



Universidade Federal do ABC

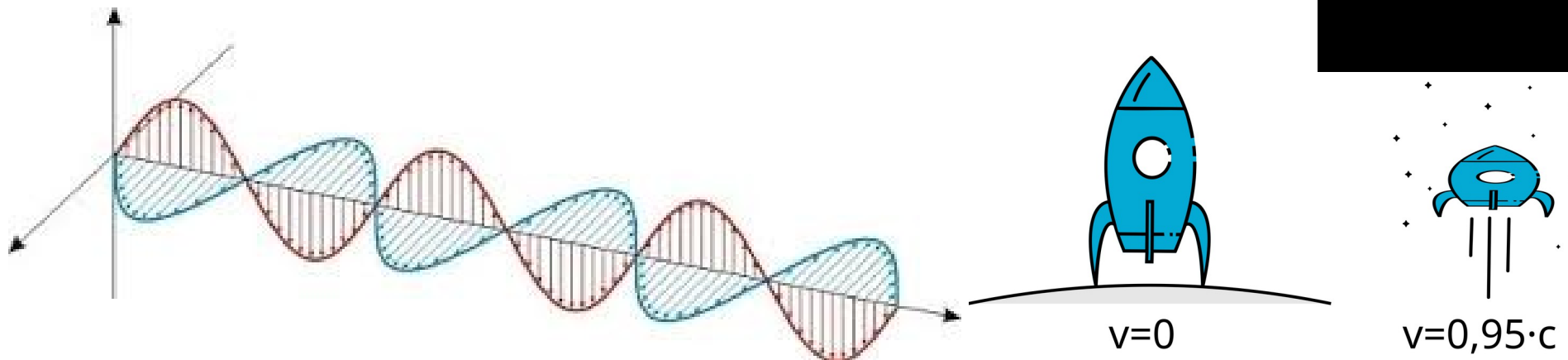
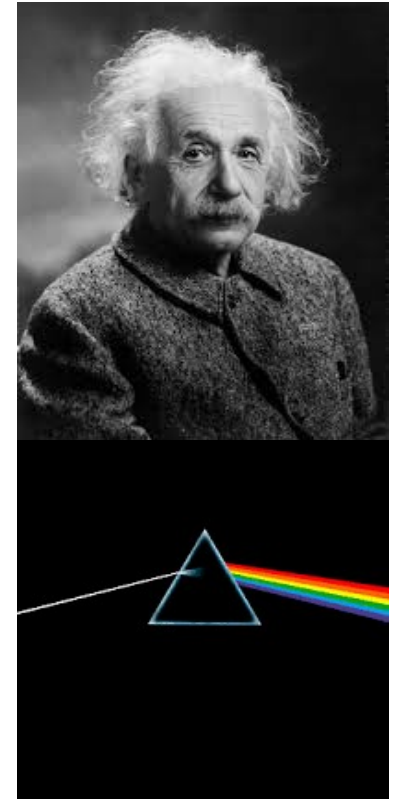
Ótica e Relatividade

08. Transmissão de Energia pela Onda, Modos Normais, Ondas Sonoras, Efeito Doppler (não relativístico)

Prof. Pieter Westera

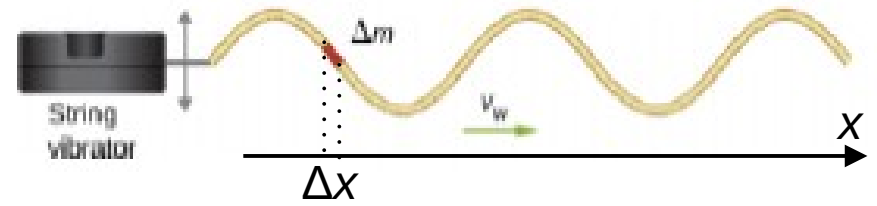
pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



Energia de uma Onda Mecânica

Uma **onda transporta energia** junto, na **direção** da sua **propagação**.



Em uma **onda mecânica**, uma **oscilação** que se **propaga** da forma $A \cos(kx - \omega t + \varphi)$, cada **elementinho** na **posição** x de **massa** $\Delta m = \mu \Delta x$ pode ser considerado um **oscilador harmônico** oscilando com **frequência angular** ω .

Como visto na aula sobre o oscilador harmônica, as **energias cinética** e **potencial** deste osciladorzinho são:

$$\Delta K(x,t) = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi),$$

$$\Delta U(x,t) = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 \cdot \text{cos}^2(kx - \omega t + \varphi)$$

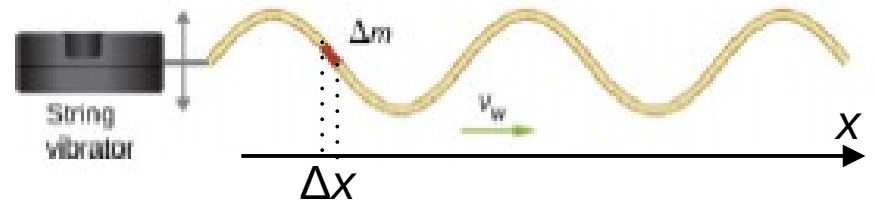
e a **energia total**, $E(x,t) = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2$

Energia de uma Onda Mecânica

$$\Delta K(x,t) = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi),$$

$$\Delta U(x,t) = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2A^2 \cdot \text{cos}^2(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\Delta E(x,t) = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2A^2$$



Fazendo Δx **infinitesimalmente curto** ($\Delta x \rightarrow dx$):

$$dK(x,t) = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi),$$

$$dU(x,t) = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2A^2 \cdot \text{cos}^2(kx - \omega t + \varphi)$$

$$dE(x,t) = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2A^2$$

Mediado sobre **um comprimento de onda** (usando

$\text{cos}^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{cos } 2\theta)$, $\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{cos } 2\theta)$, e $k = 2\pi/\lambda$):

$$K_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \varphi) dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\lambda,$$

$$U_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 \cdot \text{cos}^2(kx - \omega t + \varphi) dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\lambda,$$

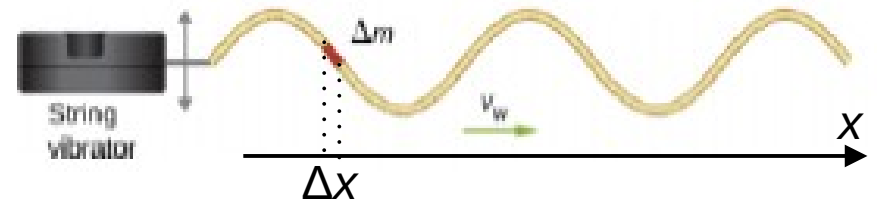
$$E_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 dx \text{ ou } K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\lambda$$

Energia de uma Onda Mecânica

Intensidade da Onda

$$K_\lambda = U_\lambda = \frac{1}{4}\mu A^2 \omega^2 \lambda,$$

$$E_\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 \lambda$$



Esta **energia** é **transportada** em **um período** de oscilação (o tempo pra onda percorrer um comprimento de onda), levando à **potencia** do transporte, ou **intensidade** da onda:

$$P = E_\lambda / T = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 \lambda / T = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v,$$

ou seja, a intensidade é igual ao produto da **velocidade** da **onda** pela **densidade média** de **energia**, resultado que vale para ondas em geral.

Podemos dizer também que ela representa o **fluxo médio** de **energia** através de um **ponto qualquer** da corda.

Teorema de Fourier

Modos Normais

Voltando às **ondas estacionárias presas** (por exemplo uma corda de um violão):

$$\lambda_n = 2L/n$$

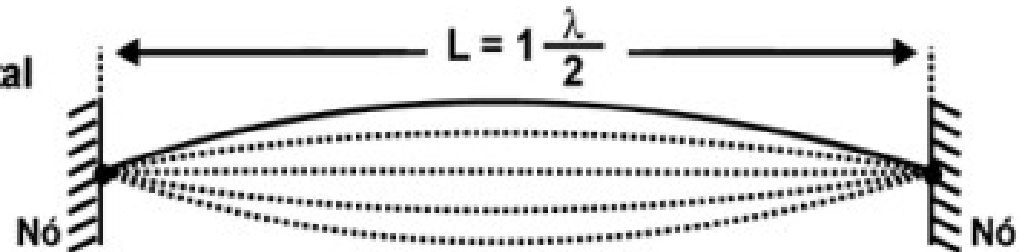
$$\Rightarrow k_n = 2\pi/\lambda_n = n \cdot \pi/L,$$

$$\omega_n = 2\pi/T_n = 2\pi v/\lambda_n$$

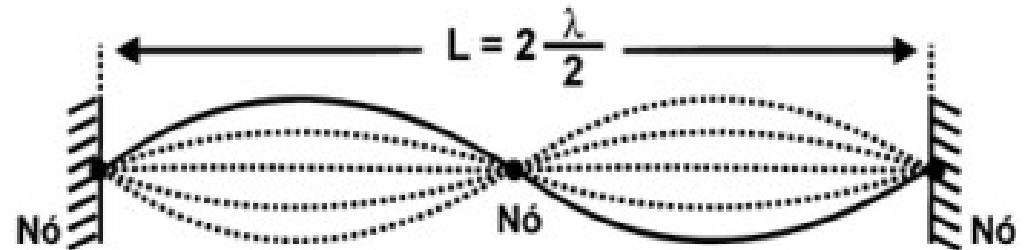
$$= n \cdot \pi v/L$$

Número de onda e frequência dos modos normais, são múltiplos dos n.d.o. e fr. do modo fundamental.

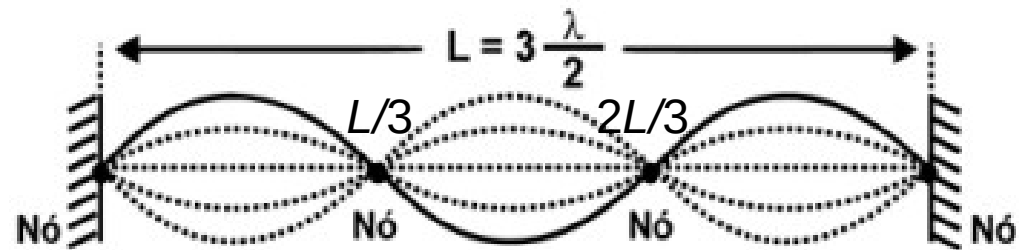
Modo Fundamental
ou Primeiro
Harmônico
(N = 1)



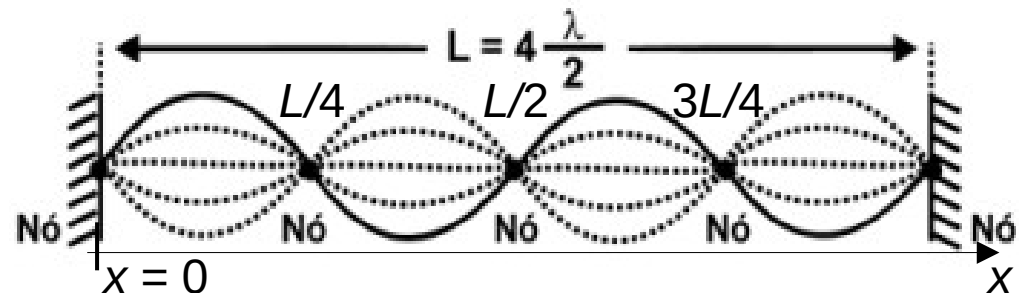
Segundo
Harmônico
(N = 2)



Terceiro
Harmônico
(N = 3)



Quarto
Harmônico
(N = 4)



Teorema de Fourier

Análise de Fourier

O que nos leva a um **teorema** interessante, formulado em 1807 por **Jean-Baptiste Joseph Fourier**: "Qualquer função periódica pode ser **decomposta** em uma **soma** (finita ou infinita) de **senos** e **cossenos**."

Vale incl. para **funções complexas** e/ou com **descontinuidades**.



Joseph Fourier
(1768-1830)

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

Teorema de Fourier

Análise de Fourier

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

A **decomposição** de uma **função periódica** em **senos** e **cossenos** é chamada **Análise de Fourier**, e o resultado (aqui o conjunto dos coeficientes a_n e b_n), **transformada de Fourier**.

Os coeficientes podem ser achados (sem dedução) por

$$a_n = 2/L \cdot \int_0^L T(t) \cdot \cos(n\pi t/L) dt \quad \text{e}$$

$$b_n = 2/L \cdot \int_0^L T(t) \cdot \text{sen}(n\pi t/L) dt$$

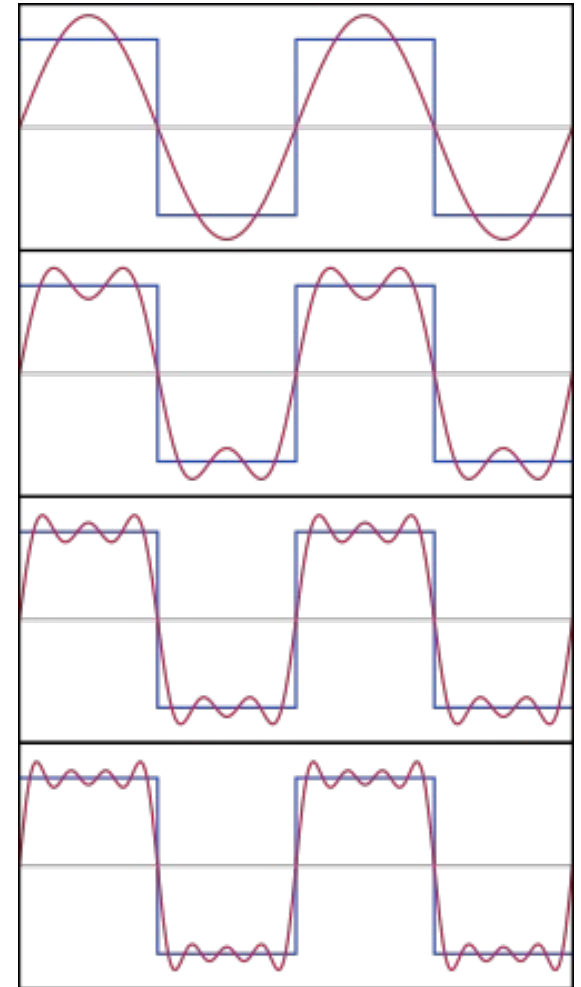
Obviamente, $a_0 = \overline{T}$,

para $T(t) = \cos(n\pi t/L)$, $a_n = 1$ e os demais coeficientes, 0
e $T(t) = \text{sen}(n\pi t/L)$, $b_n = 1$ e os demais coeficientes, 0.

Teorema de Fourier

Análise de Fourier

A grande **importância** do Teorema de Fourier reside na sua capacidade de **desmembrar sinais complexos** em seus **componentes mais simples**. Isso tem um **impacto profundo** em **diversas áreas**, tais como **Processamento de Sinais**, **Engenharia**, **Telecomunicações**, **Medicina**, **Computação Gráfica**, etc.



Ondas em mais de uma dimensão

As ondas descritas até agora se propagam em uma direção ao longo de um meio alongado, como uma corda ou uma cadeia de molas acopladas.

Porém, muitas ondas se propagam por um meio bi-dimensional, como as ondas na superfície da água,

ou tri-dimensional como o som no ar ou ondas eletromagnéticas no espaço.

Elas são funções, além de do tempo, da posição $\mathbf{r} = (x,y)$ ou $\mathbf{r} = (x,y,z)$ e obedecem à equação da onda 2D ou 3D, $\nabla^2 y - 1/v^2 \cdot \partial^2 y / \partial t^2 = 0$, onde $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ (+ $\partial^2 / \partial z^2$).



Ondas em mais de uma dimensão

Ondas Planas

Se **propagam** em **uma direção** no espaço. As **frentes de ondas** são **planos perpendiculares** à **direção da propagação**.

=> **comprimento** - e **número de onda** viram **vetores** na **direção da propagação**, λ e \mathbf{k} .

($\lambda = |\lambda|$ é a **distância** entre dois **planos sucessivos** da onda e $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda = \omega/v$).

A onda pode ser descrita como

$$y(\mathbf{r}, t) = y_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) = \text{Re}\{y_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)}\},$$

onde "." significa o **produto escalar**.

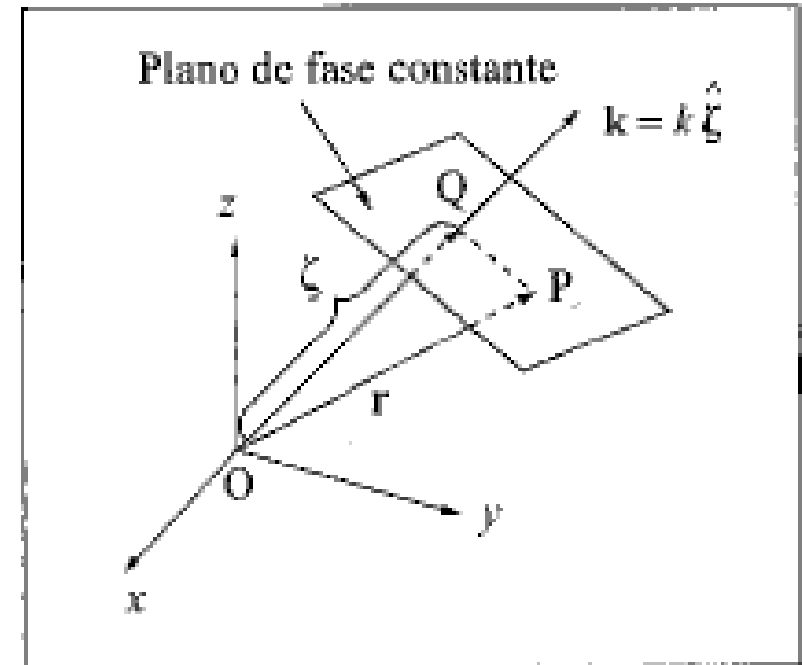


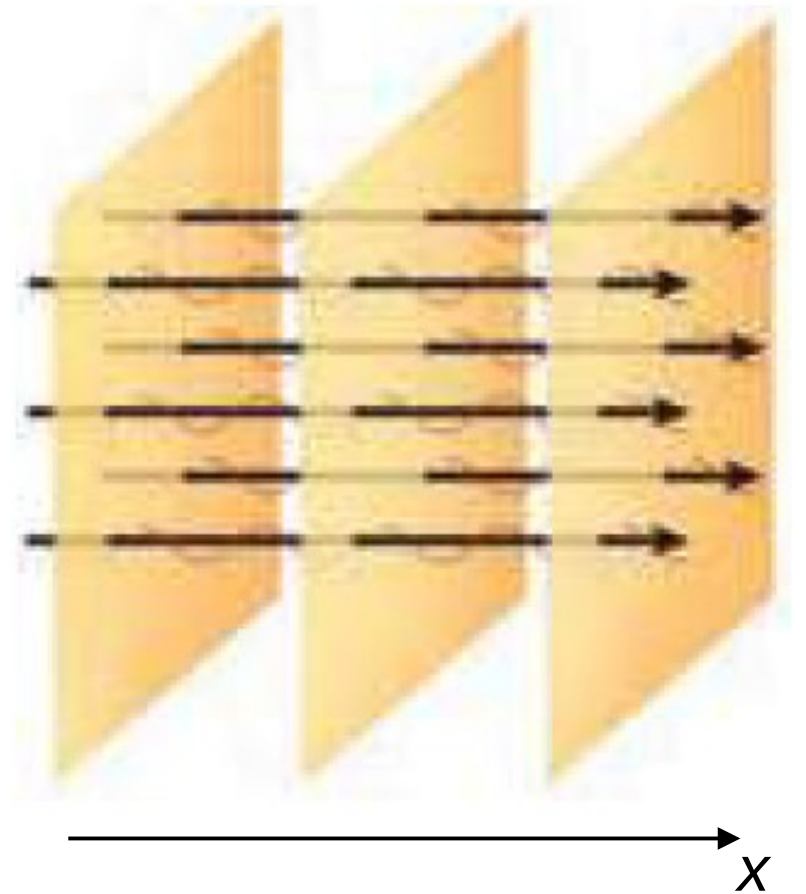
Figura 6.14 — Onda plana

Ondas em mais de uma dimensão

Ondas Planas

Podemos escolher um sistema de **coordenadas cartesianas** tal que um dos **eixos** (por exemplo, e eixo x) é **paralelo** à **direção** da **propagação**.

Assim, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ vira kx , e podemos **tratar** a **onda** como no caso **unidimensional**, como **função apenas** de x e t .



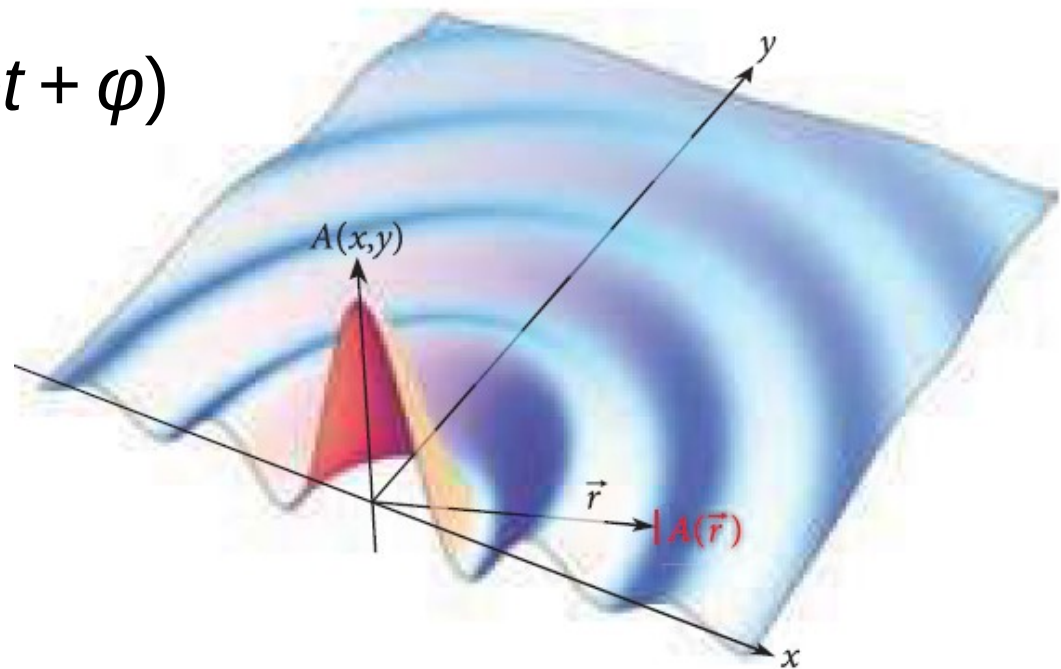
Ondas em mais de uma dimensão

Ondas Circulares no Plano, $\mathbf{r} = (x,y)$

Partindo da origem: A **onda** se **propaga** em **todas** as **direções radialmente**, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$, tal que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr = k\sqrt{x^2+y^2}$.

Além disso, na **distância** r , a **intensidade** da onda se **dilui** sobre um **círculo** de $2\pi r \Rightarrow A^2 \propto 1/r$, e podemos escrever

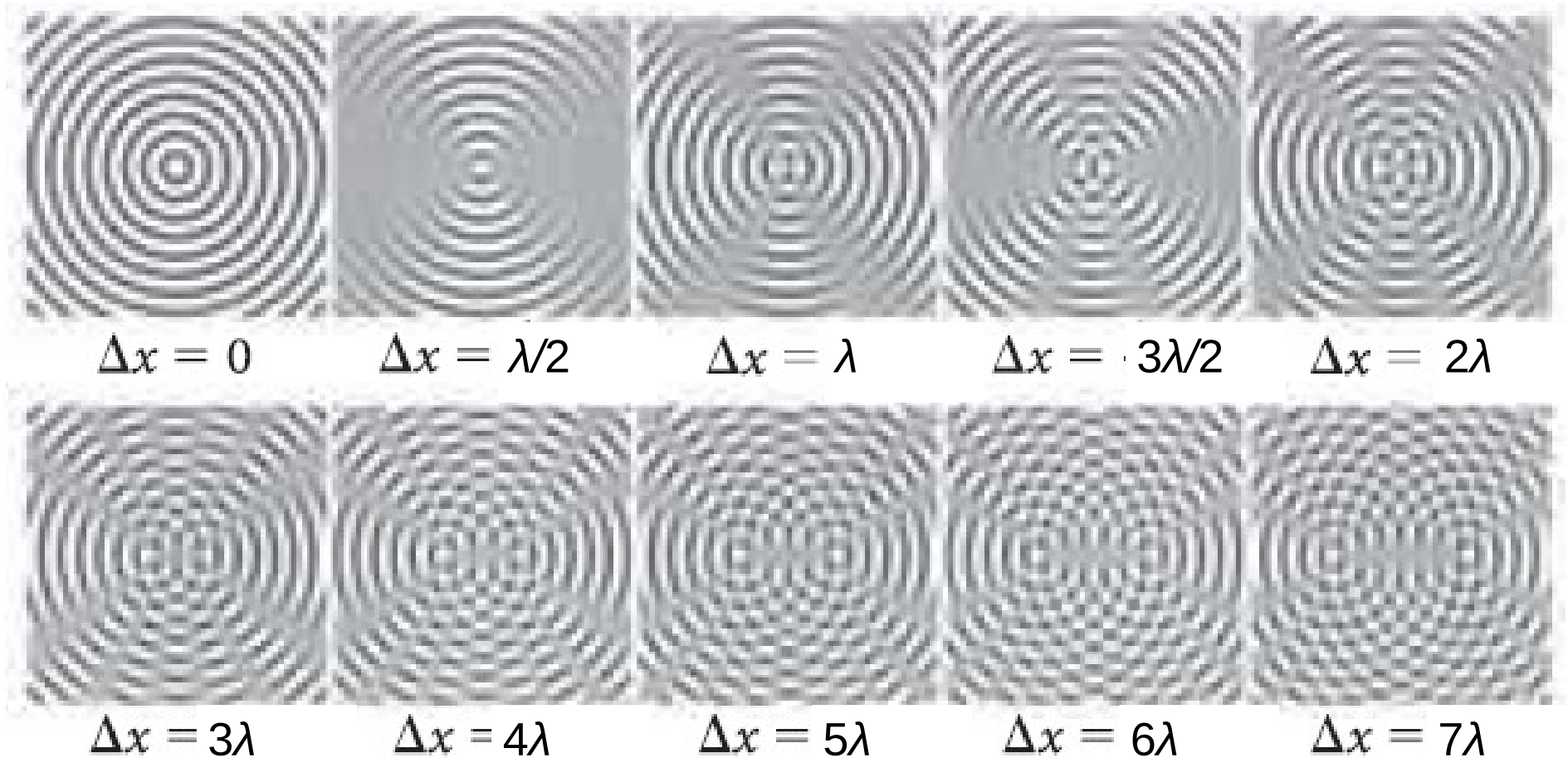
$$y(\mathbf{r},t) = y_0/\sqrt{r} \cdot \cos(kr - \omega t + \varphi)$$



Ondas em mais de uma dimensão

Superposição (interferência) em 2 dimensões

Padrões de interferência de duas ondas circulares no plano com comprimento de onda λ partindo com a mesma fase em posições na distância Δx .



Ondas em mais de uma dimensão

Ondas Esféricas

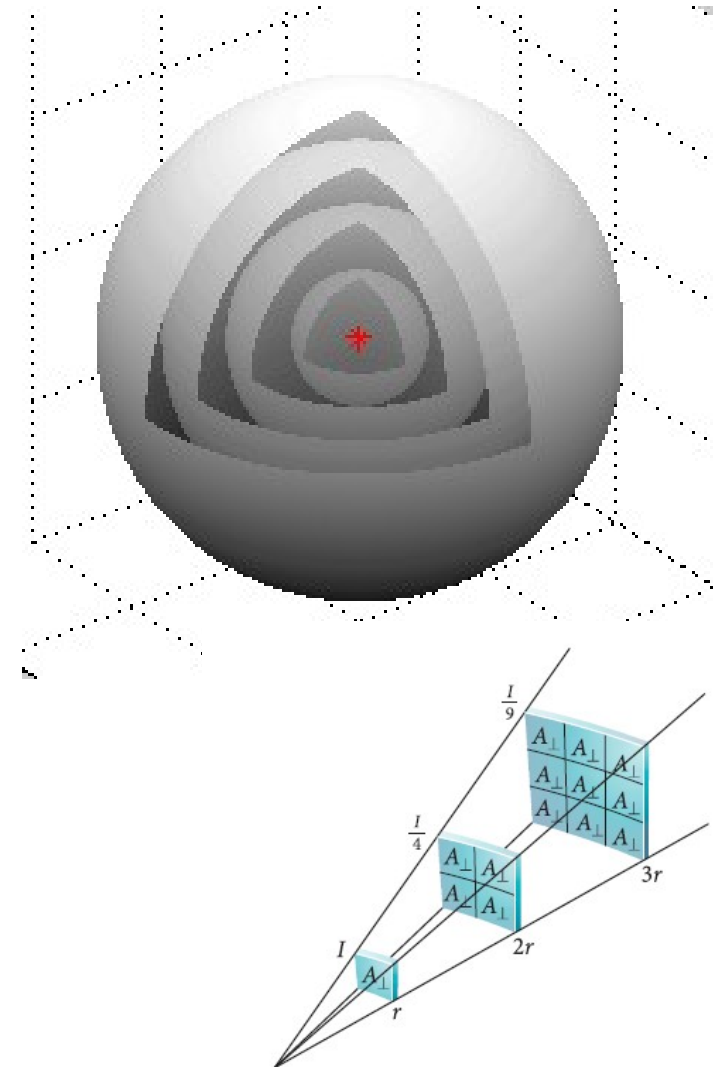
Similar às ondas circulares no plano, ondas **partindo** de **um ponto** (aqui a origem) na **espaço 3D**,

$\mathbf{r} = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

se propagam na **direção radial**, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr$, as **frentes de onda** são **esferas** (superfície $4\pi r^2$),

a **intensidade** se dilui como $1/r^2$:
e a **amplitude**, como $1/r$:

$$y(\mathbf{r},t) = y_0/r \cdot \cos(kr - \omega t + \varphi)$$

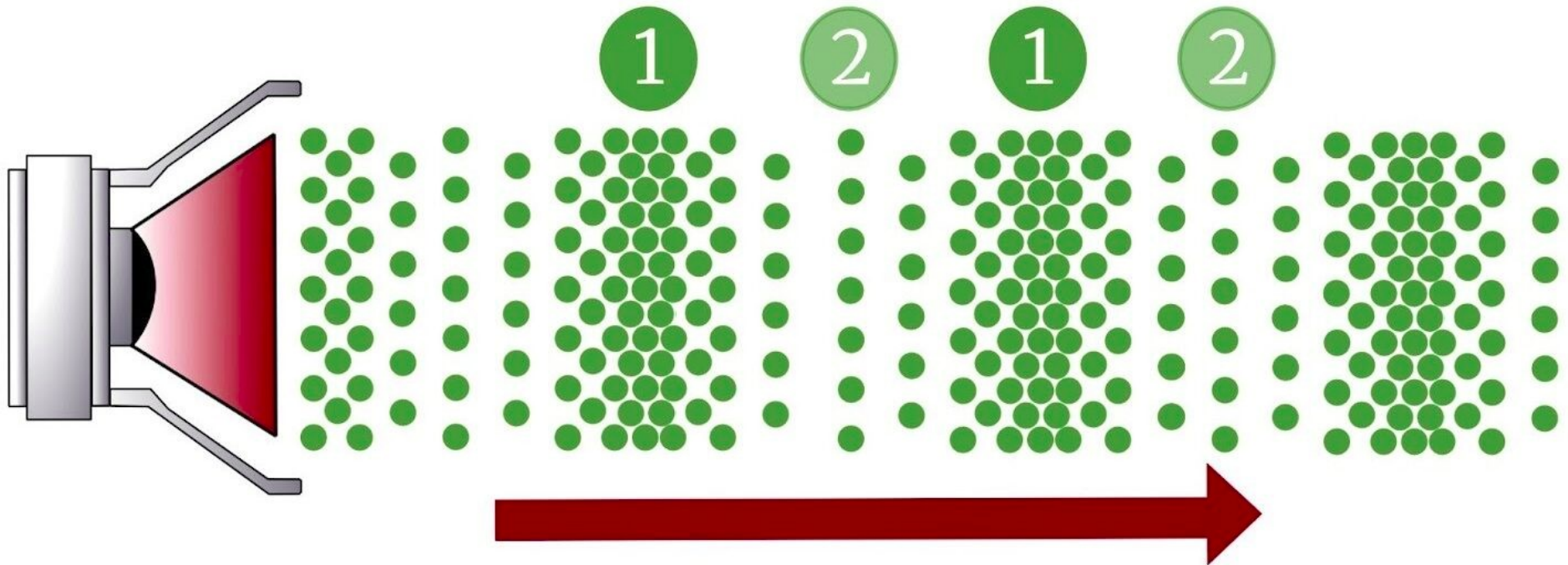
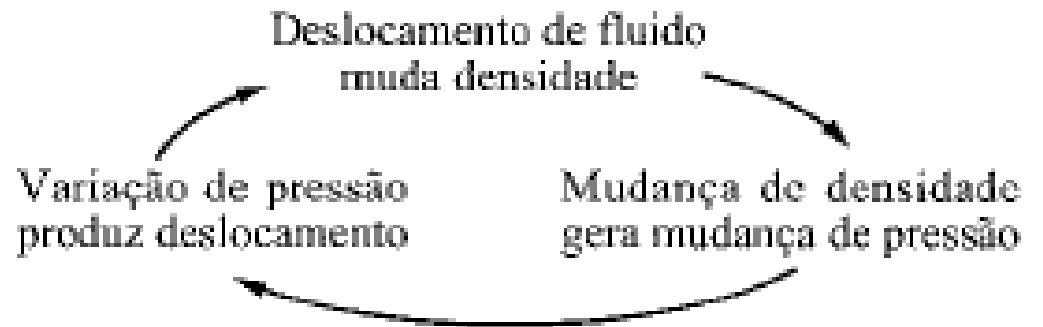


Ondas Sonoras

Ondas de som são **longitudinais** e consistem de **variações de densidade e pressão**. Elas se **propagam** por um **meio** (um gás, líquido ou sólido).

1: meio **comprimido**

2: meio **rarefeito**



Ondas Sonoras

A Velocidade de Ondas Sonoras

Dá para calcular (dedução fora do escopo desta disciplina, => MN, vol. 2, cap. 6.2.), que a **velocidade de propagação do som** é

$$v = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_0},$$

onde P é **pressão** e ρ , a **densidade do meio**.
O índice "0" significa **valores de equilíbrio**.

No **ar**, isto dá, $v(\theta) = (331 + 0.6 \theta / ^\circ\text{C})$ m/s,
para 20°C : $v_{\text{ar}} = 343$ m/s

Na **água**: ~ 1500 m/s

Em geral, a **velocidade do som** é **mais alta** em **líquidos**,
do que em **gases**, e **mais alta** ainda em **sólidos**.

Algumas propriedades do som

Altura ou Tom

Relacionada com a **frequência** da onda sonora e normalmente medida em Hertz - Hz (s^{-1}).

Diferencia sons **graves** (**baixa frequência**) de sons **agudos** (**alta frequência**).

O **ser humano** consegue ouvir sons de 20 Hz a 20 kHz.

Intensidade

Também conhecida como **volume**, diferencia sons **fortes** (**alta intensidade, grande amplitude**) de sons **fracos** (**baixa intensidade, pequena amplitude**).

Frequentemente medida em decibéis:

$\beta = 10 \log_{10}(I/I_0)$ [dB], onde I_0 (0 dB) corresponde ao limiar do audível.

Algumas propriedades do som

Timbre

É a propriedade que permite **diferenciar** sons de **fontes sonoras diferentes**, mesmo que tenham a mesma altura e intensidade.

É o que permite **reconhecer** a **origem** do som, como um violino, uma flauta ou a voz de uma pessoa.

Está relacionado com a **forma** da **onda** sonora e os **harmônicos** presentes no som.

Efeito Doppler para o Som

É o efeito que **umenta** a **frequência** de uma **onda** quando a **fonte** está se **aproximando** ao **observador** (ouvinte), ou **diminui** a frequência, quando os dois estão se **afastando**.

No caso do **som**, o som de uma fonte se **aproximando** é mais **agudo**, do que se os dois estivessem em repouso, e mais **grave**, caso eles estão se **afastando**.

<https://www.youtube.com/watch?v=jpp2VvnRYrA>

O motivo é que o **caminho** para duas **cristas chegarem** no **observador** **diminui** no caso de **aproximação**
=> Elas chegam numa distância de **tempo menor** (e o **oposto** para **afastamento**).

https://www.youtube.com/watch?v=Tn35SB1_NYI

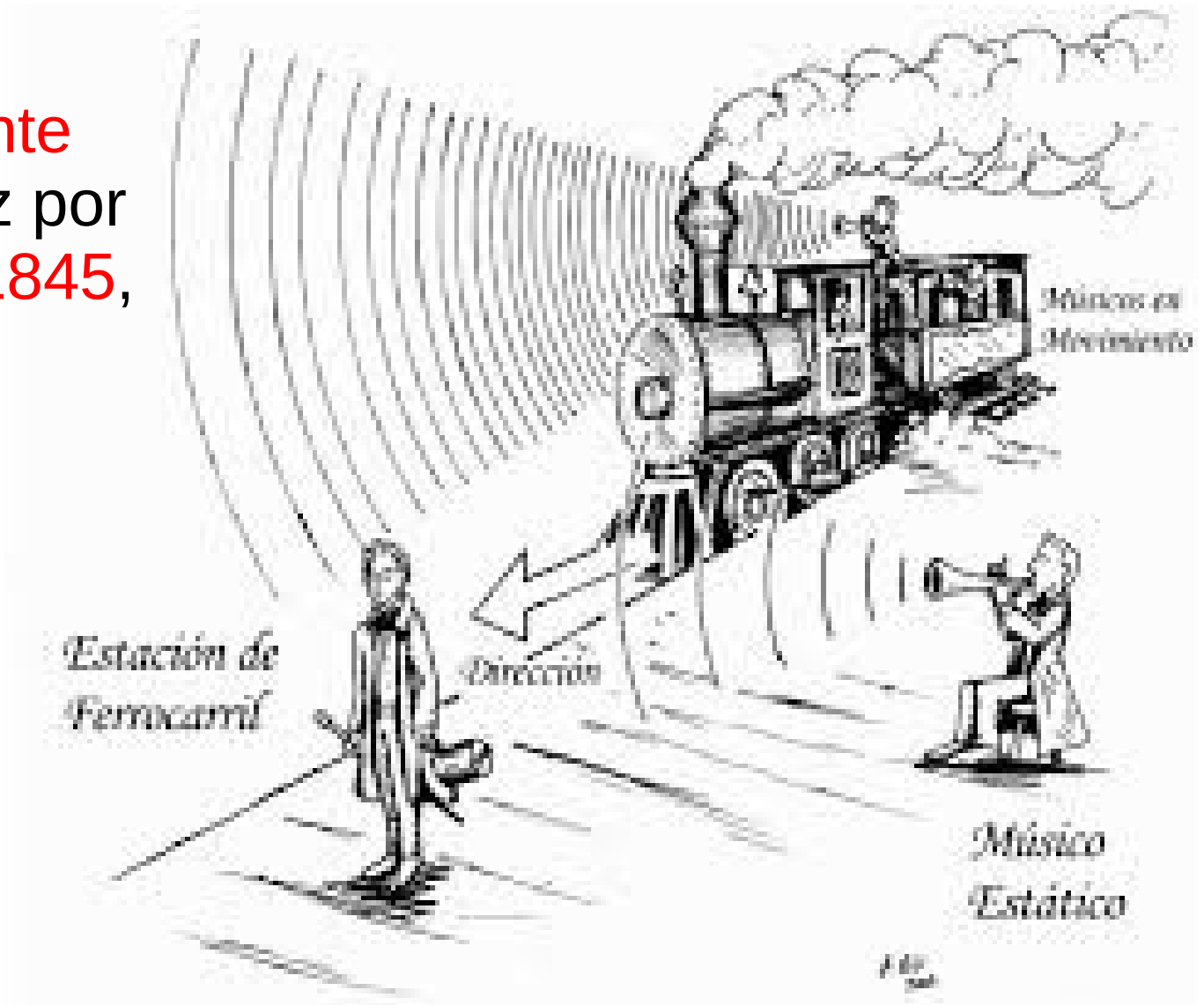


Christian Doppler
(1803-1853)



Efeito Doppler para o Som

Comprovado experimentalmente pela primeira vez por **Buys Ballot** em **1845**, utilizando uma locomotiva com trompetistas.



Efeito Doppler para o Som

Fonte em Movimento, Observador parado

Chamando de c_s a **velocidade do som**, e de v_f a da **fonte** (**positiva** para **aproximação** ao observador):

Período de oscilação no **referencial da fonte**: T_0 , frequência $\nu_0 = 1/T_0$.

Momentos de emissão de duas **cristas sucessivas**: t_1 e $t_2 = t_1 + T_0$.

Na **emissão** da **segunda**, a **fonte** está $\Delta x = v_f T_0$ **mais próximo** do **observador** que na da **primeira**. Por isto, ela leva $\Delta x/c_s = v_f/c_s \cdot T_0$ **menos tempo** para chegar, que a 1^a.

Tempos de chegada: t_1' e $t_1' + T_0 - v_f/c_s \cdot T_0 = t_1' + (1 - v_f/c_s)T_0$

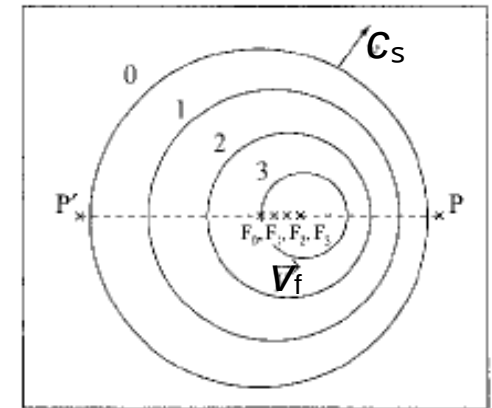


Figura 6.31 — Fonte em movimento

Efeito Doppler para o Som

Fonte em Movimento, Observador parado

=> O **observador** observa um **período** de **oscilação** de $T = (1 - v_f/c_s)T_0$,
e uma **frequência** de $\nu = \nu_0/(1 - v_f/c_s)$
(Faz sentido para os casos $v_f = 0$ e $v_f = c_s$).

Caso a fonte está se **afastando**, poderíamos dizer que v_f é negativo, ou se queremos que v_f significa o módulo da velocidade da fonte, **trocar** v_f por $-v_f$ na **fórmula**:

$\nu = \nu_0/(1 \mp v_f/c_s)$ (- para aproximação, + para afastamento)

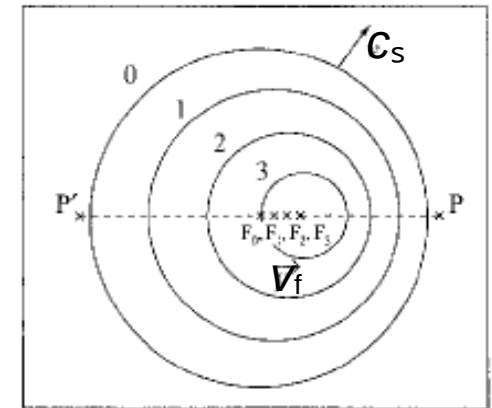


Figura 6.31 — Fonte em movimento

Efeito Doppler para o Som

Observador em Movimento, Fonte parada

Nesta caso, o efeito se dá pelo fato do **observador** ir ao **encontro** da **fonte** e **enfrentar** as **cristas** **mais rapidamente** uma após a outra, do que se estivesse parado.

Período na fonte T_0 , **frequência** $\nu_0 = 1/T_0$,
comprimento de onda: $\lambda = c_s T_0 = c_s / \nu_0$
velocidade do observador v_0

velocidade relativa entre ondas e observador: $c_s + v_0$

=> Ele enfrenta as **cristas separadas** pelo **tempo**

$$T = \lambda / (c_s + v_0) = c_s T_0 / (c_s + v_0) = T_0 / (1 + v_0 / c_s)$$

$$\Rightarrow \nu = (1 + v_0 / c_s) \cdot \nu_0$$

$$\text{Melhor: } \nu = (1 \pm v_0 / c_s) \cdot \nu_0 \quad (+ \text{ p. appr.}, - \text{ p. afast.})$$

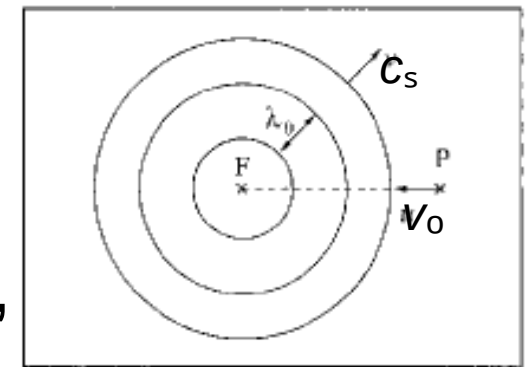
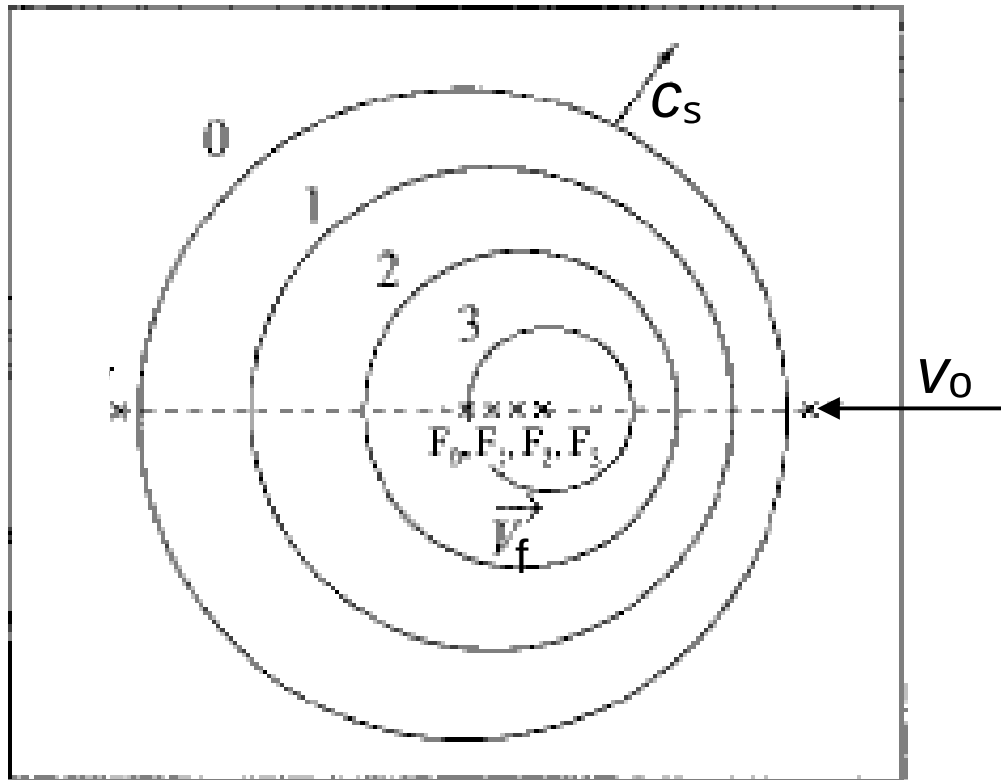


Figura 6.30 — Fonte em repouso

Efeito Doppler para o Som

Fonte e Observador em Movimento

$\nu = (1 \pm v_o/c_s)/(1 \mp v_f/c_s) \cdot \nu_0$ (sinais superiores p. app.,
inferiores p. afastamento)



Efeito Doppler para o Som

Movimento em uma Direção Qualquer (Observador parado)

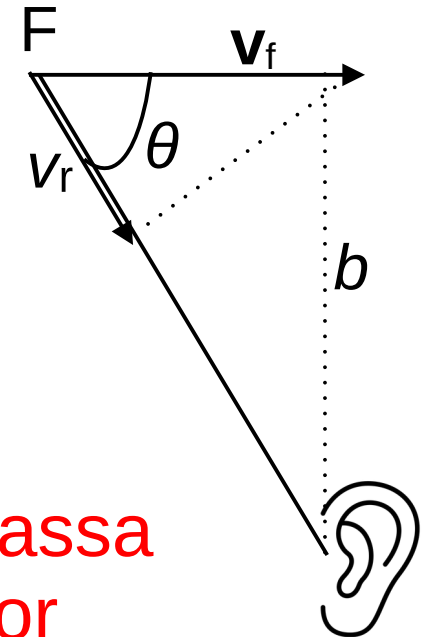
Caso a **velocidade** da **fonte** faz um **ângulo** θ com a **linha fonte-observador**, temos que substituir v_f por $v_r = \cos \theta \cdot v_f$:

$$v = v_0 / (1 - v_r / c_s) = v_0 / (1 - \cos \theta \cdot v_f / c_s)$$

Chamando a **distância**, por aquela a **fonte passa** pelo **observador**, de b , e o **momento de maior aproximação**, de $t = 0$, então, $\cos \theta = -v_f t / \sqrt{b^2 + v_f^2 t^2}$

$$\Rightarrow v = v_0 c_s / (c_s + v_f^2 t / \sqrt{b^2 + v_f^2 t^2})$$

Enquanto uma **fonte emitindo** um **som** de **frequência** v_0 **passa** com **velocidade** v_f numa **distância** b de um **observador**, a **frequência ouvida** por este em **função** do **tempo** é dada por esta fórmula.



Efeito Doppler para o Som

$$v = v_0 c_s / (c_s + v_f^2 t / \sqrt{b^2 + v_f^2 t^2})$$

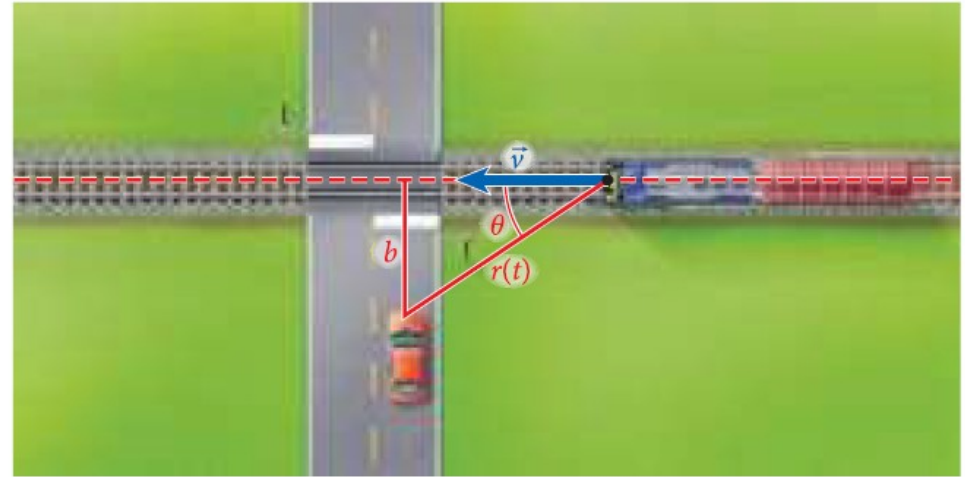
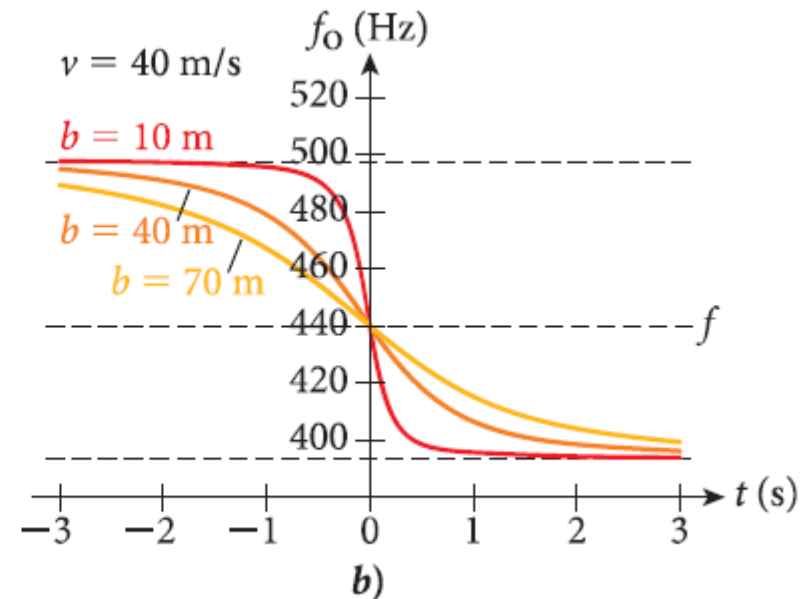
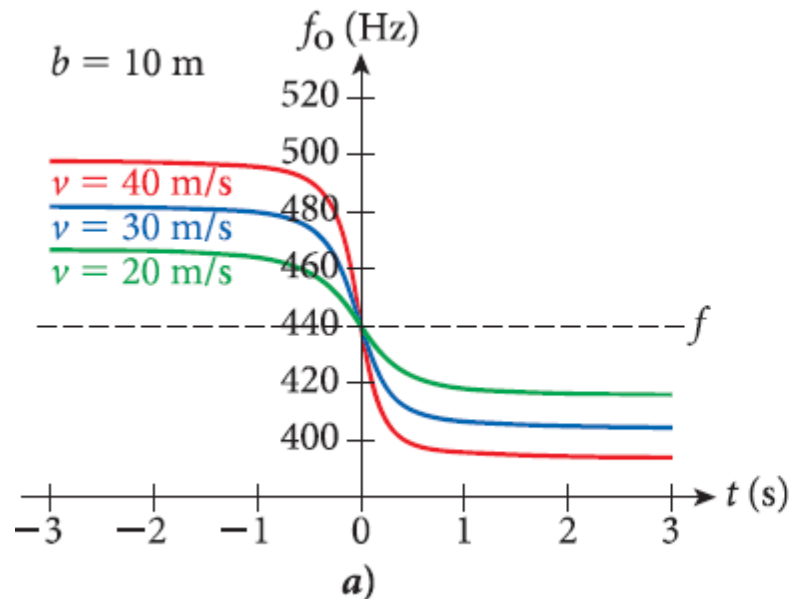
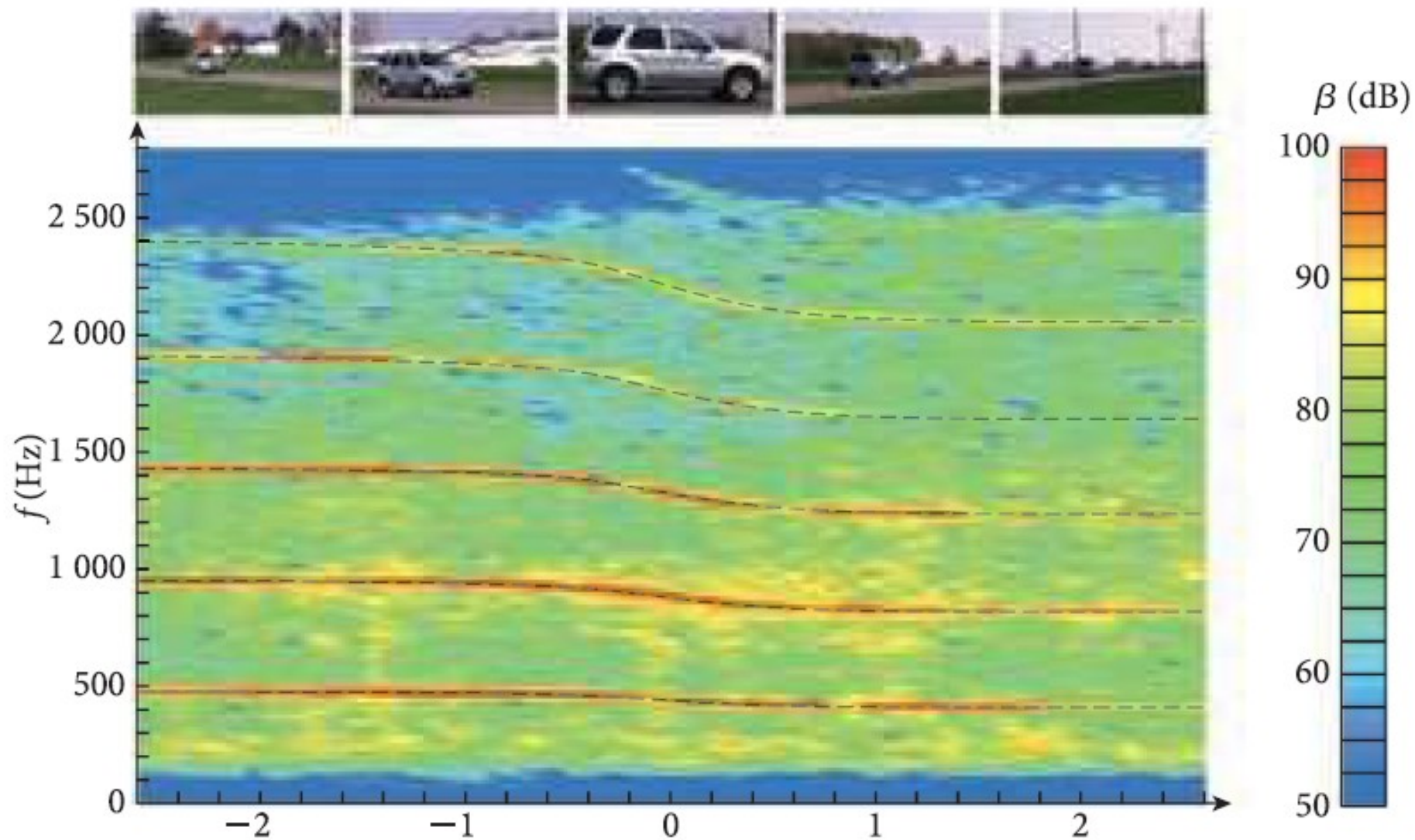


FIGURA 16.17 Efeito Doppler em un espacio bidimensional: un auto en un cruce de ferrocarril.



Efeito Doppler para o Som

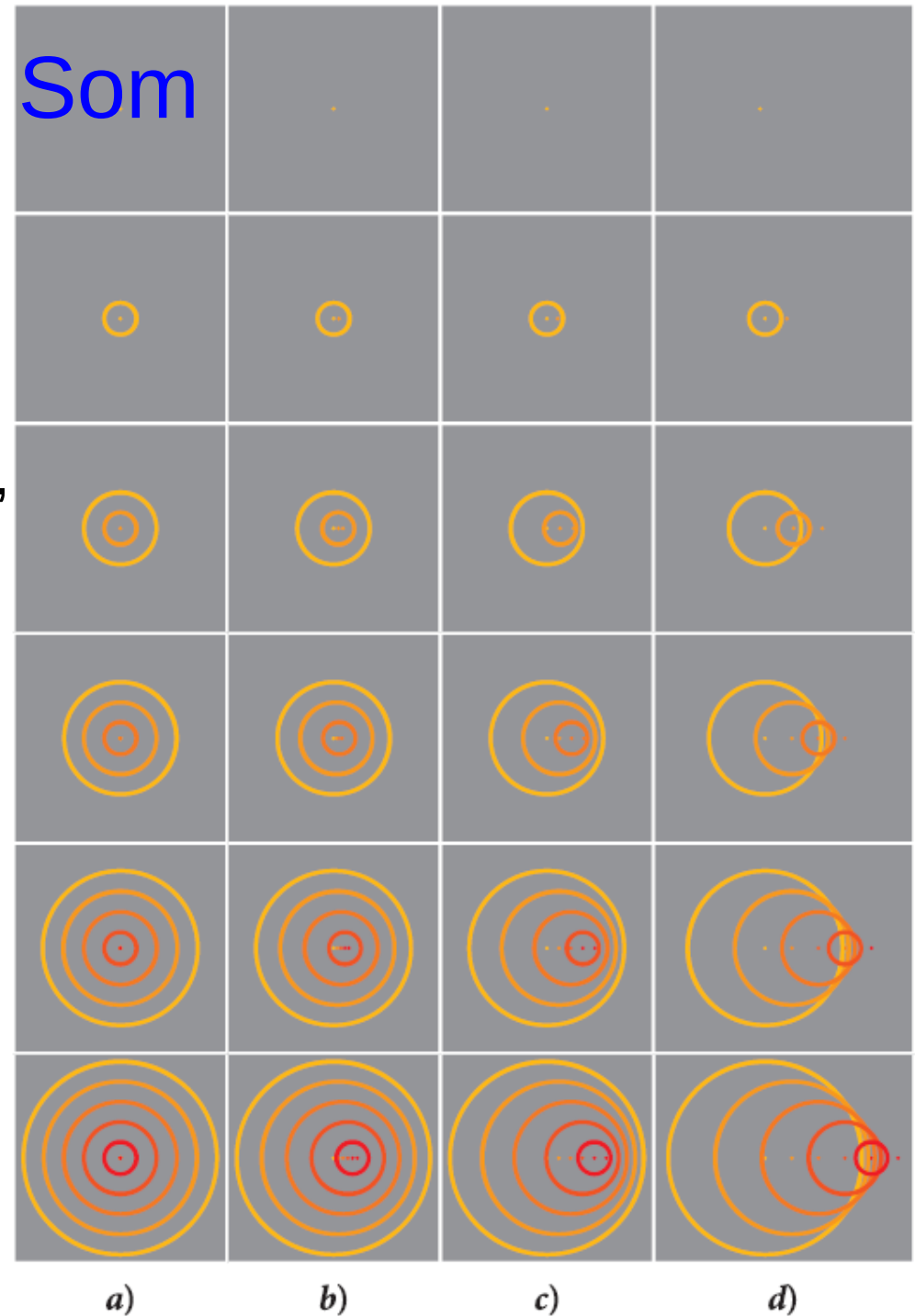


Efeito Doppler para o Som

Cone de Mach

Olhando para
 $v = v_0 / (1 - \cos \theta \cdot v_f / c_s)$,
parece **possível** existirem casos,
para aqueles $v = \infty$,
ou $T = 0$, o **tempo entre a che-**
gada das cristas é zero, todas
chegam ao **mesmo tempo**.
Caso $v_f > c_s$ (**fonte supersônica**),
pode ter ângulos, para aqueles
 $\cos \theta = c_s / v_f \Rightarrow v = \infty$

FIGURA 16.16 El efecto Doppler para ondas sonoras emitidas en seis puntos equidistantes en el tiempo: a) fuente estacionaria; b) fuente que se mueve hacia la derecha; c) fuente que se mueve más rápido hacia la derecha; d) fuente que se mueve hacia la derecha más rápidamente que la rapidez del sonido.



Efeito Doppler para o Som

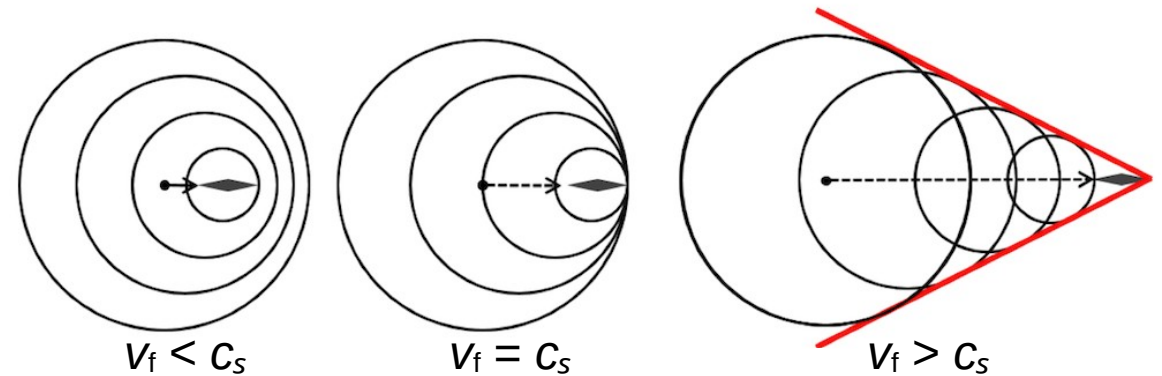
O Estrondo Sônico

Em **vermelho**: Frente de **som** emitido pelo avião: **Todas** as **ondas** se **somam**.

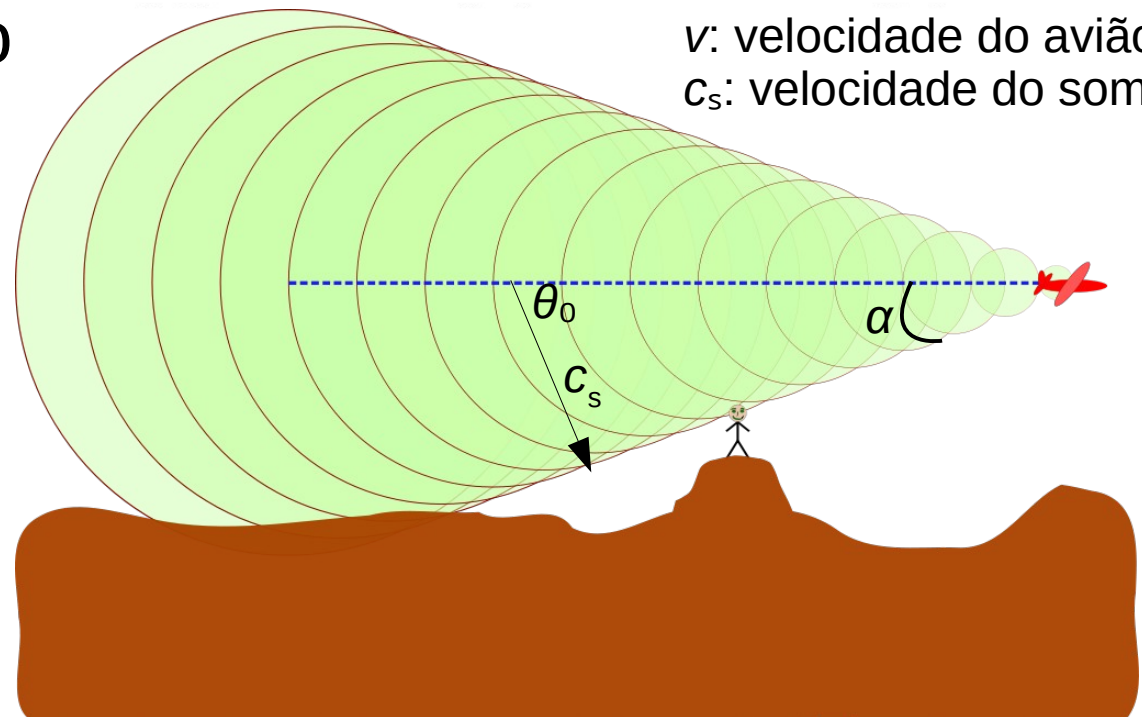
=> É percebido como uma explosão por alguém no chão.

! O **estrondo sônico** **não** é a "quebra da barreira de som".

$$\cos \theta_0 = \sin \alpha = c_s/v$$



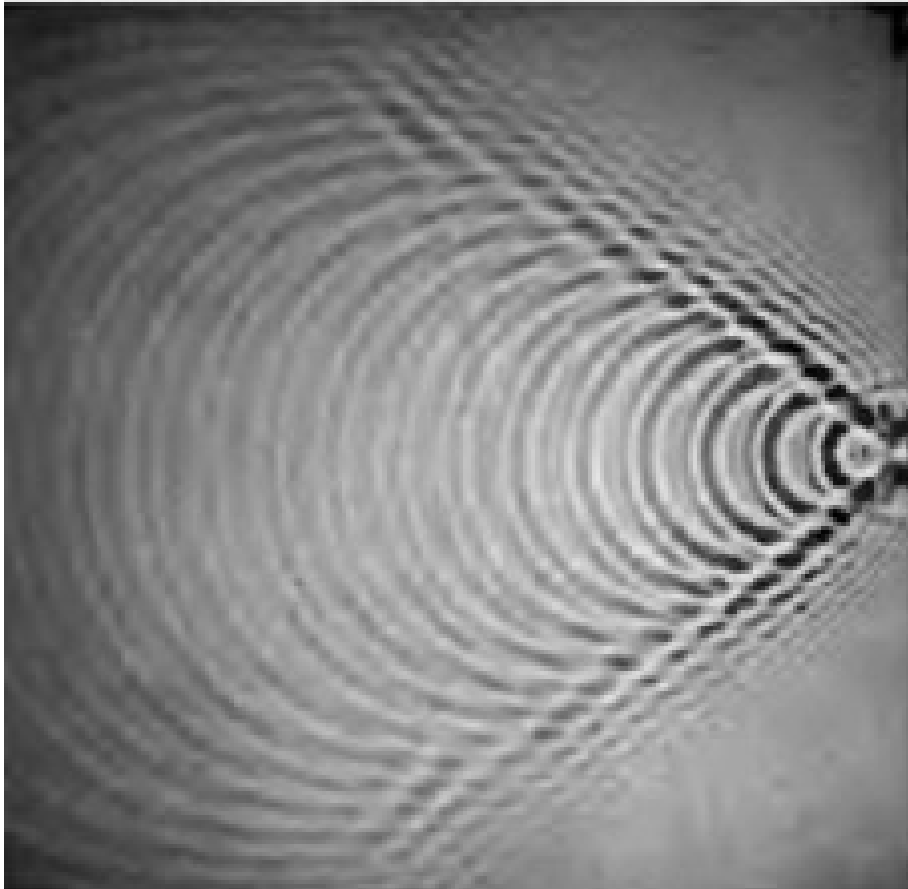
v : velocidade do avião
 c_s : velocidade do som



Efeito Doppler para o Som

Outro Exemplo

Visualização do cone de Mach num tanque de ondas.



Efeito Doppler

Exemplo: Doppler e ultrassom

O poder do som para "ver" dentro do corpo humano e medir fluxo sanguíneo são algumas das aplicações do ultrassom e do Doppler.

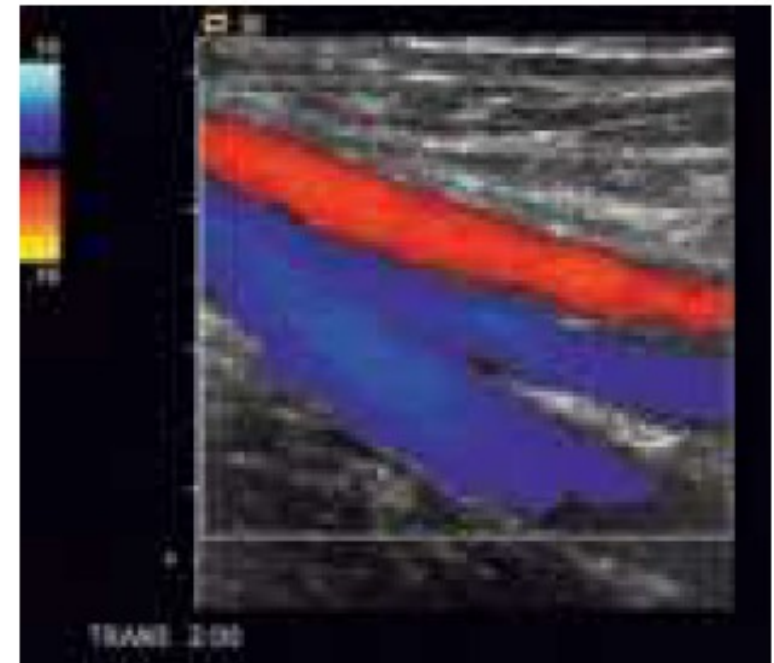


FIGURA 16.20 Imagen Doppler de ultrasonido de sangre que fluye en la arteria carótida. Los colores rojo y azul indican la rapidez del flujo de la sangre.

Efeito Doppler

Exemplo

Qual é a **variação de frequência** típica causada pela **reflexão de ondas ultrassônicas** pelo **fluxo sanguíneo**? Considere **ondas de frequência** de 2 MHz, **velocidade do sangue**, 1.0 m/s e a **velocidade do (ultras)om** no tecido humano, 1540 m/s.



Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

