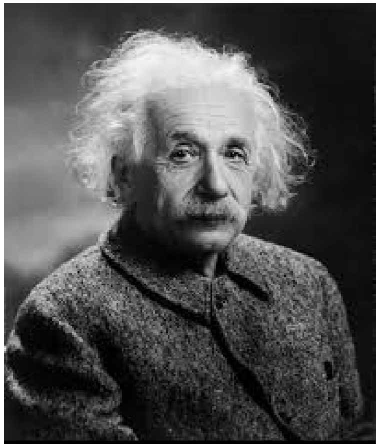
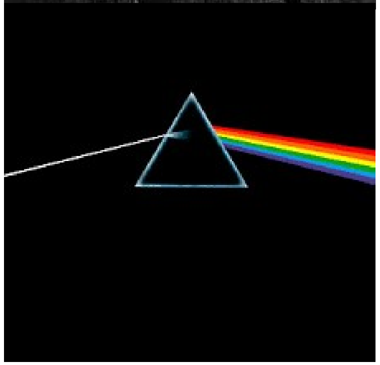
Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

09. Ótica Ondulatória:

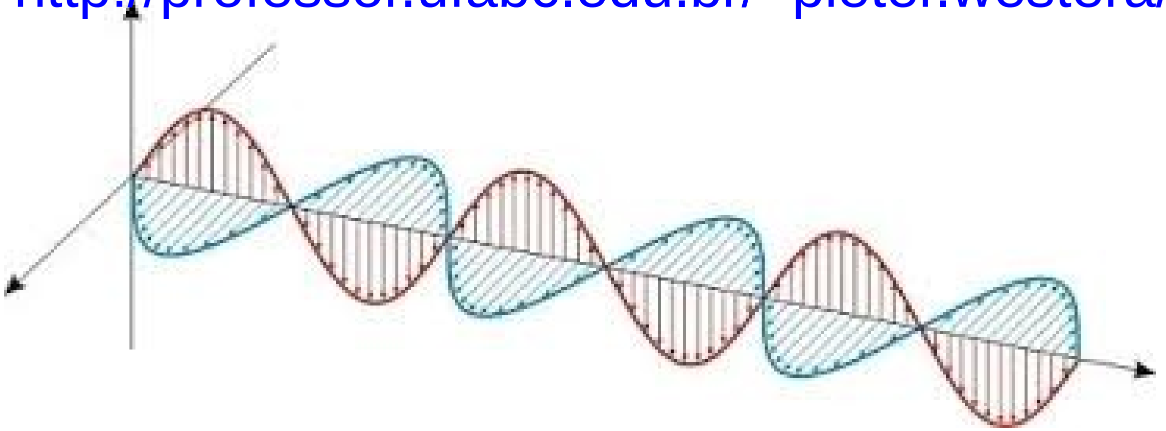
Equações de Maxwell e a Equação de Onda,
Vetor de Poynting,
Energia e Pressão de Radiação

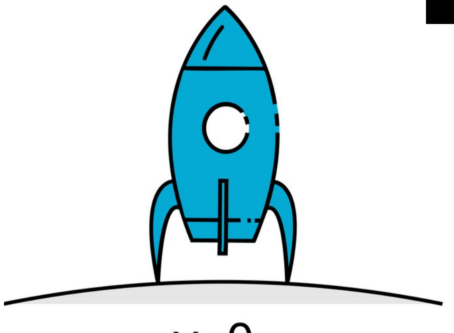




Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html

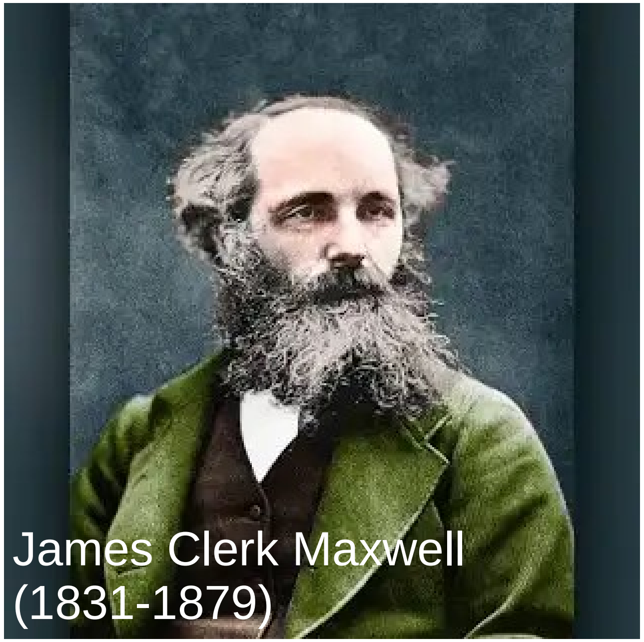




Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell

Em 1861 ou 1862, Maxwell reconheceu, que as duas leis de Gauss, e as de Ampère-Maxwell e de Faraday-Lenz juntas descrevem as interações entre campos elétricos e magnéticos, e permitem previsões como a existência de ondas eletromagnéticas.



Por isto, este conjunto é chamado As Leis de Maxwell ou As Equações de Maxwell.

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0$

Lei de Gauss para o campo magnético: $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$

Lei de Faraday-Lenz: $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$

Lei de Ampère-Maxwell: $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$

Juntas com a fórmula da Força de Lorentz,
$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ as leis de Maxwell
formam o fundamento do eletromagnetismo clássico.

Ondas Eletromagnéticas

Lembrete: Fenômenos Eletromagnéticos

Tabela 11.1 **As equações de Maxwell que descrevem fenômenos eletromagnéticos**

Nome	Equação	Descrição
Lei de Gauss para campos elétricos	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{enc}}{\epsilon_0}$	O fluxo elétrico líquido ao longo de uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica nela contida.
Lei de Gauss para campos magnéticos	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	O fluxo magnético líquido ao longo de uma superfície fechada é sempre nulo (não existem monopolos magnéticos).
Lei de Faraday da indução	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$	Um campo elétrico é induzido por qualquer fluxo magnético variável.
Lei de Maxwell-Ampère	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$	Um campo magnético é induzido por qualquer fluxo elétrico variável ou por uma corrente qualquer.

Força de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ que conecta as equações de Maxwell com as leis do movimento Newtonianas.

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

As leis de Maxwell na forma apresentada nos slides anteriores também são chamadas de Leis de Maxwell na forma integral e tratam de volumes e áreas macroscópicos e seus contornos, superfícies e caminhos fechados.

Dividindo as primeiras duas pelo volume contido e as últimas duas pela área envolvida, cargas e correntes contidas viram densidades médias (por volume ou por unidade de área) de carga, ρ_m ou $\bar{\rho}$, ou de corrente, J_m ou $\bar{J}$, e fluxos de campos viram valores médias destes campos.

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

Fazendo, em seguida, os tamanhos dos volumes e áreas tenderem a zero, densidades e campos médios se tornam densidades e campos locais, ρ, J, **E** e **B**, integrais de linha ao longo de espiras fechadas por unidade de área envolvida se tornam componentes de rotacionais ($\nabla\times$ = ($\partial\square_z/\partial y$-$\partial\square_y/\partial z$, $\partial\square_x/\partial z$-$\partial\square_z/\partial x$, $\partial\square_y/\partial x$-$\partial\square_x/\partial y$), vide FVV) e integrais de superfície sobre superfícies fechadas por unidade de volume envolvido se tornam divergentes ($\nabla\cdot$ = $\partial\square_x/\partial x$ + $\partial\square_y/\partial y$ + $\partial\square_z/\partial z$, tb vide FVV).

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

Assim, elas tratam de propriedades locais dos cargas, correntes e campos e chamamos elas de Leis ou Equações de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto":

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$

Lei de Gauss para o campo magnético: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Lei de Faraday-Lenz: $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$

Lei de Ampère-Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \, \partial \mathbf{E}/\partial t$

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

Assim, elas tratam de propriedades locais dos cargas, correntes e campos e chamamos elas de Leis ou Equações de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto":

Nome	Forma diferencial	Forma integral
Lei de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
Lei de Faraday da indução	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
Lei de Ampère (com a correção de Maxwell)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

Equações de Maxwell

Combinando as Leis de Maxwell na Forma Diferencial

Olhamos para uma região no espaço, onde não há cargas ou correntes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$).
!!! Na vizinhança da região deve ter, sim, cargas e correntes, senão não teria campos elétrico e magnético.
i.e., estamos interessados em como os campos se propagam pelo espaço, e não pelo que gera eles.

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

Lei de Gauss para o campo magnético: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Lei de Faraday-Lenz: $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$

Lei de Maxwell*: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \, \partial \mathbf{E}/\partial t$
*a de Ampère-Maxwell sem a parte Ampère

Equações de Maxwell

Combinando as Leis de Maxwell na Forma Diferencial

Enquanto pela Lei de Faraday, a variação (derivada no tempo) do campo magnético influencia o campo elétrico, pela Lei de Maxwell, a variação do campo elétrico influencia o campo magnético.
Será que, combinando as duas, a variação da variação (segunda derivada no tempo) do campo elétrico influencia nele próprio (e a mesma coisa pro campo magnético)?

Usaremos a identidade $\nabla\times(\nabla\times) = \nabla(\nabla\cdot) - \nabla^2$,
onde ∇ (sem $\cdot$) é o gradiente $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ e ∇^2, o operador laplaciano $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$.
A identidade pode ser comprovada escrevendo os operadores nos seus componentes.

Equações de Maxwell

Combinando as Leis de Maxwell na Forma Diferencial

Tomando o rotacional da Lei de Faraday:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times(-\partial\mathbf{B}/\partial t)$$

$$\Rightarrow \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{E})}_{\substack{=0 \text{ na ausência de cargas,}\\ \text{pela Lei de Gauss p. }\mathbf{E}}} - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} = -\partial/\partial t\ \nabla\times\mathbf{B} \overset{\text{Lei de Maxwell}}{=} -\partial/\partial t\ \mu_0\epsilon_0\ \partial\mathbf{E}/\partial t$$

$$= -\mu_0\epsilon_0\ \partial/\partial t\ \partial\mathbf{E}/\partial t = -\mu_0\epsilon_0\ \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$$

$$\Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} - \mu_0\epsilon_0\ \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = 0$$

e tomando o rotacional da Lei de Maxwell:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla\times(\mu_0\epsilon_0\ \partial\mathbf{E}/\partial t)$$

$$\Rightarrow \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{B})}_{=0 \text{ pela Lei de Gauss p. }\mathbf{B}} - \nabla^2\mathbf{B} = -\nabla^2\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\ \partial/\partial t\ \nabla\times\mathbf{E} \overset{\text{Lei de Faraday}}{=} \mu_0\epsilon_0\ \partial/\partial t\ (-\partial\mathbf{B}/\partial t)$$

$$= -\mu_0\epsilon_0\ \partial/\partial t\ \partial\mathbf{B}/\partial t = -\mu_0\epsilon_0\ \partial^2\mathbf{B}/\partial t^2$$

$$\Rightarrow \nabla^2\mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\ \partial^2\mathbf{B}/\partial t^2 = 0$$

Ondas Eletromagnéticas

$\nabla^2\mathbf{E} - \mu_0\epsilon_0\, \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = 0$, $\quad \nabla^2\mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\, \partial^2\mathbf{B}/\partial t^2 = 0$

!!! São justamente equações de onda, com
$v = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} =: c = 2.997\,92\cdot 10^8$ m/s

As equações de Maxwell prevêem a existência de ondas de campos elétricos e magnéticos propagando-se com velocidade c, que é justamente a velocidade da luz, um indício, de que a luz poderia ser uma destas ondas, o que é correto.

Chamamos elas de ondas eletromagnéticas.

Elas não precisam de um meio para se propagar e a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais, o que foi descoberto por Michelson e Morley (1997) e é explicado na teoria da Relatividade (Einstein, 1905, 1905 => aulas mais pra frente).

Ondas Eletromagnéticas

Como são estes Campos **E** e **B**?

Isto é, escolhendo o eixo +*z* na direção da propagação, **E** e **B** podem ser na qualquer direção, e ter qualquer valor?

Se a propagação é na direção *z*, os campos não variam nas direções *x* e *y* => $\partial E_{x/y/z}/\partial x = 0$, $\partial B_{x/y/z}/\partial y = 0$

Assim, as leis de Maxwell se tornam:

$\nabla\cdot\mathbf{E} = \cancel{\partial E_x/\partial x} + \cancel{\partial E_y/\partial y} + \partial E_z/\partial z = 0 \Rightarrow \partial E_z/\partial z = 0$

$\nabla\cdot\mathbf{B} = \cancel{\partial B_x/\partial x} + \cancel{\partial B_y/\partial y} + \partial B_z/\partial z = 0 \Rightarrow \partial B_z/\partial z = 0$

$\nabla\times\mathbf{E} = (\cancel{\partial E_z/\partial y}-\partial E_y/\partial z,\ \partial E_x/\partial z-\cancel{\partial E_z/\partial x},\ \cancel{\partial E_y/\partial x}-\cancel{\partial E_x/\partial y})$

$= -\partial\mathbf{B}/\partial t = (-\partial B_x/\partial t,\ -\partial B_y/\partial t,\ -\partial B_z/\partial t) \Rightarrow \partial B_z/\partial t = 0$

$\nabla\times\mathbf{B} = (\cancel{\partial B_z/\partial y}-\partial B_y/\partial z,\ \partial B_x/\partial z-\cancel{\partial B_z/\partial x},\ \cancel{\partial B_y/\partial x}-\cancel{\partial B_x/\partial y})$

$= \mu_0\epsilon_0\ \partial\mathbf{E}/\partial t = \mu_0\epsilon_0(\partial E_x/\partial t,\ \partial E_y/\partial t,\ \partial E_z/\partial t) \Rightarrow \partial E_z/\partial t = 0$

Ondas Eletromagnéticas

Como são estes Campos **E** e **B**?

Resumindo: $\partial E_z/\partial z$, $\partial B_z/\partial z$, $\partial B_z/\partial t$ e $\partial E_z/\partial t$ são zero.

=> E_z e B_z são constantes em z e t. Seria estranho se fossem constantes diferentes de zero => $E_z = B_z = 0$
=> **E**, **B** $\perp$ z (à direção de propagação).
Podemos escolher as direções dos eixos x e y tal, que **E** é na direção x => $E_y = 0$.

Os demais componentes das leis de Faraday e Maxwell:
$-\partial E_y/\partial z = 0 = -\partial B_x/\partial t$ => $B_x = 0$ => **B** é na direção y
$\partial E_x/\partial z = -\partial B_y/\partial t$
$-\partial B_y/\partial z = \mu_0\epsilon_0\partial E_x/\partial t = c^{-2}\partial E_x/\partial t$ e
$\partial B_x/\partial z = \mu_0\epsilon_0\partial E_y/\partial t = 0$ => $B_x = 0$ (tb.)

Ondas Eletromagnéticas

Como são estes Campos **E** e **B**?

Propagação na direção +z, **E** na direção +x, **B** na direção y,
$\partial E_x/\partial z = -\partial B_y/\partial t$,
$-\partial B_y/\partial z = c^{-2}\partial E_x/\partial t$

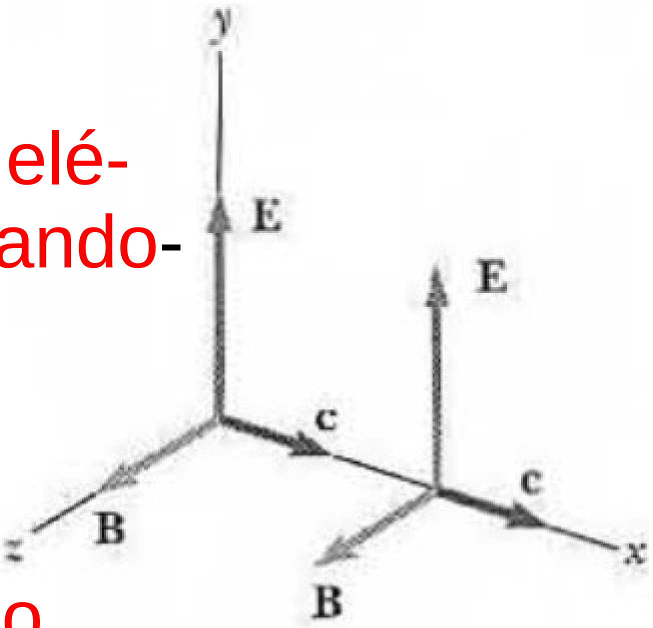
Definindo $\eta = z - ct$ => $dz = d\eta$, $dt = -1/c \cdot d\eta$

=> $\partial E_x/\partial\eta = -\partial B_y/(-1/c \cdot d\eta) = c\partial B_y/d\eta$
$-\partial B_y/\partial\eta = c^{-2}\partial E_x/\partial t(-1/c \cdot d\eta) = -c^{-1}\partial E_x/\partial\eta$

Pelas duas equações: $\partial E_x = c\partial B_y$ => $B_y = c^{-1}E_x$ + const.
Já que queremos que os campos oscilam em torno de zero, const. = 0 => $B_y = |\mathbf{B}| = c^{-1}E_x = c^{-1}|\mathbf{E}|$

Ondas Eletromagnéticas

Resumo do Resultado



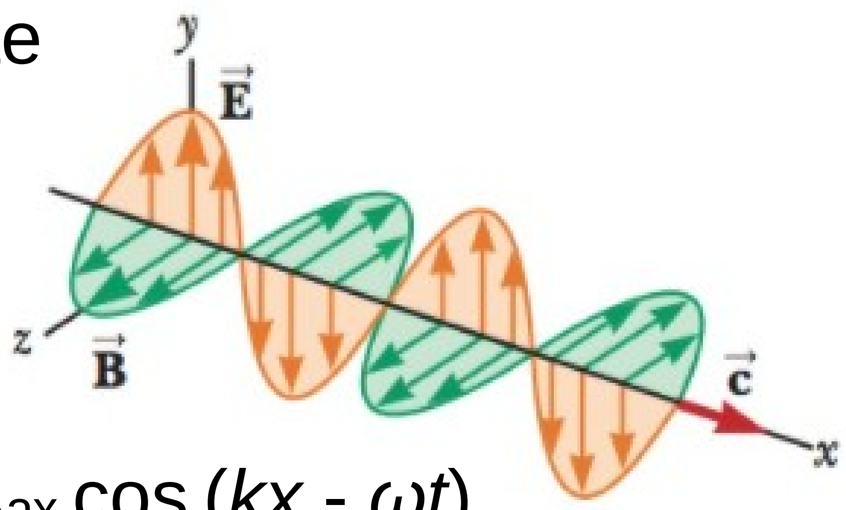
Ondas Eletromagnéticas são campos elé-tricos e magnéticos oscilantes propagando-se pelo espaço com velocidade **c**.

São ondas transversais, i.e.,
a direção dos campos é
perpendicular à direção de propagação.

Os campos elétrico e magnético também são perpendiculares entre si,
a propagação é na direção $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$
e $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$.
e $\mathbf{B} = 1/c \cdot \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}$,
onde $\hat{\mathbf{v}}$ é o vetor unidade na direção da propação da onda.

Ondas Eletromagnéticas

Um exemplo simples e frequente
são ondas senoidais,
ou harmônicas:



$$E(x, t) = E_{max} \cos(k(x - ct))$$
$$= E_{max} \cos(kx - \omega t)$$
$$B(x, t) = B_{max} \cos(k(x - ct)) = B_{max} \cos(kx - \omega t),$$

onde E_{max} e B_{max} são as amplitudes dos campos elétrico e magnético.

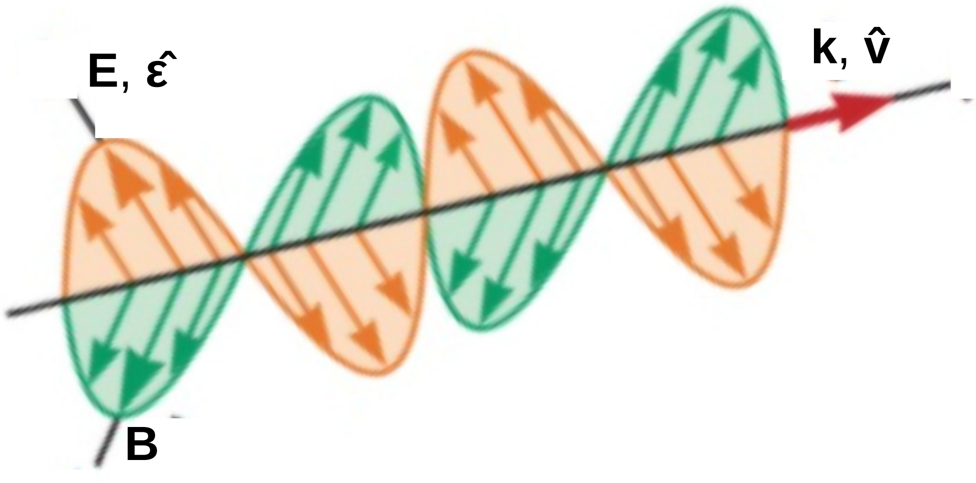
Valem as relações
$c = \lambda f = \omega/k$
$E/B = c$ (em particular $E_{max}/B_{max} = c$)

https://www.youtube.com/watch?v=aJqKlTMgNEA

Ondas Eletromagnéticas

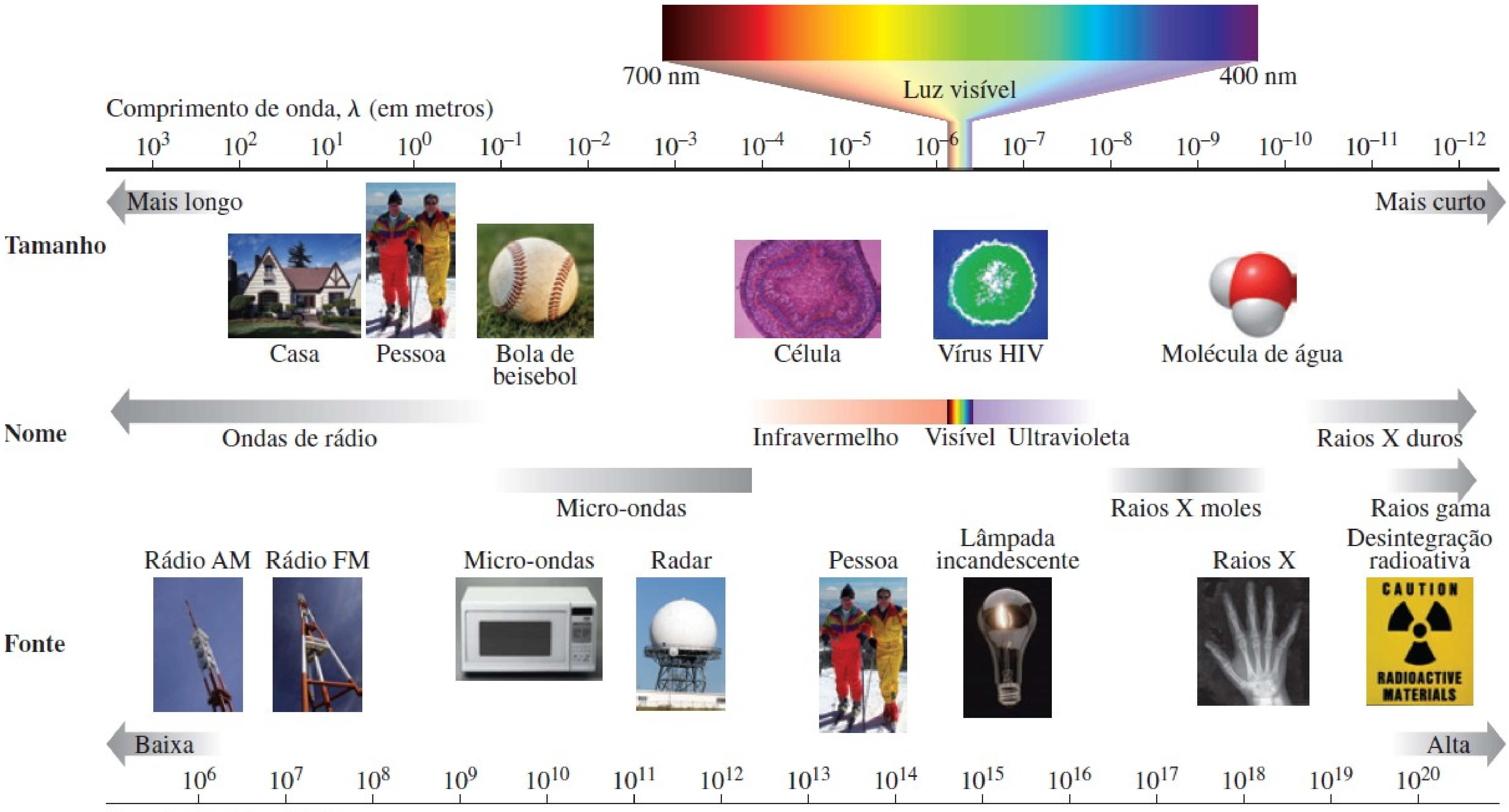
Uma onda eletromagnética plana propagando-se numa direção qualquer $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{k}/k$ e com polarização linear (direção do campo elétrico) na direção $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (versor polarização) pode ser escrito:

$\mathbf{E} = E_{max}\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi) = E_{max}\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{Re}\{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi)}\}$,
$\mathbf{B} = 1/c \cdot \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}$
vale $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\hat{\mathbf{v}} = 0$



Ondas Eletromagnéticas

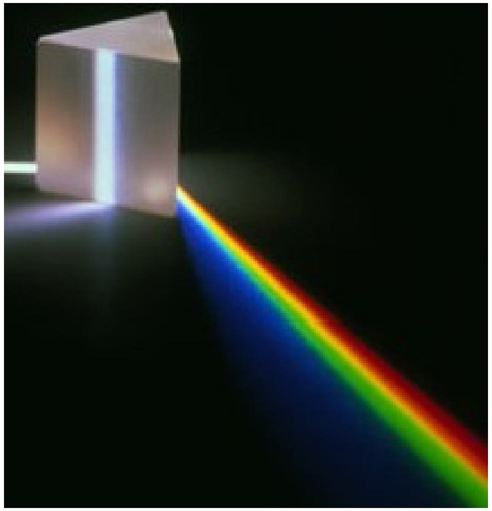
Espectro Eletromagnético



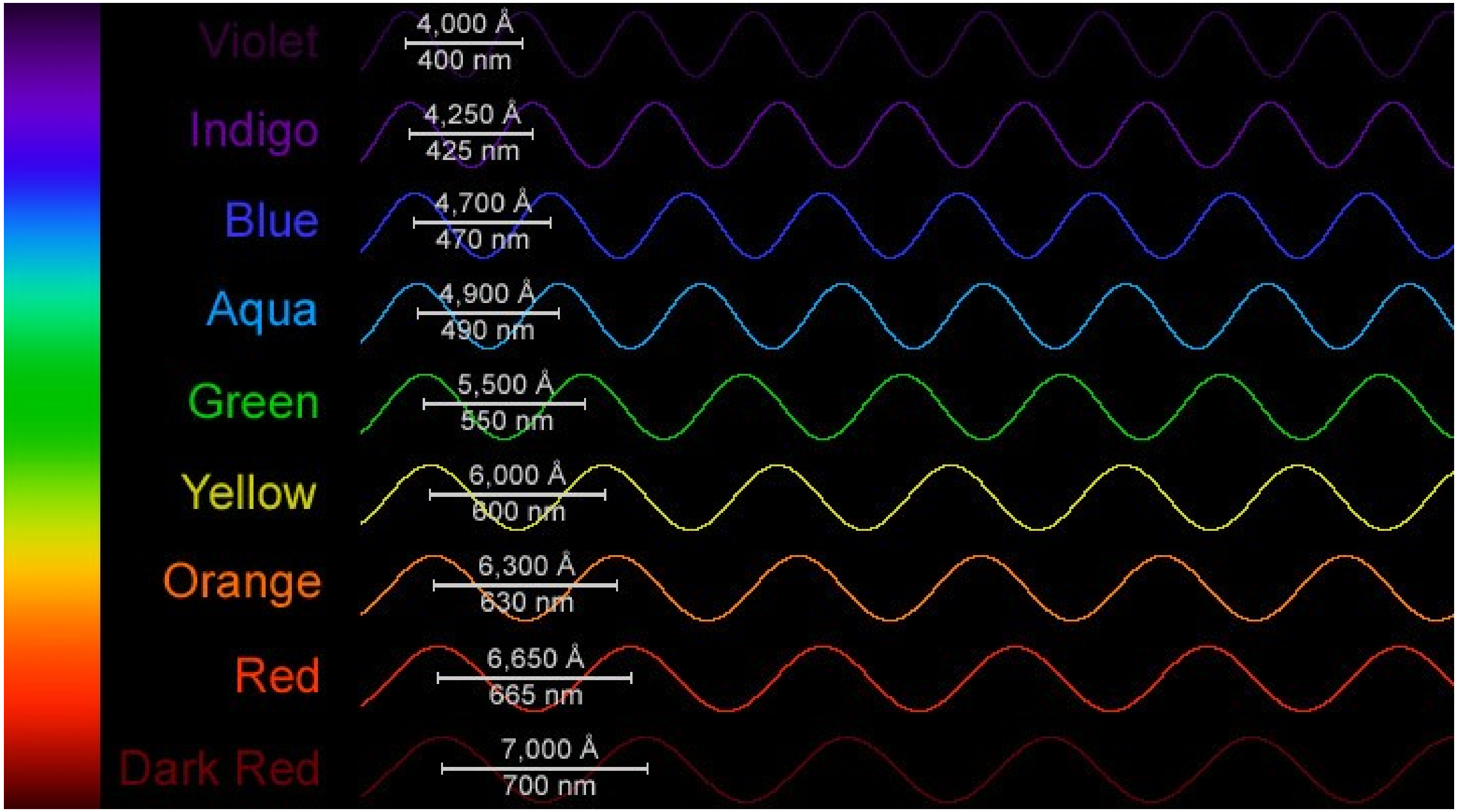
https://www.youtube.com/watch?v=-C2erXakQIQ

Ondas Eletromagnéticas

Dispersão



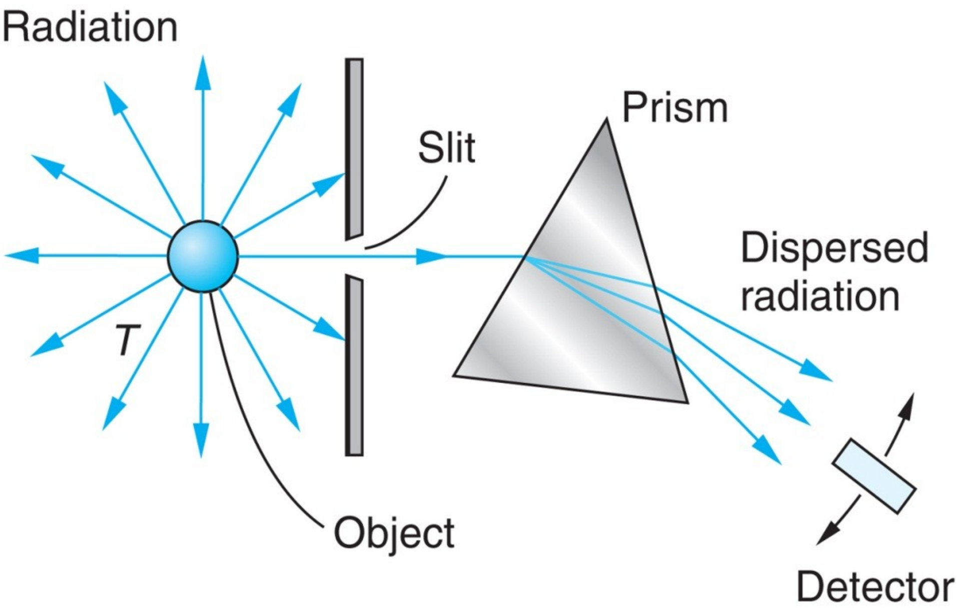
Efeito de dispersão da luz branca:
Separação dos diversos comprimentos de onda por um prisma (meio dispersor)



Ondas Eletromagnéticas

Como é feita uma medida do espectro luminoso de um objeto

Como veremos, em breve, a refração da luz depende do comprimento de onda, assim temos o efeito de dispersão cromática.

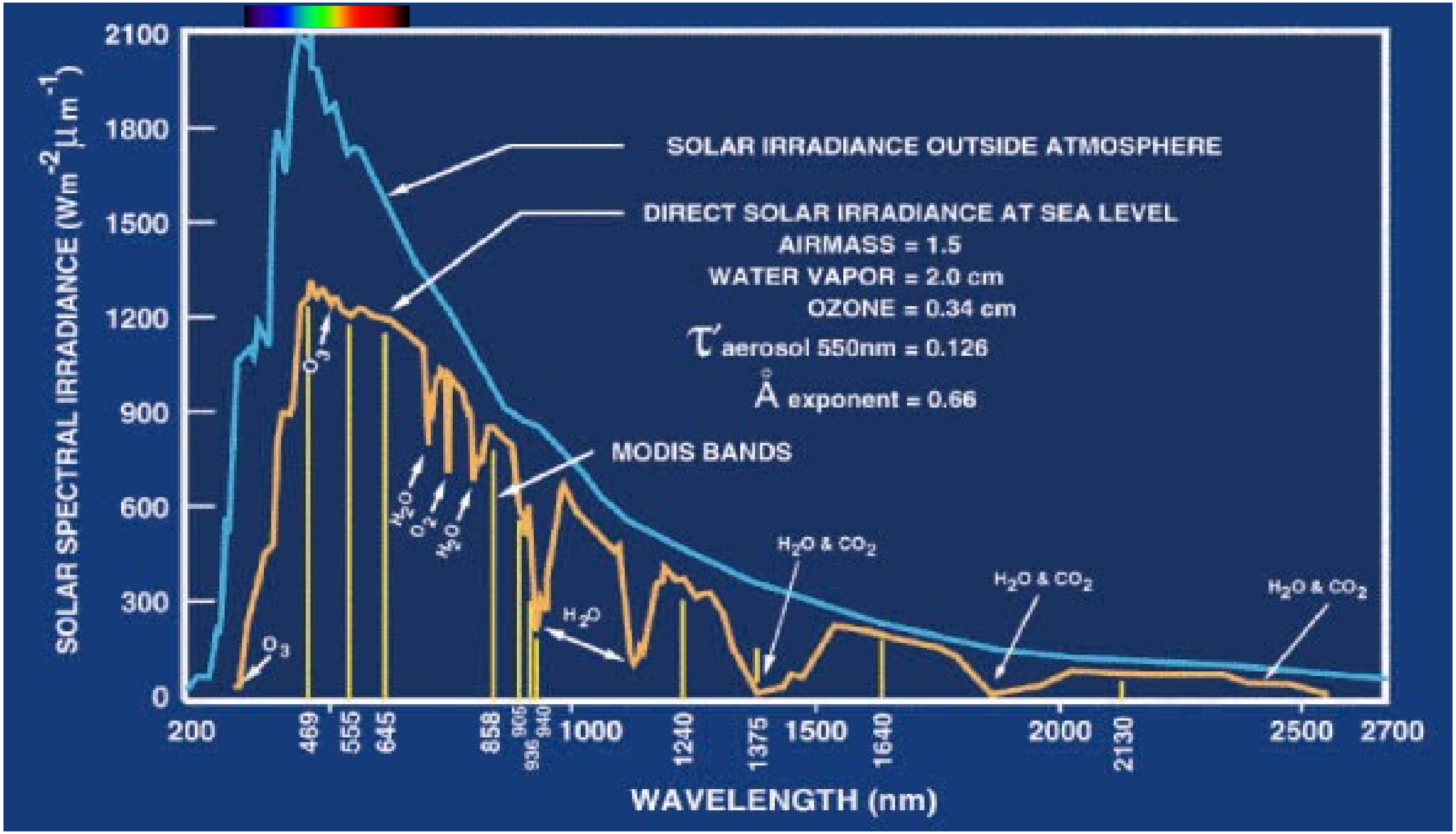


Convertemos a informação de comprimento de onda em distância em um dispositivo como este.

Ondas Eletromagnéticas

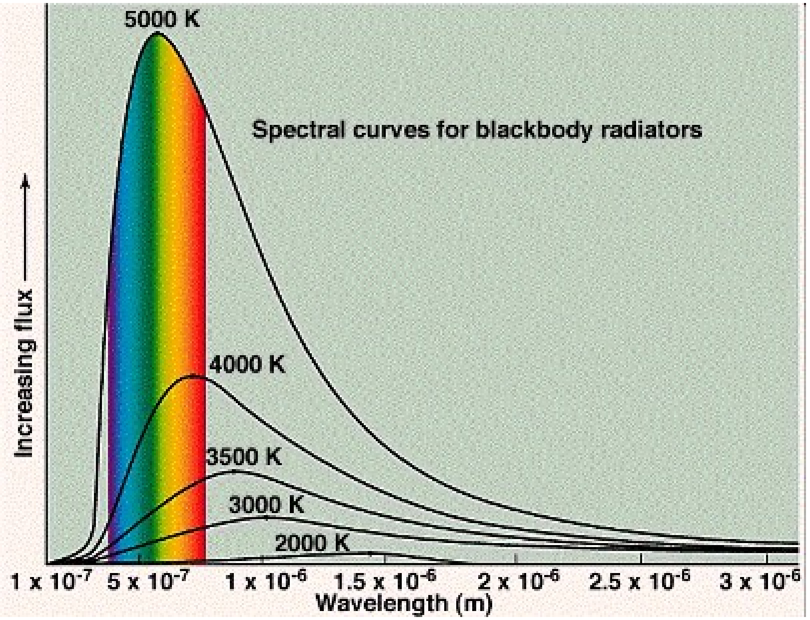
Luz do sol

A atmosfera também é um meio dispersivo…



Ondas Eletromagnéticas

Radiação de Corpo Negro



Qualquer corpo emite radiação relacionada a sua temperatura, radiação térmica.
O ser humano, por exemplo, emite no infravermelho.

Um corpo ideal que absorve toda a radiação eletromagnética que incide sobre e a reemite em um perfeito espectro térmico, é chamado de Corpo Negro.

Este é tratado em Física Quântica.

Ondas Eletromagnéticas

Ondas de Rádio e Micro-ondas

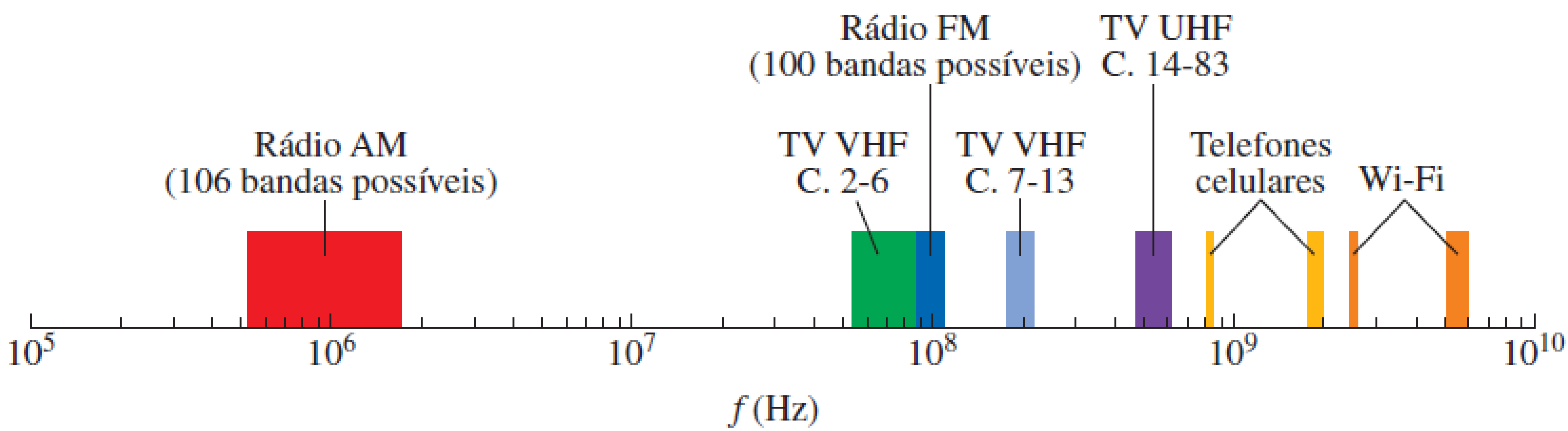


Figura 11
res e sist

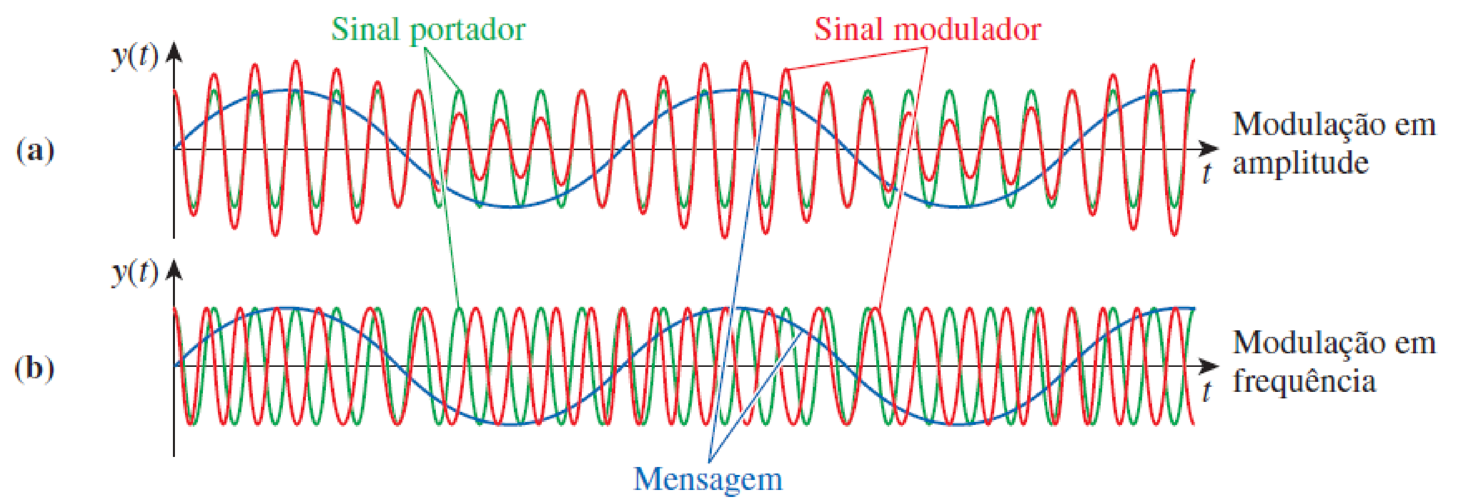


Figura 11.12 (a) Modulação de amplitude. (b) Modulação de frequência. Em ambos os casos, a curva verde representa um sinal portador, a curva vermelha o sinal modulado e a curva azul representa a informação que é transmitida.

Ondas Eletromagnéticas

Energia em uma Onda Eletromagnética

Quanta energia transporta uma onda eletromagnética?

Supondo uma onda plana com amplitudes E_{max} e $B_{max} = E_{max}/c$,
Não faz muito sentido perguntar pela energia total transportada pela onda, já que uma onda plana ideal preenche o espaço inteiro.
Faz mais sentido perguntar: Quanta energia por unidade de área transversal e tempo, chamado intensidade ou fluxo de energia ela transporta?

Calculando a energia em um volume de área transversal A e "comprimento" (na direção do propagação da onda) λ:
$U = \int_V u\, dV = \int_0^\lambda u_E + u_B\, A dx = A\int_0^\lambda u_E + u_B\, dx$

Ondas Eletromagnéticas

Energia em uma Onda Eletromagnética

Lembrete (Fenômenos Eletromagnéticos):
$u_E = ½\epsilon_0 E^2$, $u_B = 1/2\mu_0\, B^2 = 1/2\mu_0 c^2\, E^2 = ½\epsilon_0 E^2$
!!! As densidades de energia nos campos elétrico e magnético numa onda eletromagnética plana são iguais!

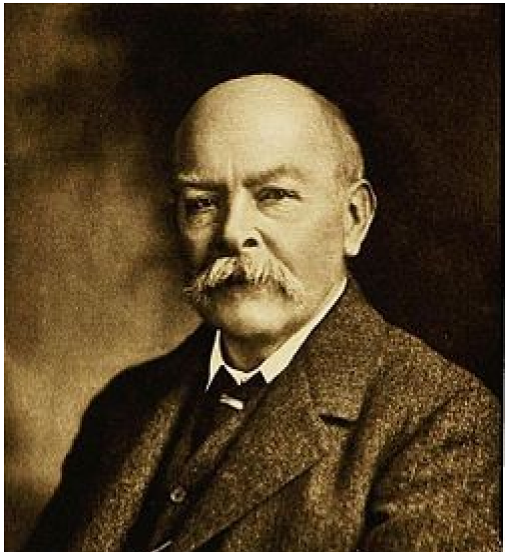
$\Rightarrow U = A\int_0^\lambda 2\cdot ½\epsilon_0 E^2\, dx = A\epsilon_0\int_0^\lambda (E_{max} \cos(2\pi x/\lambda - \omega t + \varphi))^2\, dx$
$\quad = A\epsilon_0 E_{max}^2 \int_0^\lambda (\cos(2\pi x/\lambda - \omega t + \varphi))^2\, dx$
Já cansamos da integral de cos² sobre um c.d.o. ($\lambda/2$):
$\Rightarrow U = ½A\epsilon_0 E_{max}^2\lambda$

Já que isto é a energia que atravessa A durante um período (o tempo de a onda percorrer λ), o fluxo será
$I = U/AT = \langle u \rangle = ½\epsilon_0 E_{max}^2\lambda/T = ½c\epsilon_0 E_{max}^2$

Ondas Eletromagnéticas

Vetor de Poynting

Definimos como vetor de Poynting
$\mathbf{S} \equiv 1/\mu_0 \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}$
Obviamente, **S** é na direção da propagação da onda.
Já que $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, o módulo de **S** será o produto dos módulos,
$S = 1/\mu_0 \cdot E{\cdot}B = 1/\mu_0 \cdot E \cdot E/c = c\epsilon_0 E^2$,
exatamente a densidade de energia total da onda u

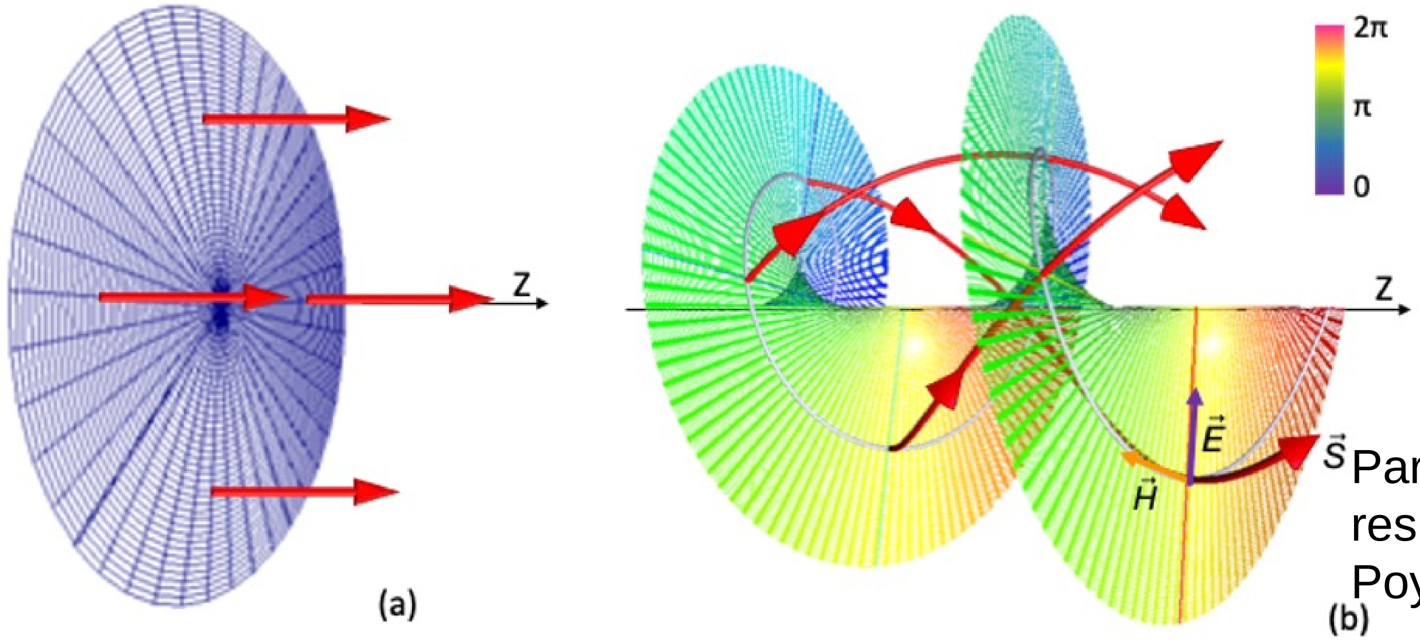

John Henry Poynting
(1852-1914)

=> **S** é a densidade direcional do fluxo de energia, e
$I = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{max}^2$

!!! Para ondas não-planas, o cálculo é menos simples

Ondas Eletromagnéticas

Vetor de Poynting



Para ondas não planas, o resultado do vetor de Poynting não é tão trivial

Figura 1 - A figura representa a configuração da superfície da frente de onda de: (a) uma onda plana que possui o mesmo valor de fase e vetores de Poynting (em vermelho) paralelos à direção de propagação, (b) uma frente de onda com momento angular orbital que evidencia a variação de fase da frente de onda e mostra o vetor de Poynting (em vermelho) precessionando em torno do eixo de propagação.

Ondas Eletromagnéticas

Pressão de Radiação da Luz

Radiação eletromagnética não tem só energia U, mas também momento linear (na direção da propagação) **p**.

O módulo deste momento linear é $p = U/c$
(=> parte Relatividade, para fótons já conhecemos esta relação de física quântica, e radiação consiste de fótons)

Se radiação de intensidade I incide por um tempo Δt em uma superfície de área A, tal que um montante de energia $\Delta U = IA\Delta t$ é absorvida, a radiação também transfere momento $\Delta p = \Delta U/c$.

=> Força aplicada pela radiação na superfície:
$F = \Delta p/\Delta t = \Delta U/c\Delta t = IA\Delta t/c\Delta t = IA/c$

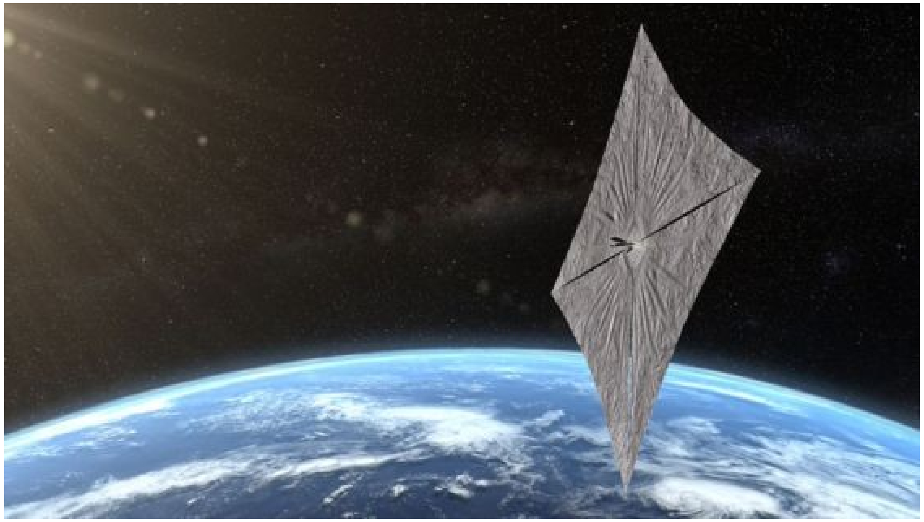
Ondas Eletromagnéticas

Pressão de Radiação da Luz

$F = IA/c$

Isto exerce uma pressão
$P_r = F/A = I/c$

Caso a radição não é absorvida, mas refletida, a pressão da radiação é o dobro deste valor, $P_r = 2I/c$.



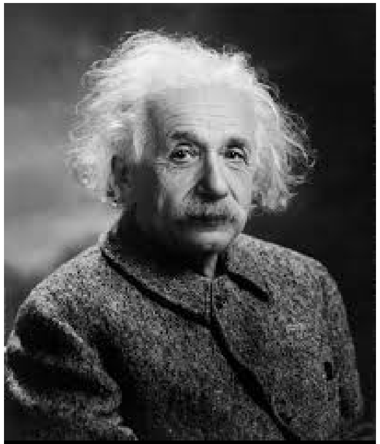
Proposta de "velas solares"

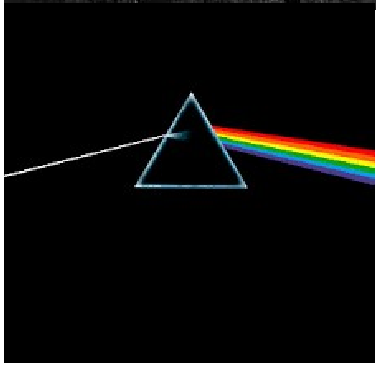
A ideia de velas solares se baseia em usar esta pressão para "velejar na radiação solar".

A pressão da radiação solar na vizinhança da Terra é
$I/c \approx 1400\ \mathrm{W/m^2} / 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} = 4.67 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2} = 4.67\ \mu\mathrm{Pa}$.

Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade





FIM PRA HOJE