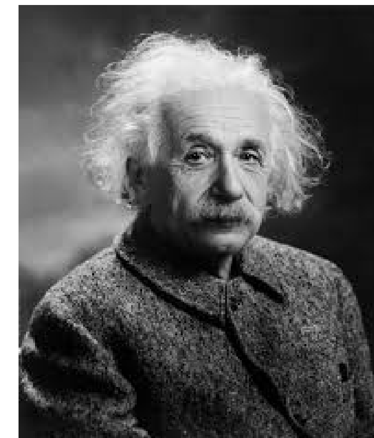
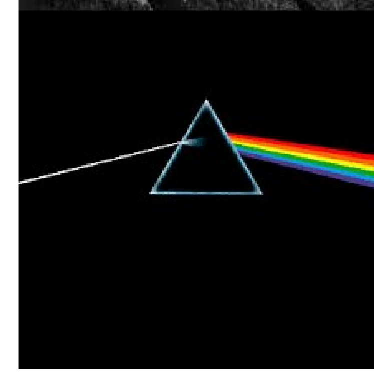
Ótica e Relatividade

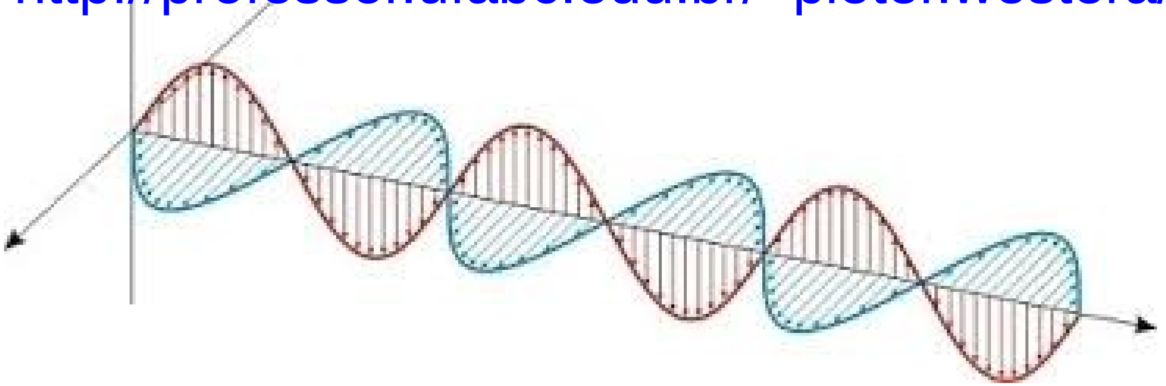
07. Equação da Onda, Soluções,
Princípio da Superposição,
Ondas Harmônicas, Características:
Comprimento de Onda, Frequência,
Intensidade

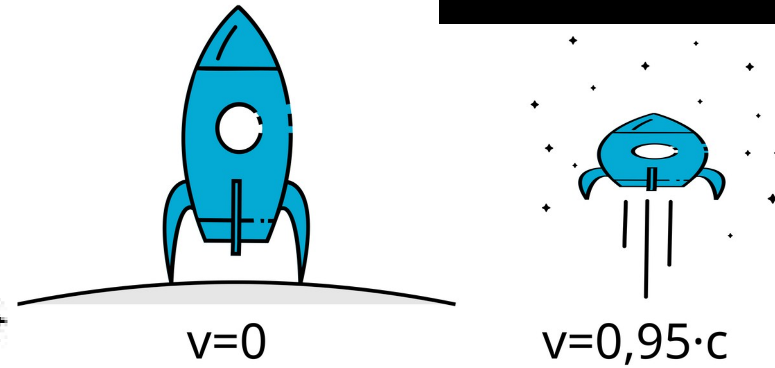




Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html

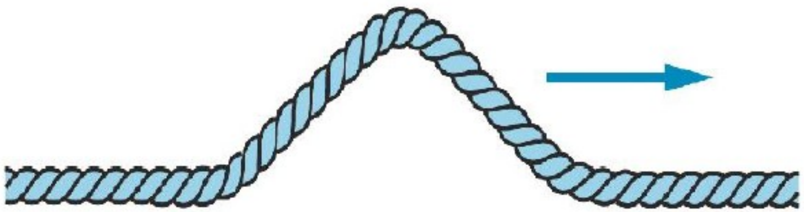




Ondas

O que é uma onda?

Uma variação, periódica ou não,
em alguma grandeza física *y*,
que se propaga pelo espaço.



Exemplos: Ondas sonoras: variações na pressão do ar,
Ondas eletromagnéticas: campos elétrico e magnético,
etc.

Ela satisfaz a Equação de Onda,
uma equação diferencial parcial que
é derivada dos processos que causam a propagação
(para ondas sonoras, as interações entre as partículas
do ar, para ondas eletromagnéticas, uma combinação
das Leis de Maxwell, ..)

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ondas

O que é uma onda?

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Soluções são:

$y_+(x,t) = f(x - vt)$: onda de forma $f(x)$ propagando-se com velocidade v na direção $+x$, e

$y_-(x,t) = g(x + vt)$: " $g(x)$ " na direção $-x$.

No caso tri-dimensional, a segunda derivada é o operador laplaciano,

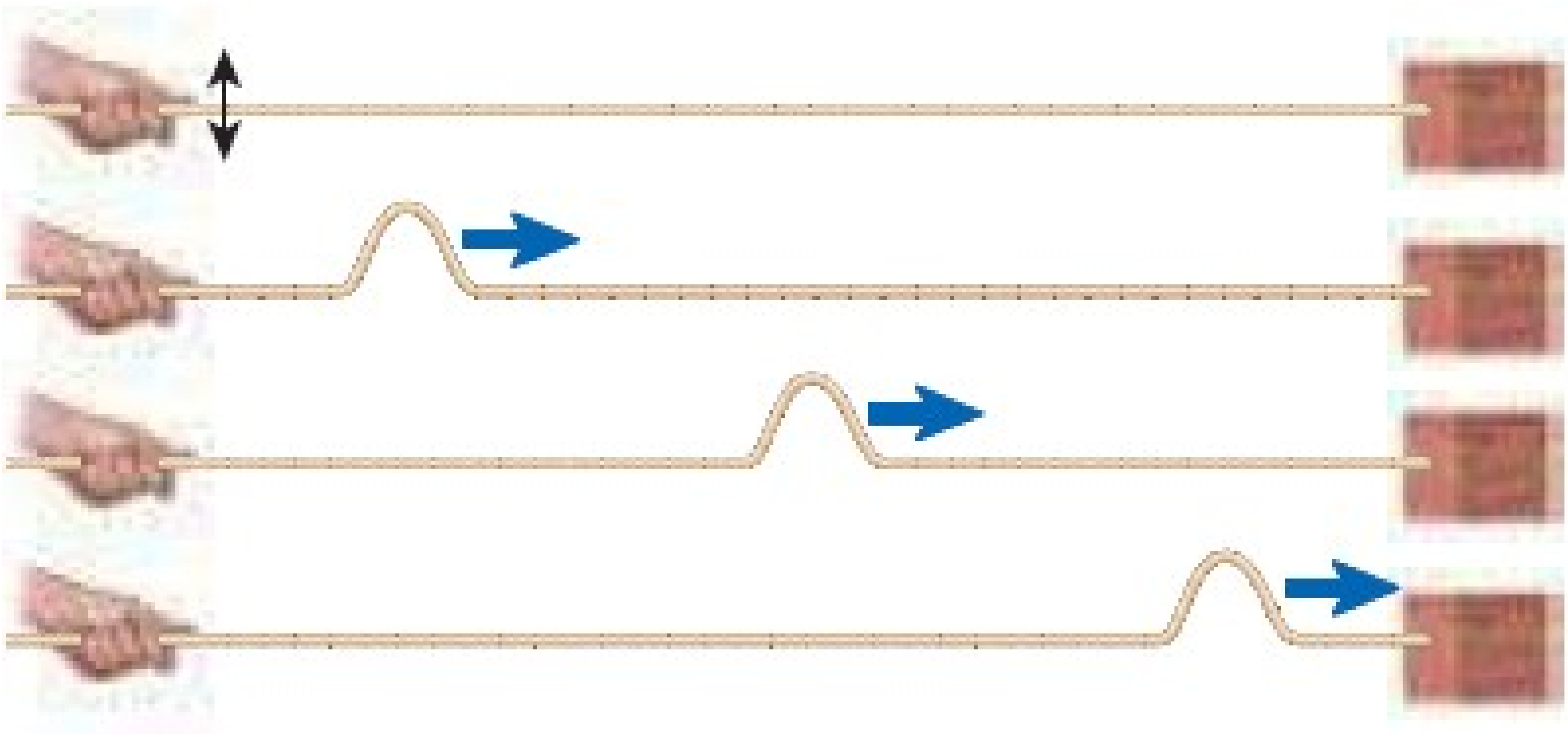
$\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ (=> FVV)

Neste caso, as soluções são ondas propagando-se com velocidade v em qualquer direção.

A Equação da Onda

O que é uma onda?

Uma onda pode ter forma de pulso (um pico único).

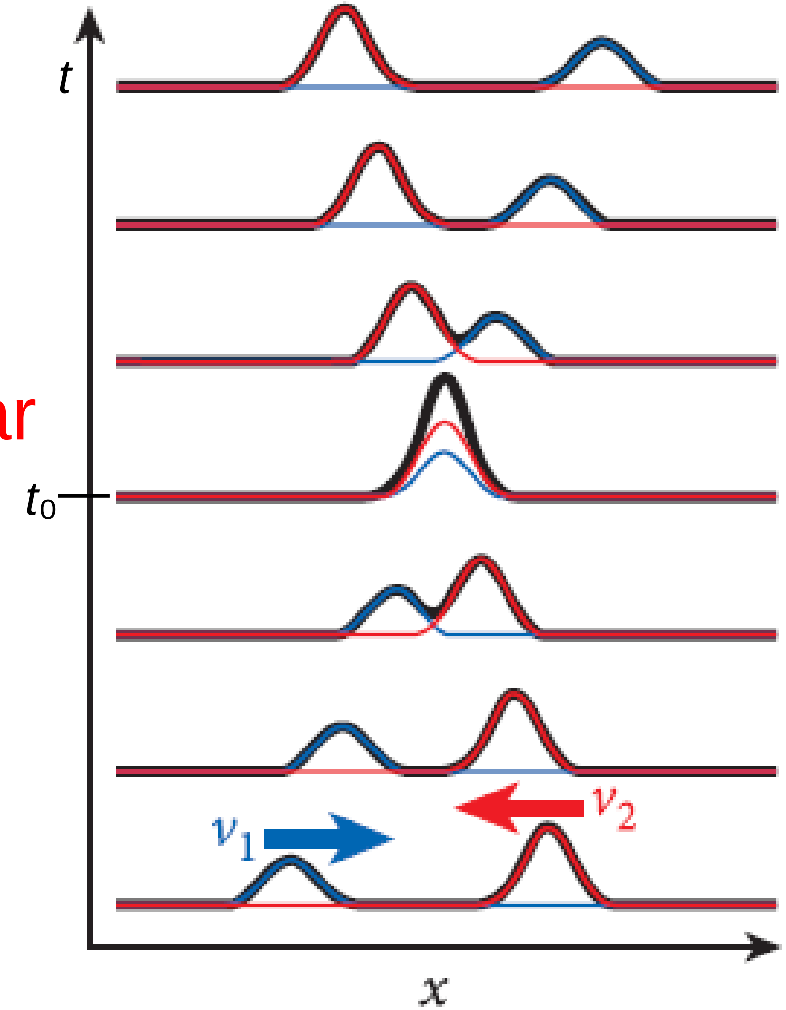


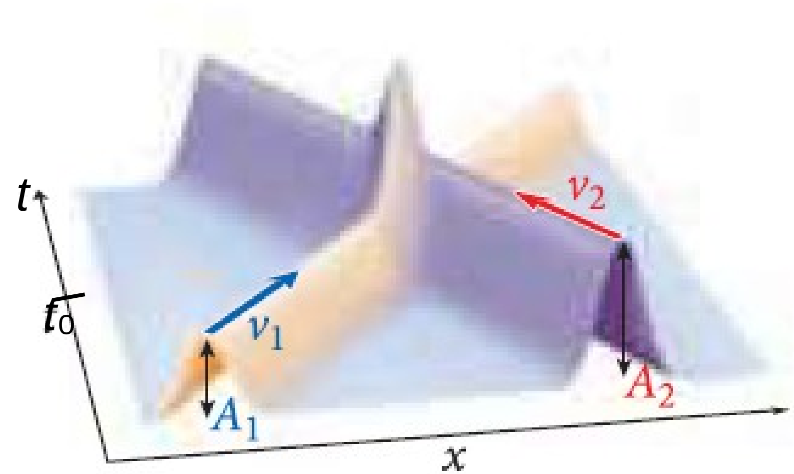
Ondas

Principio de superposição

Já que a equação da onda é linear na função procurada y, qualquer combinação linear de duas soluções $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, $c_1 y_1(x, t) + c_2 y_2(x, t)$ também é solução.

Neste exemplo, duas ondas em forma de pulso indo em direções opostas se sobrepõem e fazem interferência construtiva (se amplificam) no momento t_0.





Ondas

Principio de superposição

Aqui, dois pulsos, também indo em direções opostas, fazem interferência destrutiva (se cancelam) em t_0.

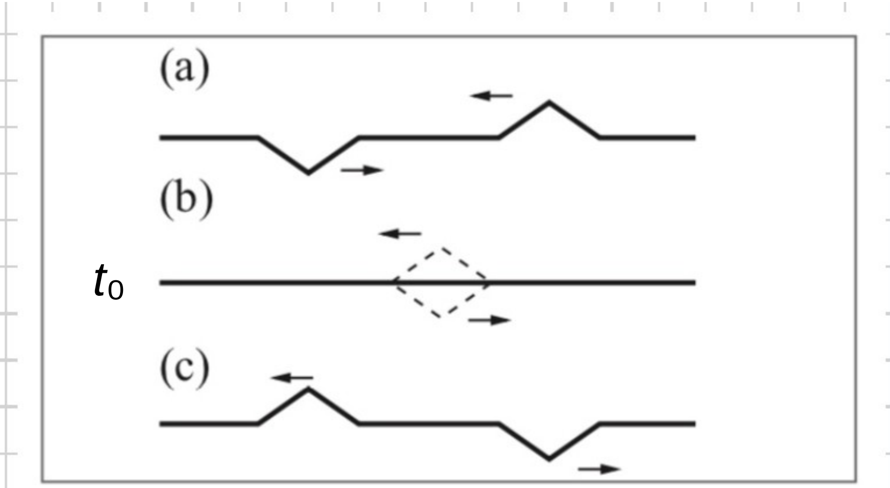


Figura 5.13 Interferência destrutiva.

https://www.youtube.com/watch?v=kS3VPlR6Ifg

Ondas

Solução Geral (D'Alambert)

(sem prova) A solução geral da equação da onda (em uma dimensão) é da forma

$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$,

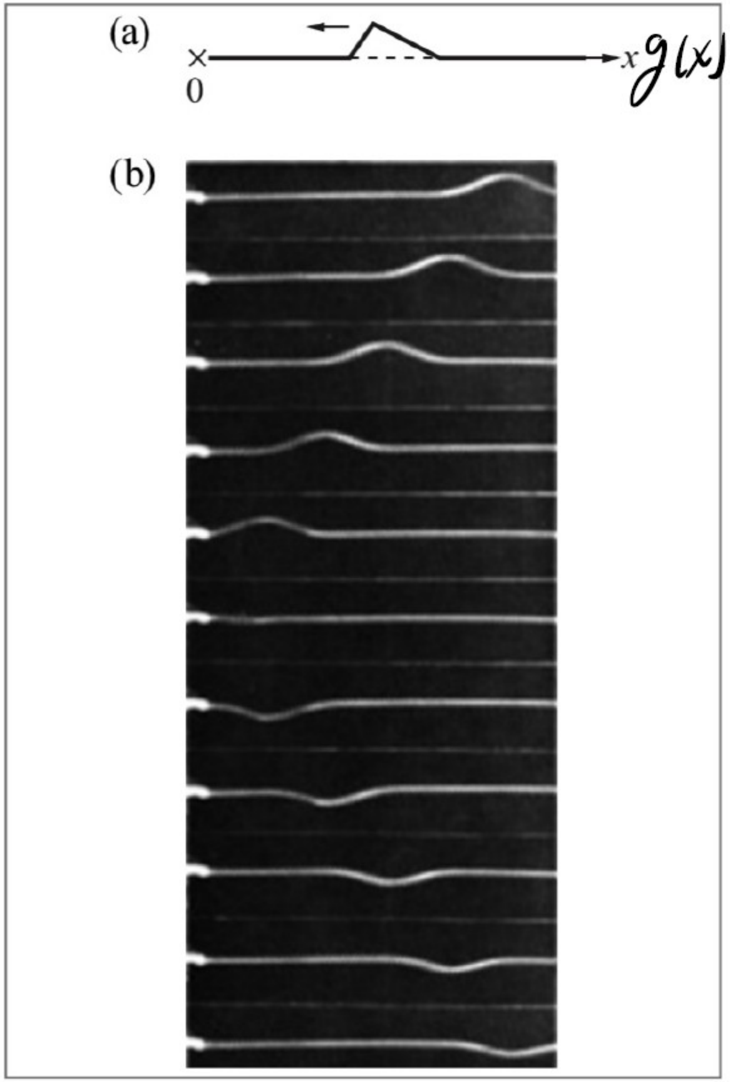
onde f e g são funções arbitrárias.

Na prática, é preciso de informações adicionais para determinar f e g, como condições iniciais ou condições de contorno.

Ondas

Reflexão de ondas

Considere uma onda que se move para a esquerda, $g(x')$ (aqui um pulso triangular, mas pode ser qualquer onda), como na figura.
=> inicialmente: $y(x, t) = g(x + vt)$



O que acontece quando ela encontra uma barreira?
Por exemplo: onda numa corda presa numa parede.
A extremidade na parede ($x = 0$) não consegue se deslocar.

=> $y(0, t) = 0 \ \forall \ t$

Ondas

Reflexão de ondas

Solução geral:

$$y(x,t) = \begin{cases} f(x - vt) + g(x + vt) & | \; x > 0 \\ 0 & | \; x \leq 0 \end{cases}$$

Na parede:

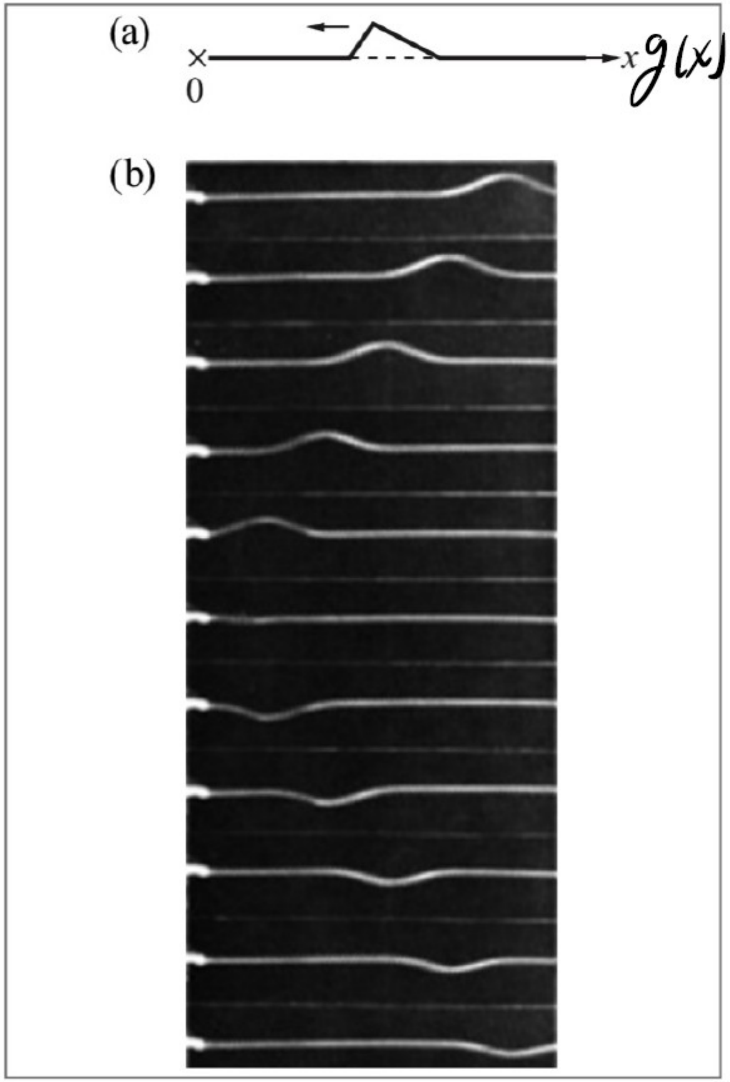
$y(0, t) = f(-vt) + g(vt) = 0$

=> $f(x') = -g(-x')$

com $x' = x - vt$: $f(x - vt) = -g(-x + vt)$

=> $y(x > 0, t) = \underbrace{g(x + vt)}_{\text{onda/pulso incidente}} \underbrace{-g(-x + vt)}_{\text{onda/pulso refletido}}$

A onda refletida é invertida!

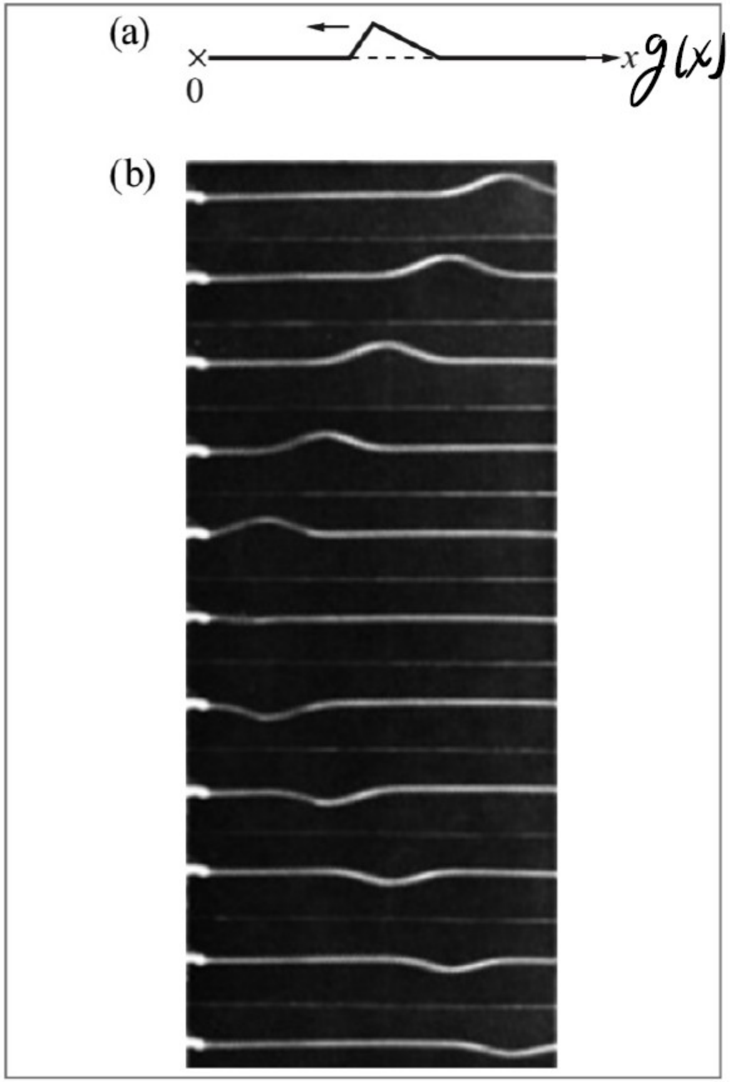


Ondas

Reflexão de ondas

Obviamente, as ondas incidente e refletida coexistem apenas durante a interação com a parede (e sempre só a parte em $x > 0$). Antes, apenas a incidente existe, e depois, apenas a refletida.

Na ótica geométrica, uma parede destas seria o espelho.

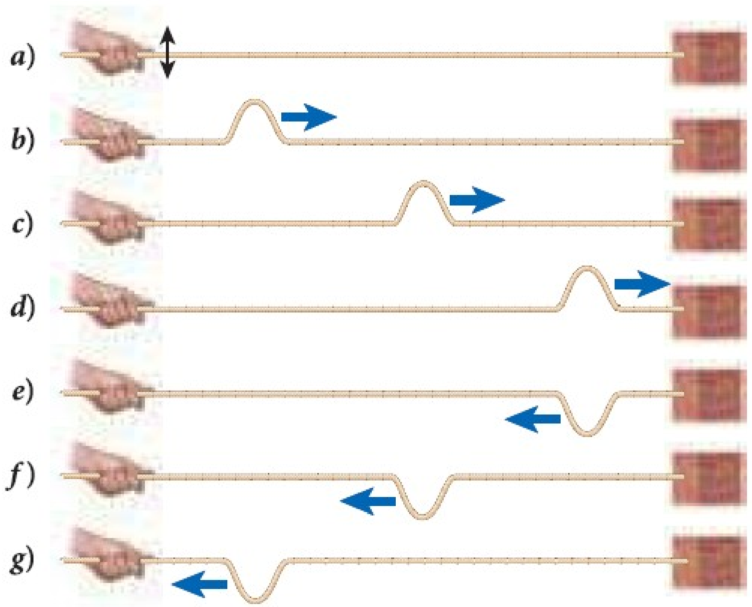


https://www.youtube.com/watch?v=23z0i2PpSzg

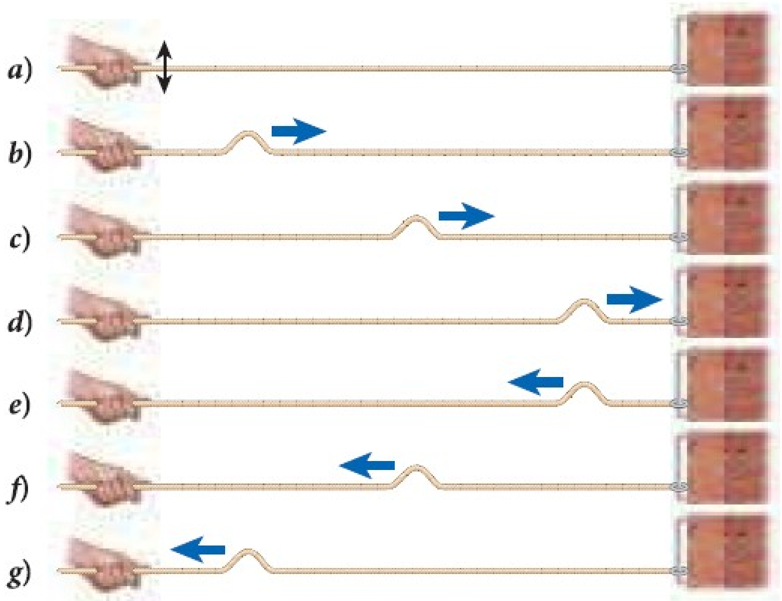
Ondas

Reflexão de ondas

Quando a extremidade refletante não força a onda a ser zero (quando ela é solta), a onda refletida não é invertida, $f(x - vt) = +g(-x + vt)$



Com a extremidade oposta fixa



Com a extremidade oposta solta

Ondas

Tarnsmissão e Reflexão

Quando uma onda encontra uma interface entre dois meios, em que a sua velocidade é diferente (na ótica geométrica: com índices refratórios diferentes), ela vai ser parcialmente refletida e parcialmente transmitida (ou, na linguagem da óptica geométrica, refratada).

Isso mostra que os fenômenos de reflexão e refração que discutimos na óptica geométrica refletem propriedades fundamentais da física ondulatória, e são fenômenos que vão acontecer em qualquer fenômeno ondulatório, nas condições adequadas.

https://www.youtube.com/watch?v=dNmlNzrMF2k

Ondas

Ondas Transversais e Longitudinais

a) Em ondas longitudinais, a perturbação que se desloca é na direção do movimento da onda.

b) Em ondas transversais, a perturbação é na direção perpendicular à propagação da onda.

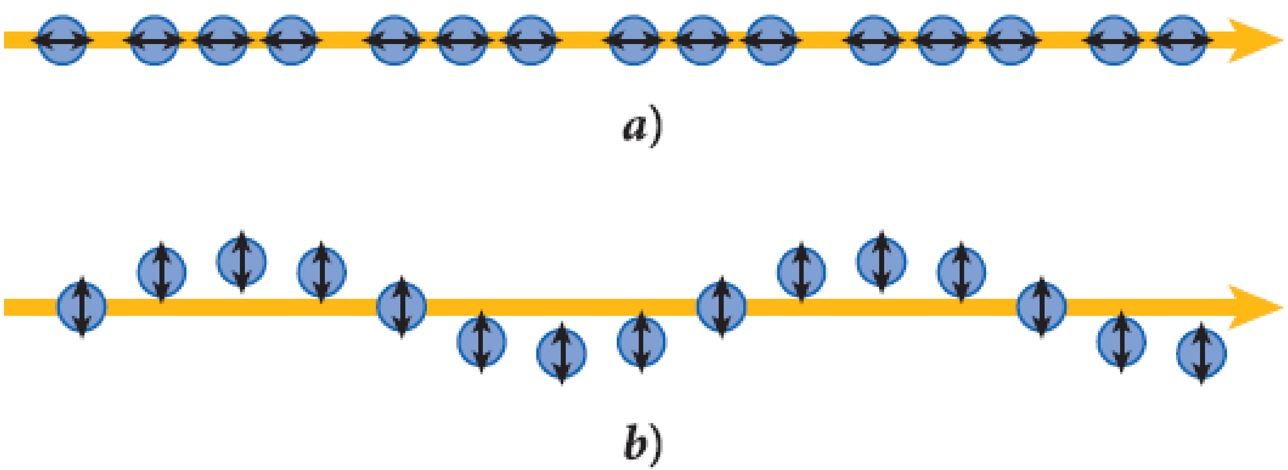


FIGURA 15.7 Representaciones de *a*) una onda longitudinal y *b*) una onda transversal que se propagan horizontalmente hacia la derecha.

Ondas

Ondas Transversais e Longitudinais

Exemplos:

- Ondas longitudinais: a onda na mola que vimos na aula passada (imagem à esquerda), ondas sonoras, ondas sismicas tipo P
- Ondas transversais: onda numa corda como na imagem à direita, ondas na superfície da água, ondas eletromagnéticas

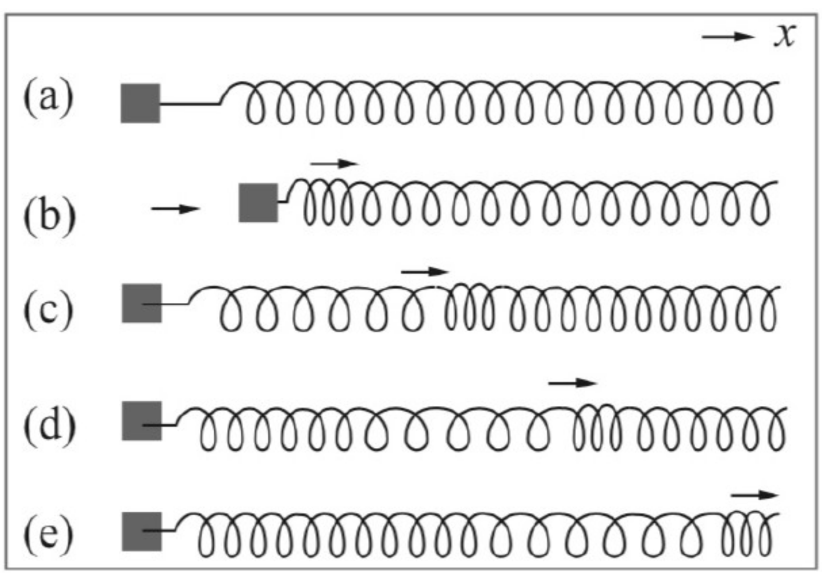


Figura 5.2 Onda longitudinal.

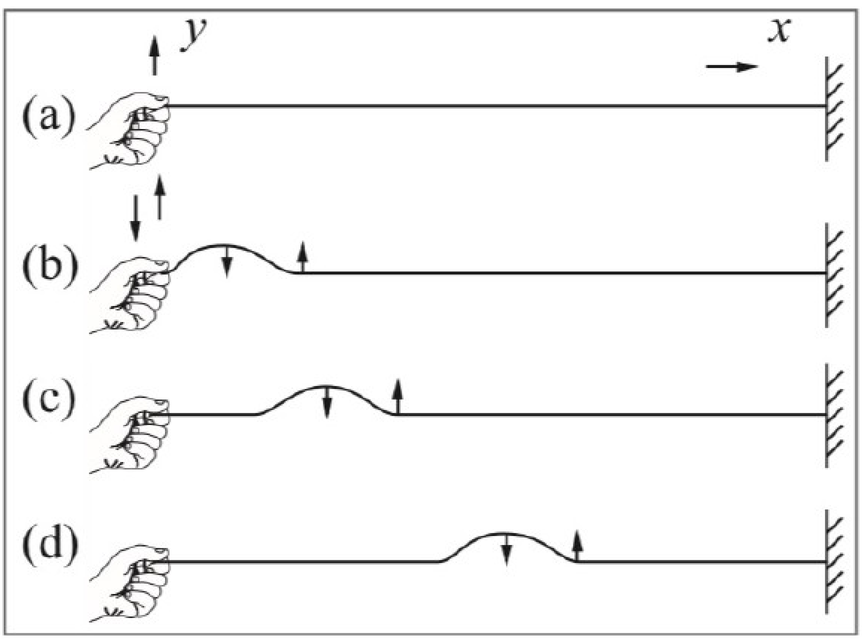


Figura 5.3 Onda transversal.

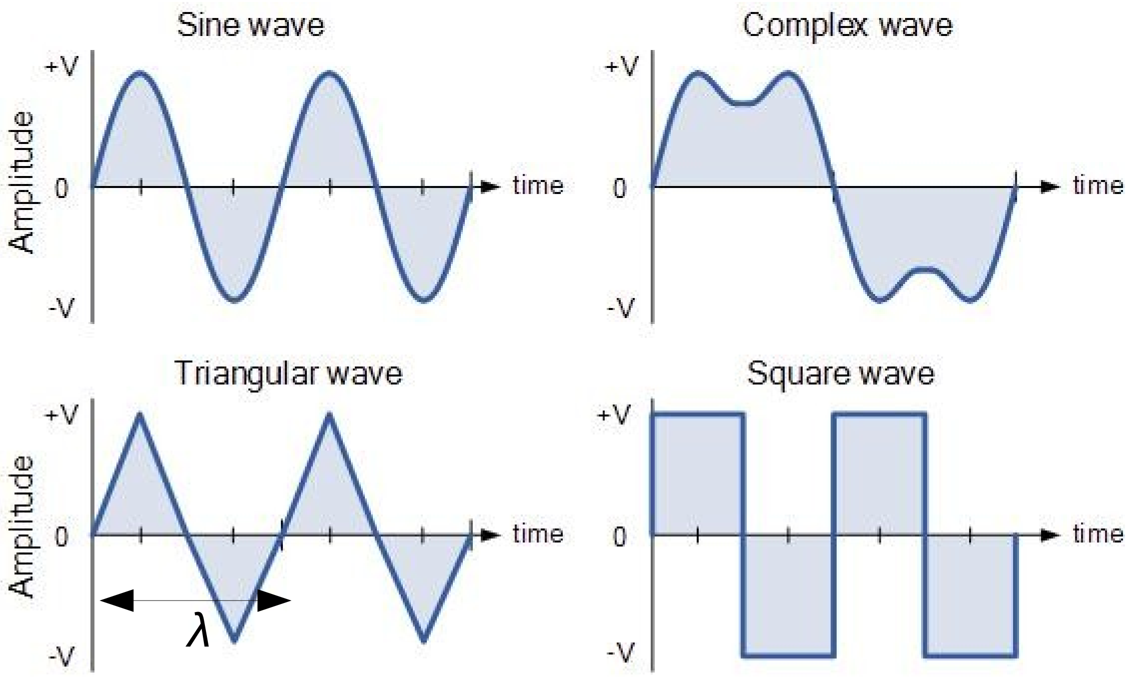
Ondas

Ondas Periódicas

Um caso interessante são ondas periódicas.

São ondas, para aquelas vale

$y(x, t) = y(x + n\lambda, t)$,
$n = 1, 2, 3, ...$



definimos como comprimento de onda λ, a menor distância que realiza isto.

(Qualquer múltiplo inteiro de λ também realiza isto.)

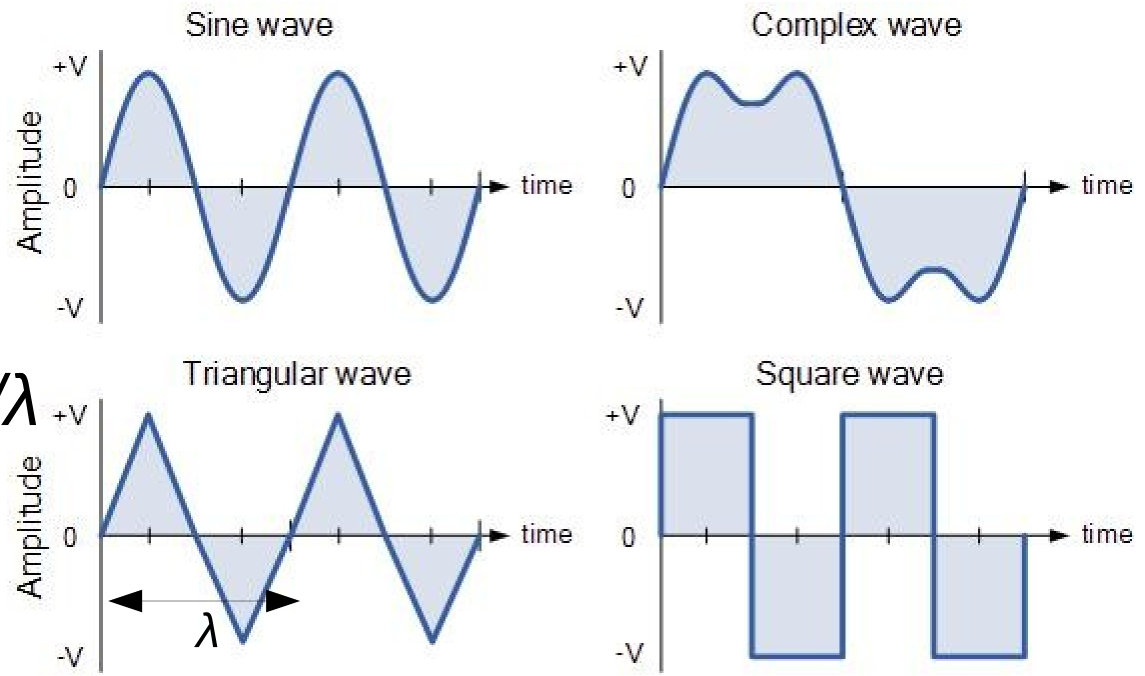
Ondas

Ondas Periódicas

Então: sendo o
comprimento de onda λ,

Definimos como
número de onda $k := 2\pi/\lambda$

Em uma dada posição
fixa, a grandeza y oscila
com período $T = \lambda/v$,
isto é, com frequência $\nu = 1/T = v/\lambda$



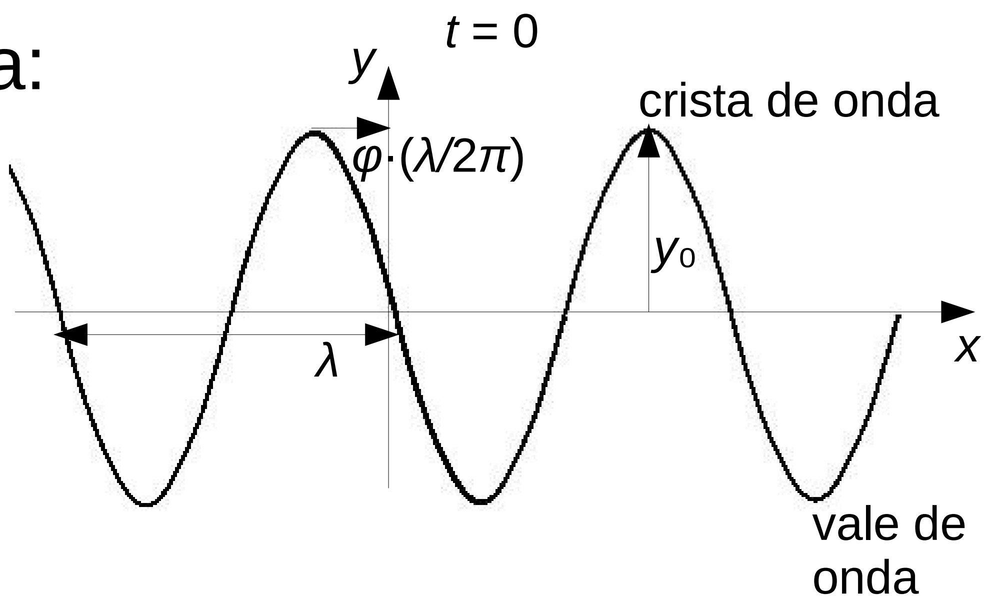
Ainda definimos a frequência angular $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.

Para ondas propagando-se na direção $-x$, $v < 0$,
k e λ são negativos (e no espaço, vetores $\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{\lambda}$).

Ondas

Ondas Harmônicas (Senoidais)

Caso mais interessante ainda:



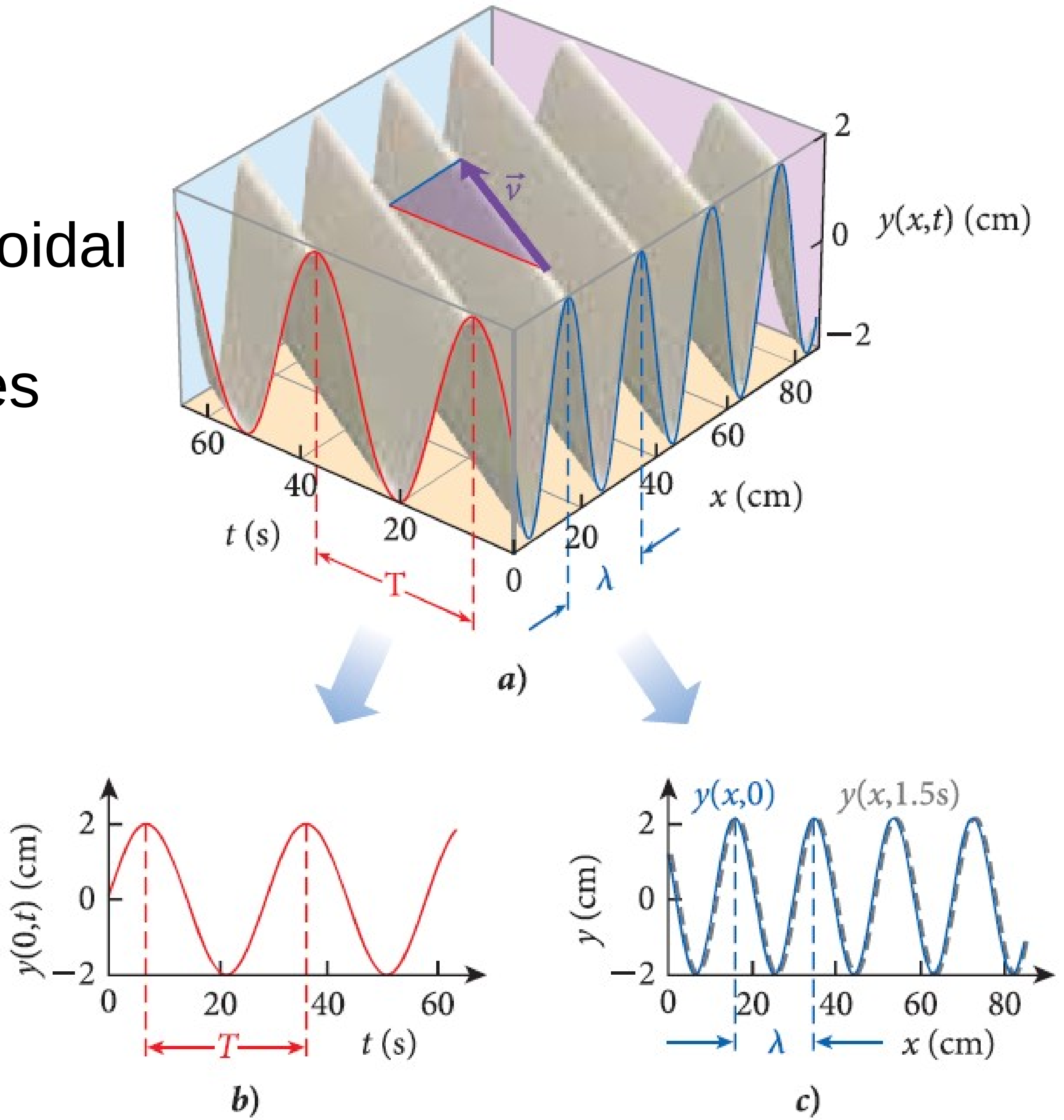
$$y = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$
$$= y_0 \cos 2\pi(x/\lambda - t/T + \varphi)$$
$$= y_0 \cos [2\pi/\lambda \cdot(x - vt) + \varphi],$$

onde
y_0 é a amplitude da onda,
φ é chamado fase
(o deslocamento do pico da onda até $x = 0$ em $t = 0$ em unidades de $\lambda/2\pi$).

Ondas

Ondas Harmônicas

Aqui uma onda senoidal em função de *x* e *t*, e cortes para valores de *x* constante e de *t* constante.



Ondas

Interferência

Quando duas (ou mais) ondas y_1 e y_2 passam pela mesma região do espaço, elas se sobrepõem:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

fenômeno chamado interferência.

No caso de duas ondas harmônicas temos

$$y(x, t) = y_{1,0} \cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + y_{2,0} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

Usando a identidade trigonométrica
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$
vamos agora achar umas propriedades interessantes de ondas em interferência.

Ondas

Interferência: ondas com a mesma frequência

Se as ondas têm a mesma frequência e se propagam na mesma direção: $\nu_1 = \nu_2 =: \nu$
=> $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$, $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, $k_1 = k_2 =: k$,

e têm a mesma amplitude
$y_{0,1} = y_{0,2}$,
a soma dá

$$y = 2y_{0,1} \cdot \cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2) \cdot \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2)$$
$$= y_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2),$$
onde $y_0 = 2 \cdot \cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2) \cdot y_{0,1}$

=> uma onda com os mesmos frequência, comprimento de onda, etc. que as duas ondas y_1 e y_2.

Ondas

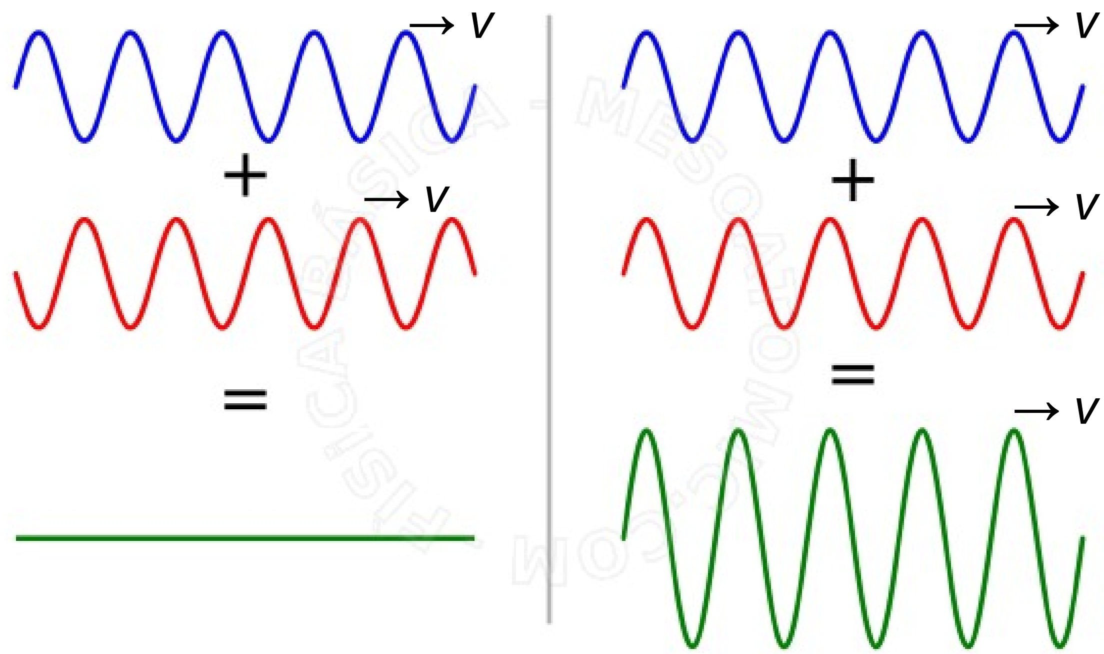
Interferência: ondas com a mesma frequência

$y = y_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2)$, onde $y_0 = 2\cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2)\, y_{0,1}$

Dois casos especiais:

$\varphi_1 = \varphi_2 + (n + ½)\cdot 2\pi$, exatamente fora de fase

$\varphi_1 = \varphi_2 + n\cdot 2\pi$, exatamente em fase



$y_0 = 0$
interferência destrutiva

$y_0 = 2y_{0,1} = 2y_{0,2}$
interferência construtiva

Ondas

Interferência: ondas com a mesma frequência

$y = y_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2)$, onde $y_0 = 2\cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2)\, y_{0,1}$

=> Dependendo da diferença de fase, as ondas se amplificam (interferência construtiva) ou cancelam (interferência destrutiva) ou algo intermediário.

=> Pela intensidade da onda resultante, dá para determinar a diferença de fase entre as ondas y_1 e y_2, propriedade naquela se baseia a técnica da interferometria.

Na interferência de ondas com a mesma frequência e amplitudes diferentes, interferência construtiva e destrutiva também acontecem, mas no caso da destrutiva, o cancelamento não é total.

Ondas

Batimento

Ondas com quase a mesma frequência, $\nu_1 \approx \nu_2$
=> $\omega_1 \approx \omega_2$, $\lambda_1 \approx \lambda_2$, $k_1 \approx k_2$
Para facilitar, tomamos $\nu_1 > \nu_2$, as duas amplitudes iguais, $y_{0,1} = y_{0,2}$, e as fases como zero, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

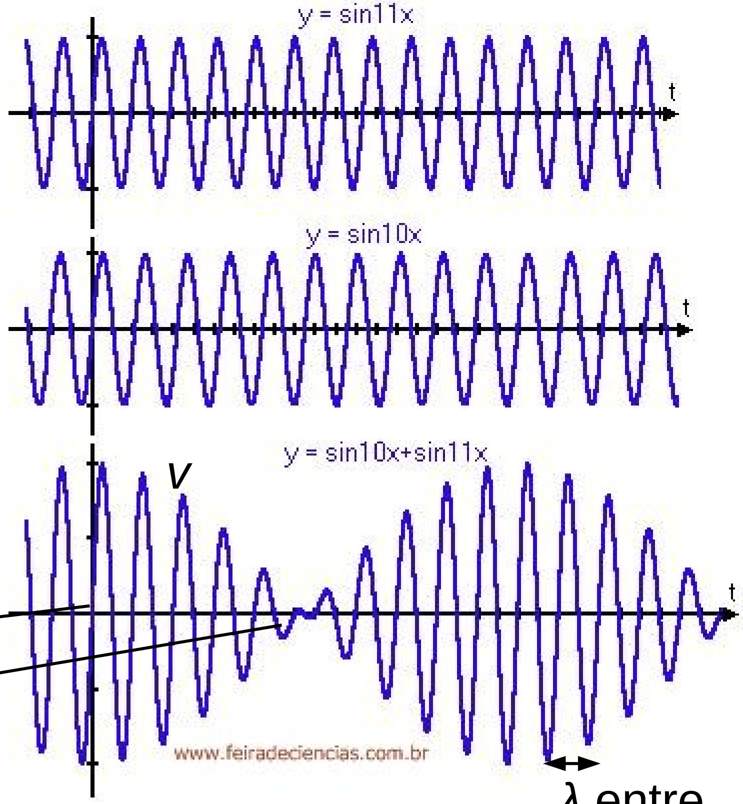
$$y = y_0 \underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right)}_{\text{onda com frequência } \frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)\text{, isto é, similar às ondas } y_1 \text{ e } y_2} \cdot \underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right)}_{\text{onda com frequência muito baixa, isto é, com período/c.d.o. longo}},$$

onde $y_0 := 2y_{0,1} = 2y_{0,2}$

Ondas

Batimento

=> O resultado é uma onda com frequência/comprimento de onda bem similar às duas ondas originais, cuja amplitude oscila lentamente, fenômeno chamado batimento.



aqui, as duas ondas fazem interferência construtiva,

e aqui, destrutiva

λ entre λ_1 e λ_2

metade de $2\pi/[½(k_1 - k_2)]$ $= (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})^{-1}$

Se as duas ondas têm amplitudes diferentes, há batimento também, mas a amplitude não chega a zero entre dois máximos.

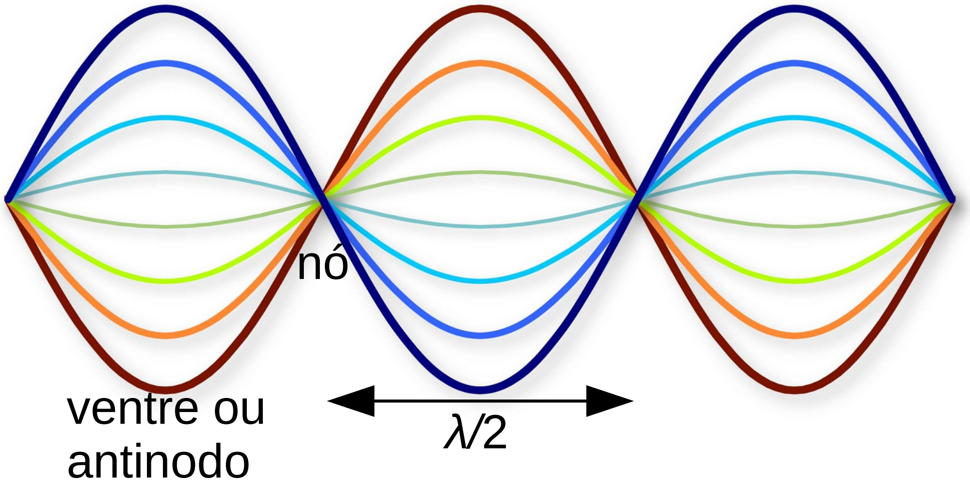
https://www.youtube.com/shorts/aa3QwURm478

Ondas

Ondas Estacionárias

Ondas com as mesmas frequência, $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$,
e amplitude, $y_{0,1} = y_{0,2}$,
mas indo na direção oposta:
$k_1 =: k \Rightarrow k_2 = -k$
tomando $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$\Rightarrow y = y_0 \cdot \cos(-\omega t) \cdot \cos(kx)$,
onde $y_0 := 2y_{0,1} = 2y_{0,2}$



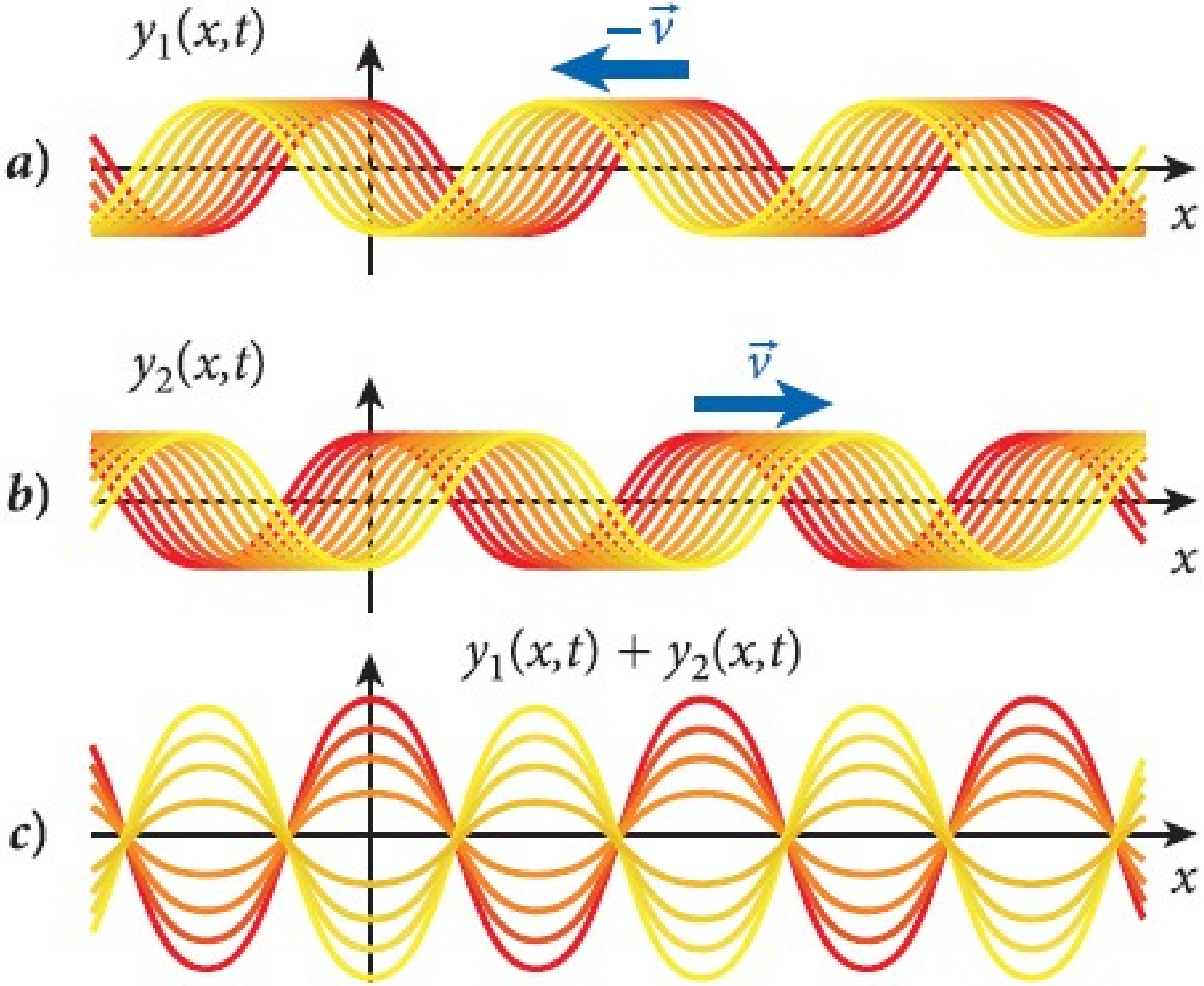
oscila muito em certas posições, os ventres (onde $kx = n\pi$),
e não oscila em outras posições, os nós (onde $kx = (n+½)\pi$).

=> Onda estacionária

https://www.youtube.com/watch?v=zBMaDdLjCKA

Ondas

Ondas Estacionárias



Ondas

Ondas Estacionárias

Já que reflexão de ondas ocorre em barreiras (por exemplo, os pontos, naqueles as extremidades de uma corda de guitarra estão presos), é natural encontrar ondas estacionárias entre duas destas barreiras.

Os comprimentos de onda serão tal, que a distância entre as barreiras L é um múltiplo de meios-comprimentos de onda, $L = n\lambda/2$, $n = 1, 2, \ldots$.
Por isto, apenas ondas com certos comprimentos de onda "se encaixam": $\lambda = 2L/n$, e podemos parametrizar estas ondas pelo número n, $\lambda_n = 2L/n$.

Estas ondas são chamadas (modos) harmônicos do sistema (a corda da guitarra, por exemplo).

Ondas

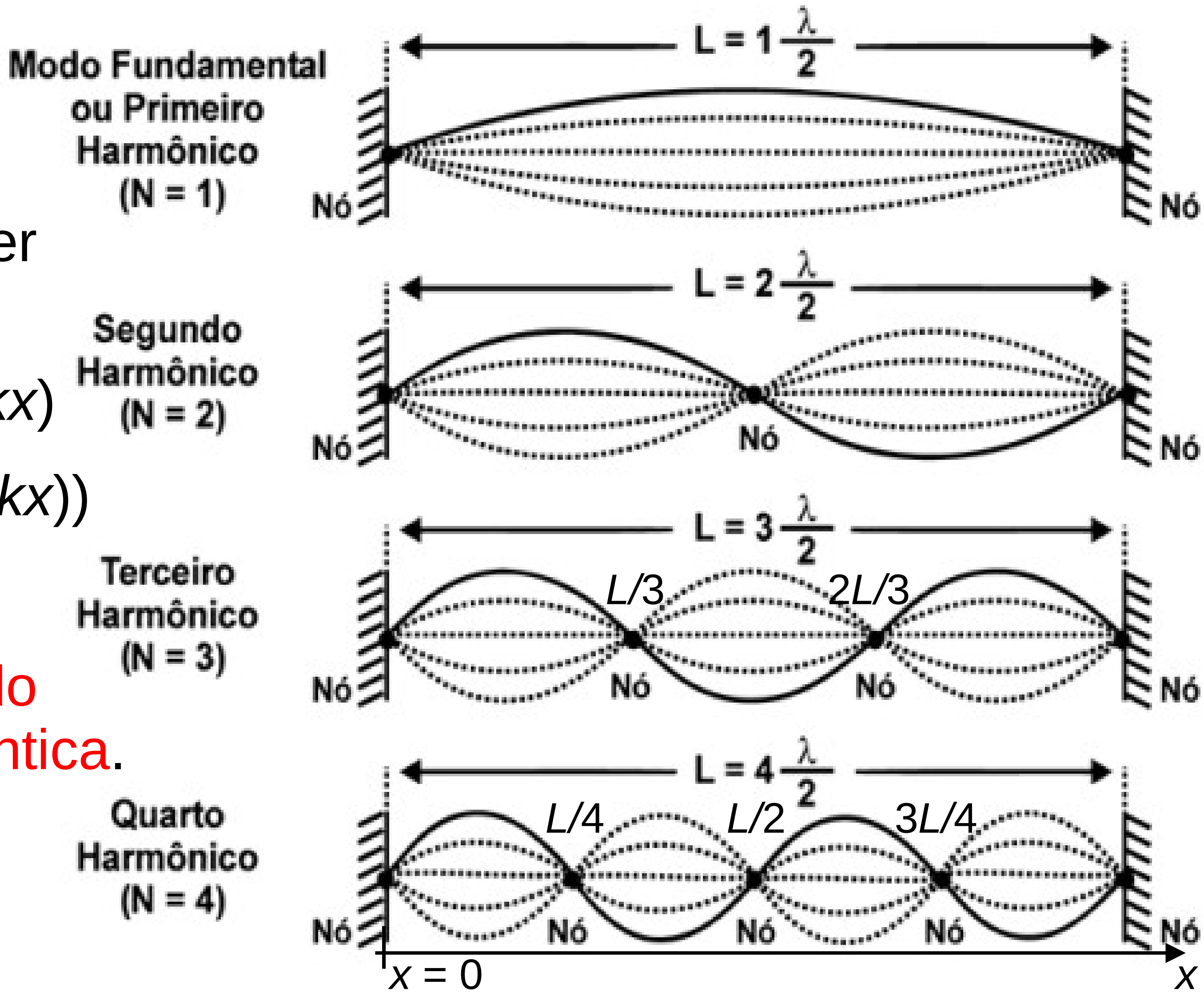
Ondas Estacionárias

Com uma das extremidades em $x = 0$, é mais fácil descrever as ondas por

$y = y_0 \cdot \cos(-\omega t) \cdot \mathrm{sen}(kx)$

(em lugar de ...$\cdot\cos(kx)$)

Obsirva a analogia com o poço quadrado infinito da física quântica.



Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE