



Universidade Federal do ABC

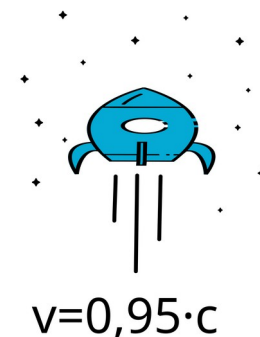
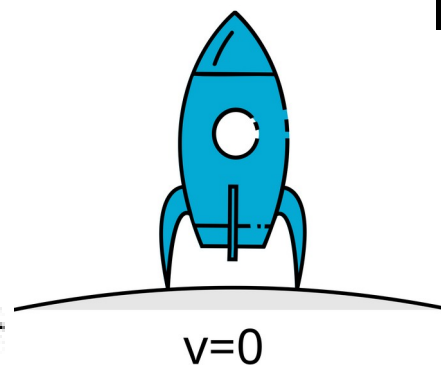
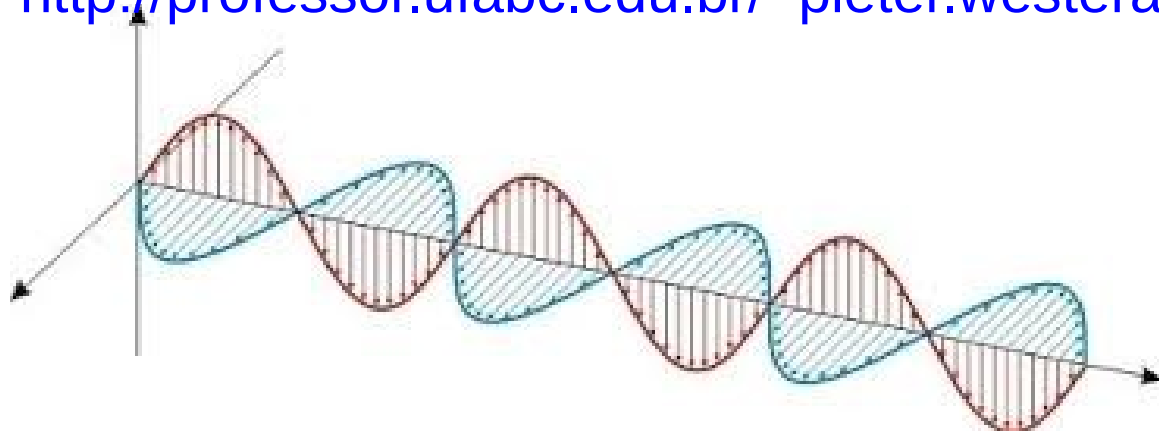
Ótica e Relatividade

13. Transformações de Lorentz, Diagramas de Espaço-Tempo (Espaço-Tempo de Minkowski), Relatividade da Simultaneidade

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



Os Postulados de Einstein

Terminamos a última aula com os **postulados** de Einstein para a nova teoria:

- **O Princípio da Relatividade**: As **leis** da **física** são as **mesmas** em **todos** os **sistemas** de **referência inerciais**.
- **A Constância** (melhor: invariância) **da Velocidade da Luz**: A **luz** se movimenta pelo vácuo com uma **velocidade constante** c , que é **independente** do **movimento** da **fonte** da luz, ou do **observador**.

Outra condição:

- **Princípio de correspondência**: Para **velocidades baixas**, $u \ll c$, a nova teoria deve tender à **teoria newtoniana**.

=> Encontrar novas **Transformações** que garantem isto.

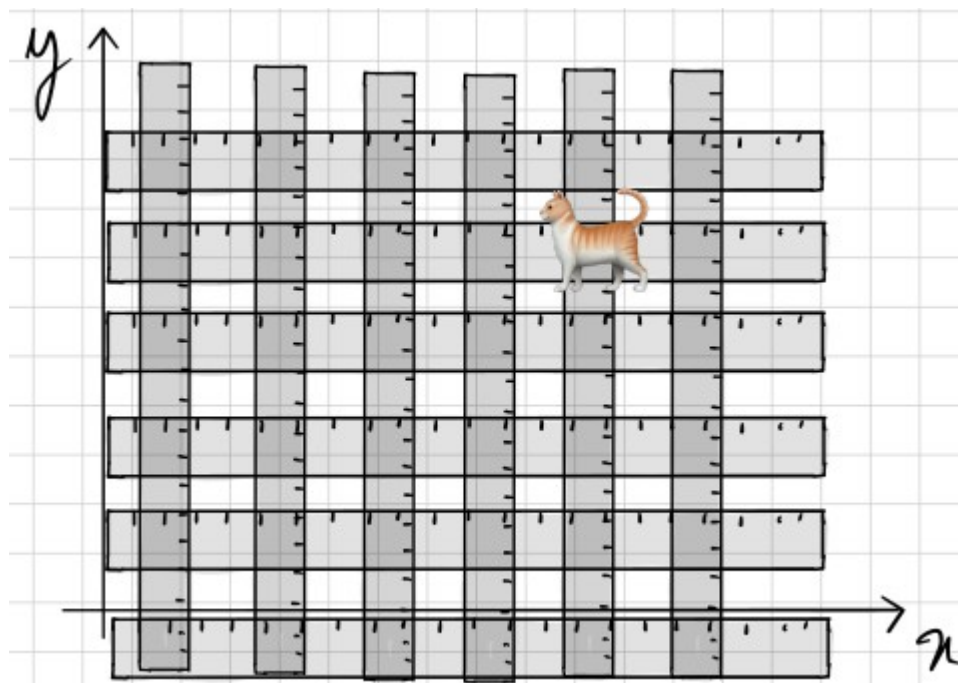
Sistemas de Referência

Primeiro temos que descobrir as novas **propriedades** de **sistemas referenciais**, especialmente das **relações** entre eles.

Como veremos, isto leva a **abandonar conceitos** como **espaço**, **tempo** e **simultaneidade absolutos**.

Para as **componentes espaciais** de um sistema podemos continuar usando **geometria euclidiana** e, por exemplo, coordenadas cartesianas x e y (e z , aqui omitida).

Dada uma rede de barras rígidas preenchendo o espaço, a **posição** de qualquer **objeto** pode ser determinada diretamente, por meio de **observações locais**.

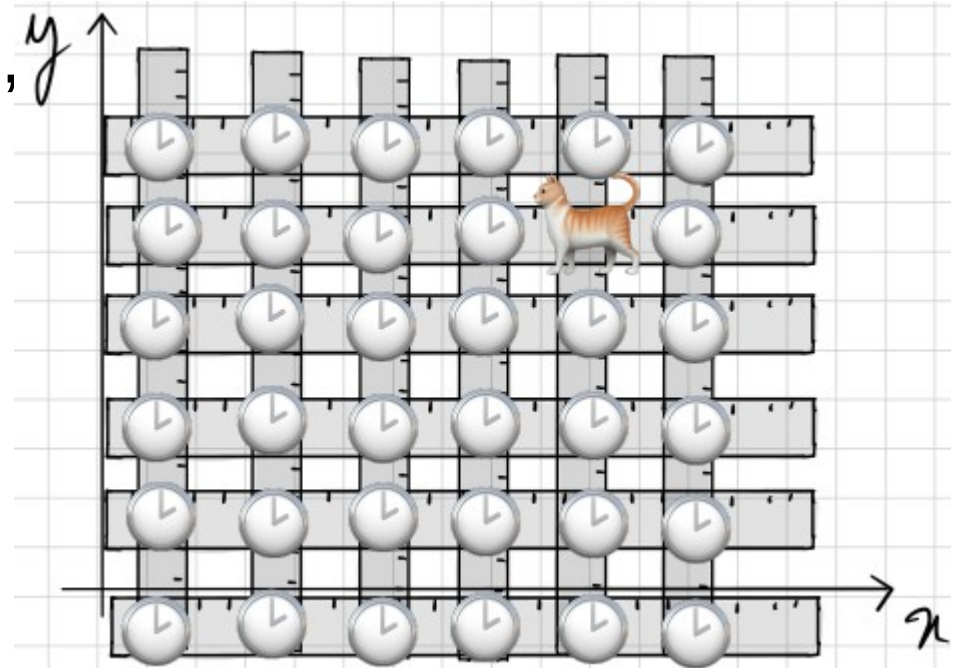


Sistemas de Referência

Para medir também o **tempo**, podemos pensar em colocar um **relógio** em **cada ponto** do **espaço**.

O **tempo** em que um dado **evento** ocorre (por exemplo, o gato mia) pode ser obtido também por **observações locais**,

observando o tempo marcado pelo **relógio** no **mesmo local** do evento.



Sistemas de Referência

Aí já surge um problema:
Estando em **outra posição**
do gato, como saber, **quando**
ele miou?

A **imagem** dele miando **leva**
um **tempo** para chegar
(e o som ainda mais).

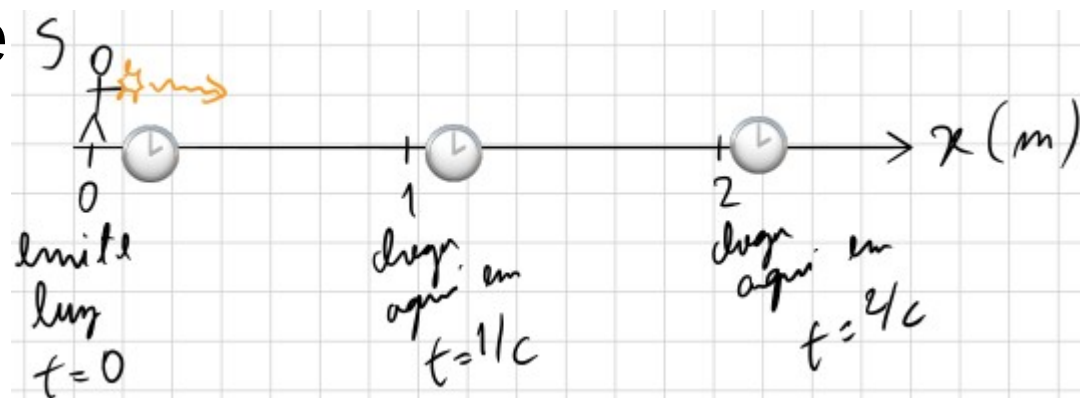


Mas com a **rede** de **relógios** é só olhar pro **relógio** que
estava na **mesma posição** que o gato.
Obviamente, os **sinais** dele abrindo a boca e do relógio
levam o **mesmo tempo** para chegar, já que partiram da
mesma posição.

Sistemas de Referência

Mas como, na prática, se **sincroniza** os relógios?

Pode ser usando **sinais de luz**, já que **conhecemos** a **velocidade** destes, c .



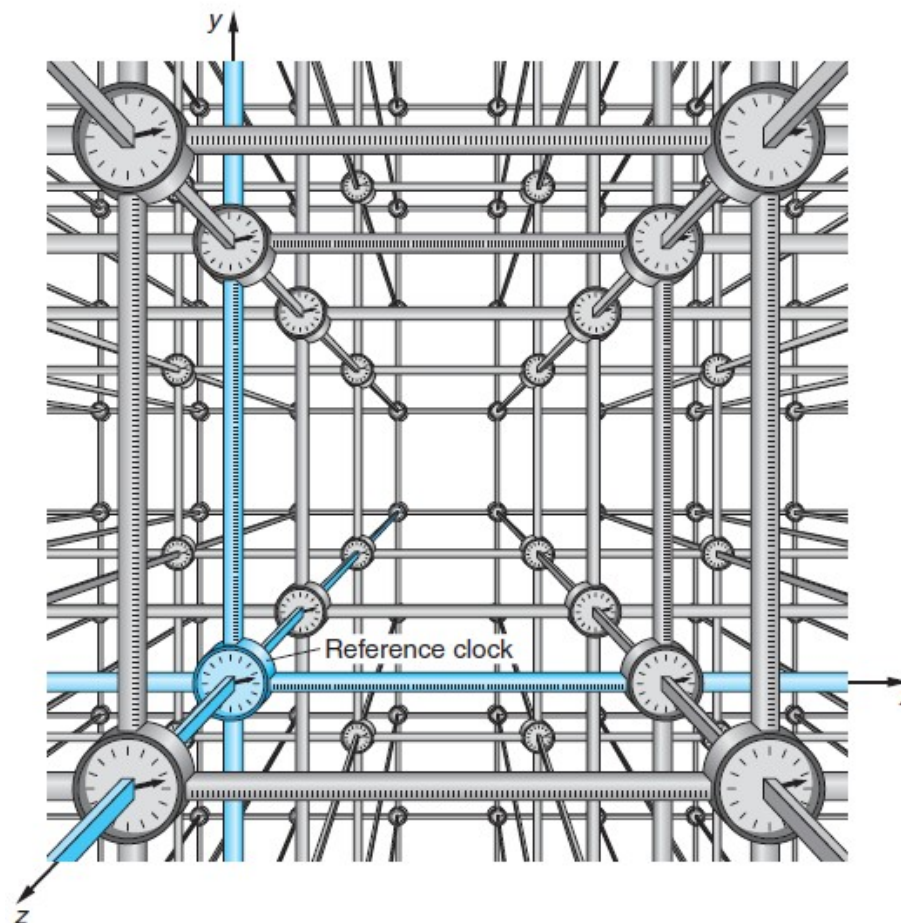
Podemos **disparar** um **sinal** em $t = 0$ numa **posição conhecida**, e o colega numa **outra posição conhecida** (numa **distância conhecida** da primeira posição $\Delta r = |\Delta \mathbf{r}|$), ao **receber** o sinal, saberá, **quando** o sinal foi **emitido** ($\Delta r/c$ antes) e conseguirá **sincronizar** o relógio na **posição** dele com o **primeiro**.

Sistemas de Referência

Assim, por **operações locais**, conseguimos construir uma **rede de relógios sincronizados**, todos mostrando o **tempo do sistema de referência**.

Parece óbvio, mas como já vamos ver, este **tempo** vale **apenas** para **este referencial**.

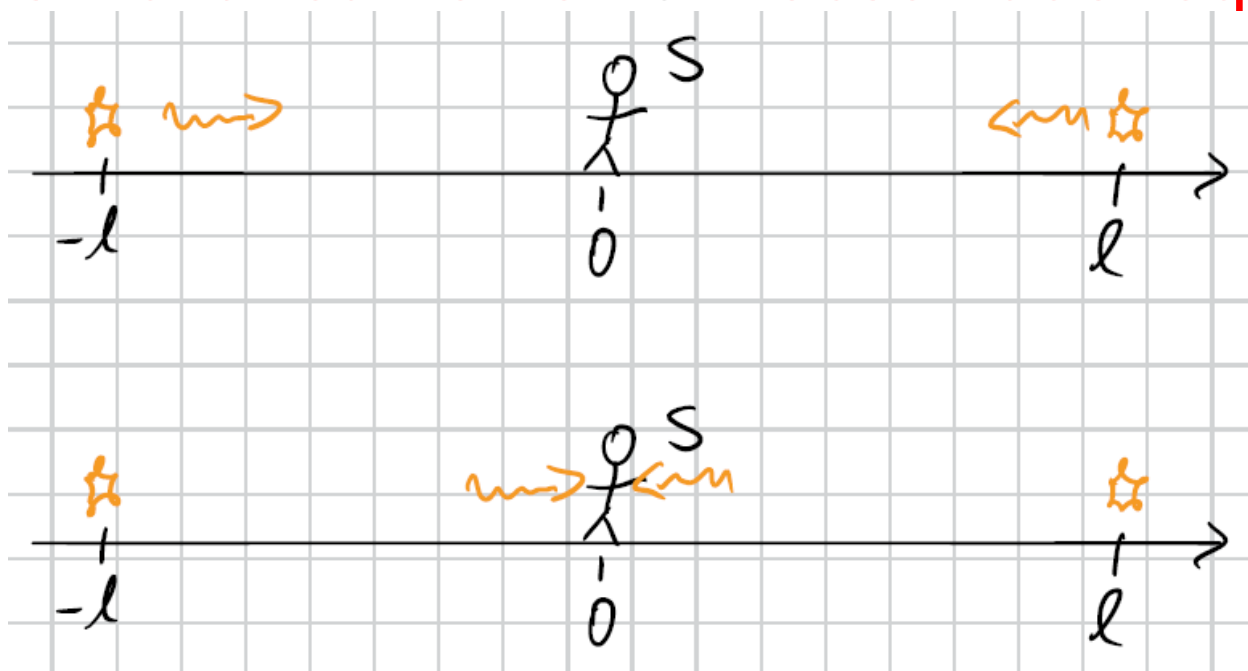
Para entender melhor, que o **conceito de tempo depende do referencial**, olhamos, se, caso eventos ocorrem **simultaneamente** em **um referencial**, também o fazem em algum **outro**.



A Relatividade da Simultaneidade

Como **determinar**, se **dois sinais** foram **disparados** ao **mesmo tempo** ou não?

Uma condição que faz sentido é "se eles **chegam simultaneamente** num **observador equidistante** S ".



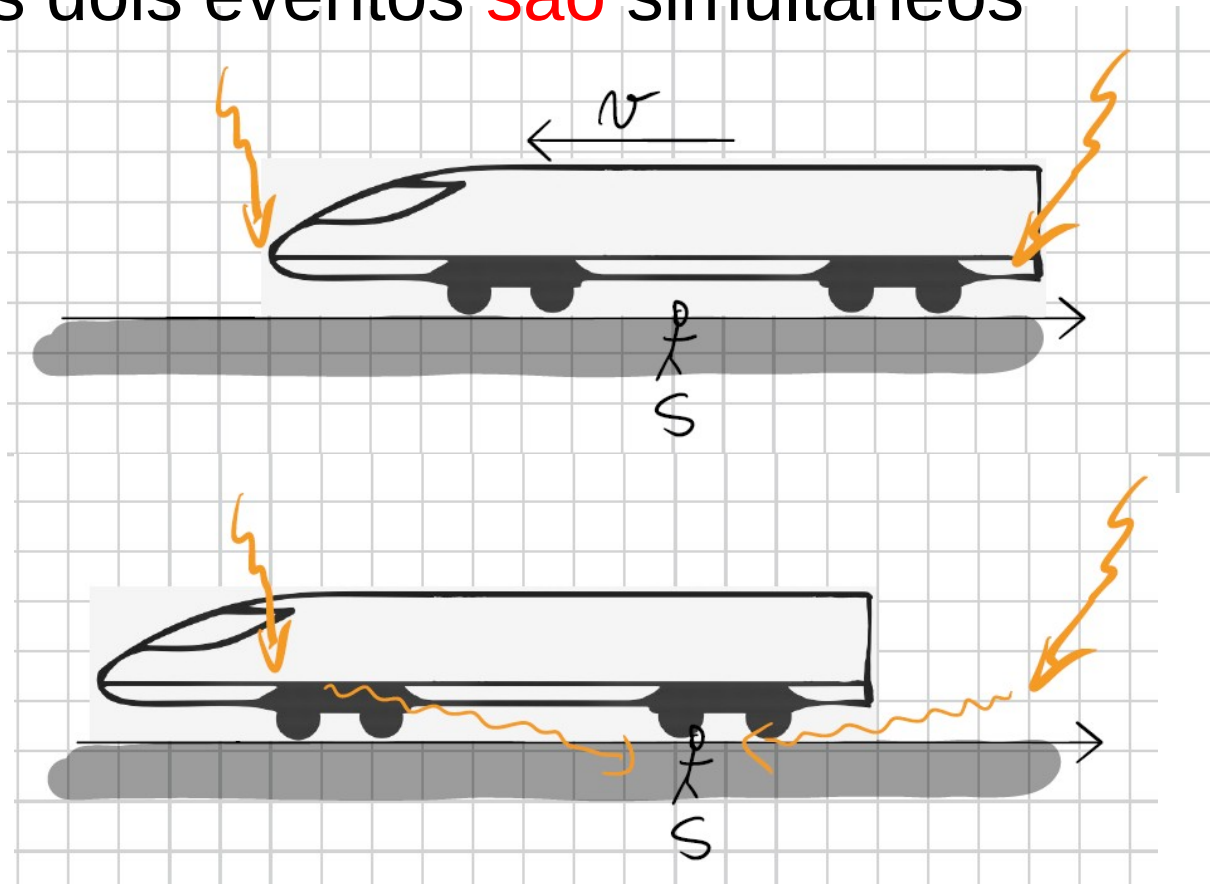
E para um **observador** S' , que está em **movimento** em **relação** a S ?

A Relatividade da Simultaneidade

Olhando para dois **raios** caindo nas **extremidades** de um **trem** que **passa** um **observador** como neste desenho.

No **referencial S** os dois eventos **são** simultâneos

(**chegam** a ele no **mesmo instante**).

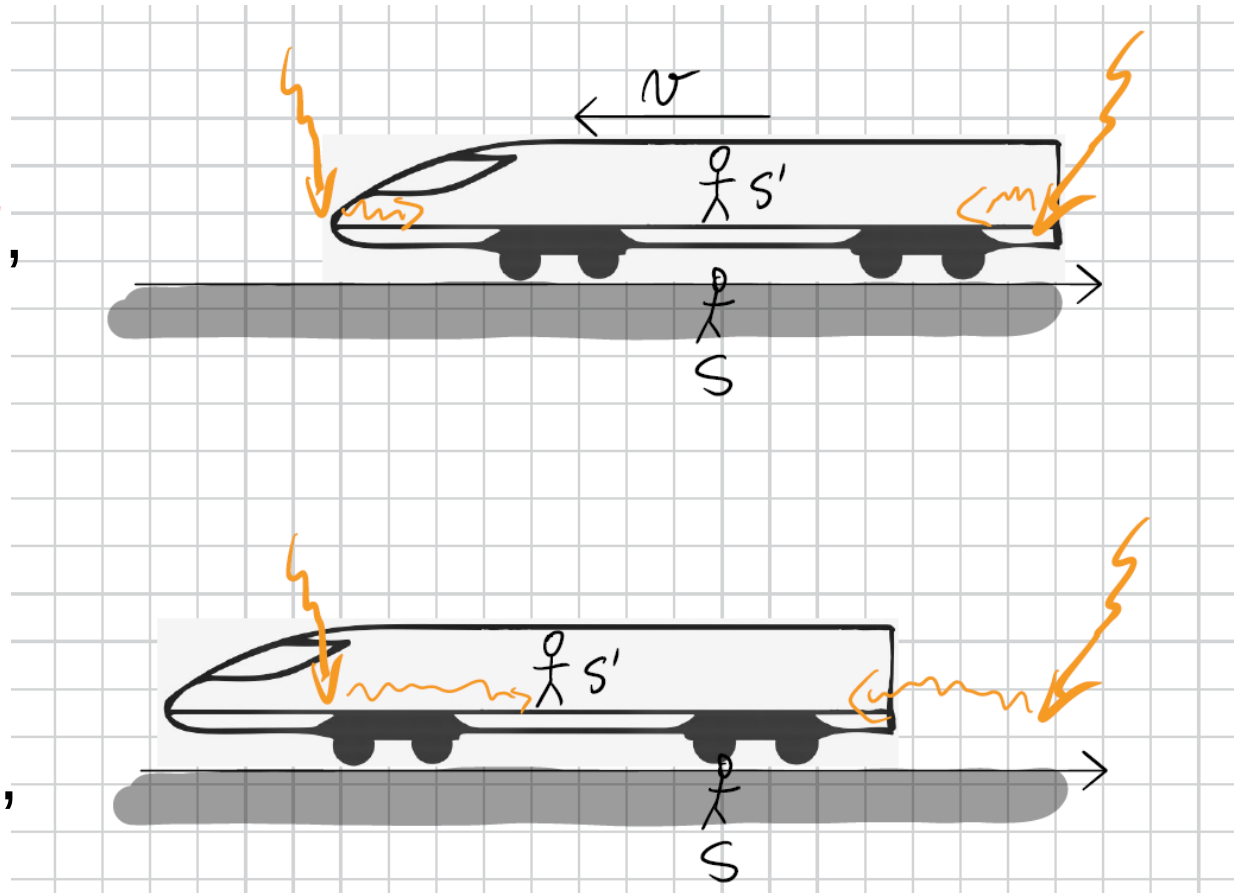


A Relatividade da Simultaneidade

Porém, ao **observador** no **trem**, S' , os **sinais** dos dois eventos **não** chegam no **mesmo instante**, apesar de a posição dele ter coincidido com a de S no momento que, para S , os dois eventos ocorreram.

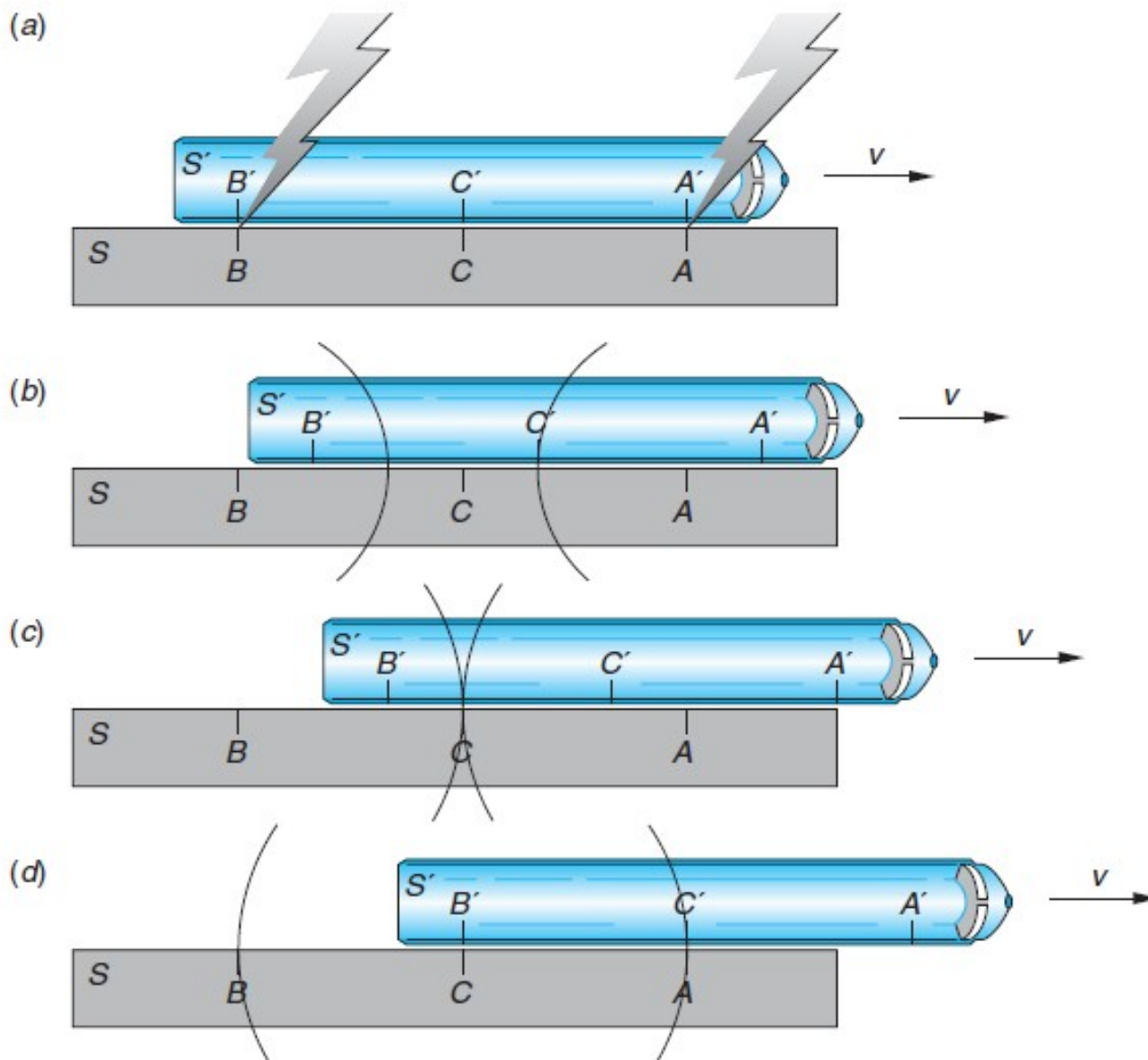
No **referencial** de S' , os dois eventos **não** são **simultâneos**.

Simultaneidade é **relativa**, então os conceitos de **tempo**, também, $t \neq t'$.



A Relatividade da Simultaneidade

Outra representação deste experimento mental, muito famoso (Aqui, S e S' se chamam C e C').



A Transformação de Lorentz

É útil introduzir o **Diagrama Espaço-Tempo**

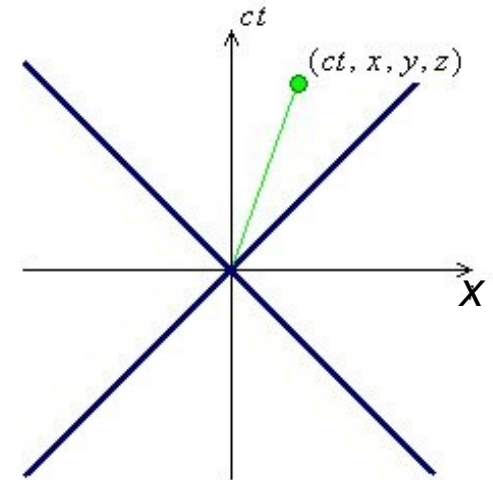
eixo **horizontal**: x

eixo **vertical**: t , multiplicado pela velocidade da luz, c , para que os eixos tenham as mesmas unidades (de distância).

y e z são **ignorados**, já que tudo que é interessante acontece nas dimensões x e t .

!!! Atenção, os eixos são trocados em relação ao que você talvez esteja acostumado, mas você vai se acostumar.

"Pontos" no diagrama, isto é, **posições no espaço** e num certo **tempo**, i.e., posições no **espaço-tempo**, dados pelas **coordenadas x (y, z) e $(c)t$** , são chamados **eventos**.

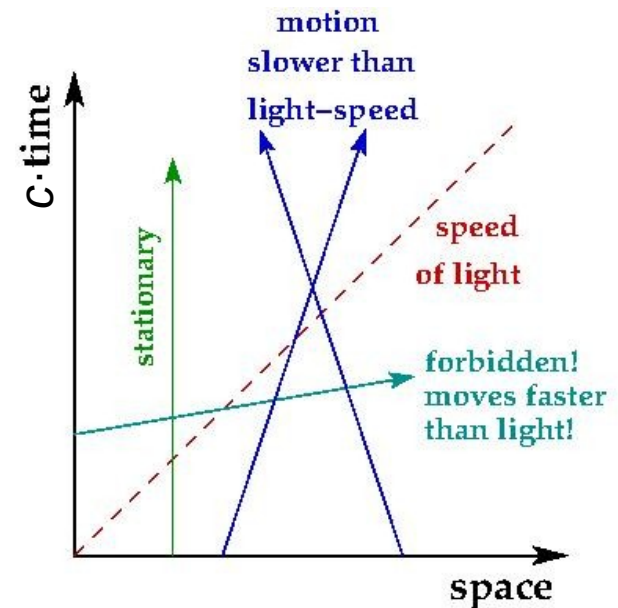


A Transformação de Lorentz

É útil introduzir o Diagrama Espaço-Tempo

Retas no diagrama representam objetos viajando com **velocidades constantes**, quanto **mais rapidamente**, tanto **menos inclinadas**.

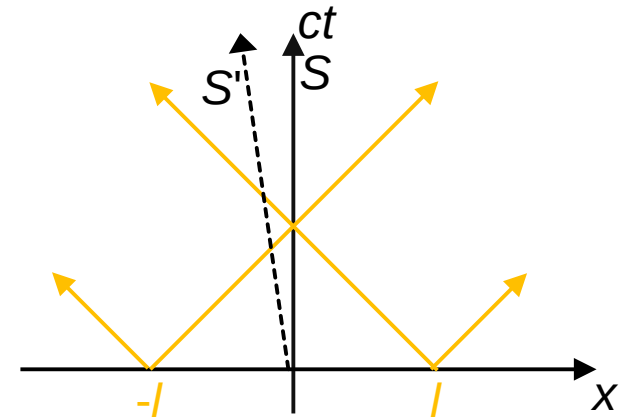
Uma inclinação de 45° corresponde à **velocidade da luz**.



A Transformação de Lorentz

Diagrama Espaço-Tempo dos dois Relâmpagos

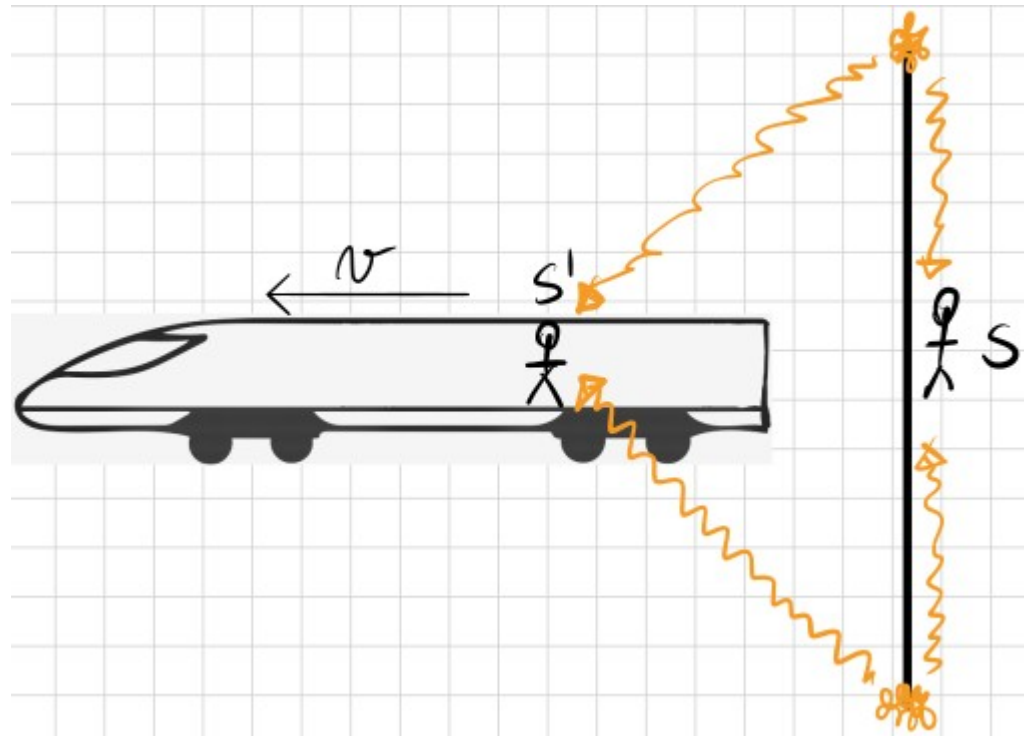
No diagrama espaço-tempo do **experimento** do **trem**, é fácil de ver que os **sinais** dos dois relâmpagos **chegam** no **mesmo instante** em S , mas **não** em S' .



A Relatividade da Simultaneidade

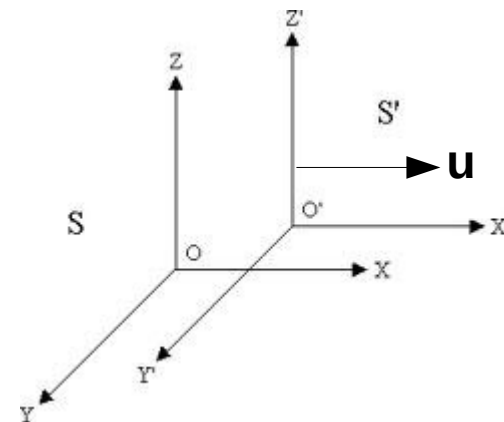
!!! Atenção: Isto só vale, para a componente do **movimento relativo** entre os dois referenciais na **direção** que separa os **dois eventos**.

Se os dois eventos ocorrem em posições separadas na **direção perpendicular** (aqui ao movimento do trem). Nesse caso, ambos **concordarão** que os dois sinais são **simultâneos**.



A Transformação de Lorentz

Voltando pra situação, para aquela determinamos a transformação de Galileu: Um **sistema S'** se **movimentando** com $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ em **relação** a S , com as **origens coincidindo** em $t = 0$.



Procuramos a **transformação** de **coordenadas x, y, z** e **t** para **x', y', z'** e **t'** , que **satisfaz** os **postulados** de **Einstein**, o **Princípio da Relatividade** e a **Constância da Velocidade da Luz**, e o **Princípio de correspondência**.

A Transformação de Lorentz

Ela têm que ser **linear**, já que pelo princípio de **relatividade**, **movimento constante** em um referencial implica em movimento constante em **qualquer outro** referencial inercial.

=> **Incrementos iguais** no referencial de um objeto movimentando-se com qualquer **velocidade constante** correspondem a **incrementos iguais** em S e S' , e portanto entre os dois também.

$$\Rightarrow x' = Ax + Ey + Fz + Ct$$

$$y' = Gx + Hy + Iz + Jt$$

$$z' = Kx + Ly + Mz + Nt$$

$$\text{Novidade: } t' = Bx + Oy + Pz + Dt$$

A Transformação de Lorentz

$$x' = Ax + Ey + Fz + Ct$$

$$y' = Gx + Hy + Iz + Jt$$

$$z' = Kx + Ly + Mz + Nt$$

$$t' = Bx + Oy + Pz + Dt$$

Já que a **direção** do **movimento relativo** é a única que se destaca, **não** esperamos efeitos que **misturassem** **x**, **y** e **z**, implicando em um monte dos coeficientes de transformação serem **zero** (aqui E , F , G , I , K e L).

A Transformação de Lorentz

$$x' = Ax + Ct$$

$$y' = Hy + Jt$$

$$z' = Mz + Nt$$

$$t' = Bx + Oy + Pz + Dt$$

Além disso, a **transformação inversa** deve ser a **mesma** usando **-u** em lugar de **u**, e pela **simetria** as duas devem "tratar" as **componentes perpendiculares** a **x** **igual**:

$$\Rightarrow (y')' = y \text{ e } (z')' = z$$

Assim, a transformação deve deixar **y** e **z** inalteradas,

$$J = N = 0, H = M = 1$$

(poderia teoricamente inverter o sinal de **y** e/ou **z**, $H = -1$ e/ou $M = -1$ mas isto fereria o princípio de correspondência):

$$y' = y$$

$$z' = z$$

A Transformação de Lorentz

$$x' = Ax + Ct$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = Bx + Oy + Pz + Dt$$

Como vimos, as componentes perpendiculares ao movimento relativo não modificam o eixo de tempo:

$$O = P = 0$$

A Transformação de Lorentz

Sobra apenas

$$x' = Ax + Ct$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = Bx + Dt$$

A **origem espacial** de S' está se movimenta com **velocidade** u em **relação** a S :

$$\text{para } x' = 0, x = ut$$

$$\Rightarrow 0 = Aut + Ct \quad \forall t$$

$$\Rightarrow C = -Au$$

$$\Rightarrow \text{A transformação para } x' \text{ vira: } x' = A(x - ut)$$

Para achar A , B e D usaremos um instrumento chamado **relógio de luz**.

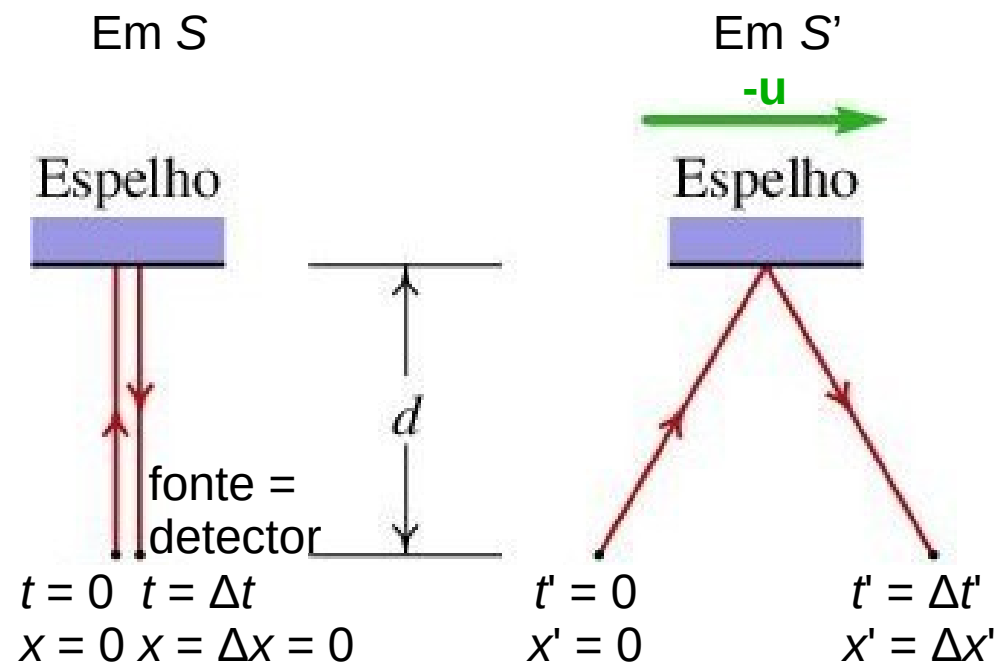
A Transformação de Lorentz

O Relógio de Luz

Um arranjo **fonte-espelho-detector** (mental, mas em teoria pode ser construído de fato), chamado **relógio de luz**, naquele um fóton (raio) de luz viaja ida e volta até um espelho.

Medindo (calculando)

o **tempo de viagem**, usando os **postulados de Einstein**, especificamente a **invariância da velocidade da luz**, obtemos um resultado importante para chegar na **transformação entre referenciais**.



A Transformação de Lorentz

O Relógio de Luz

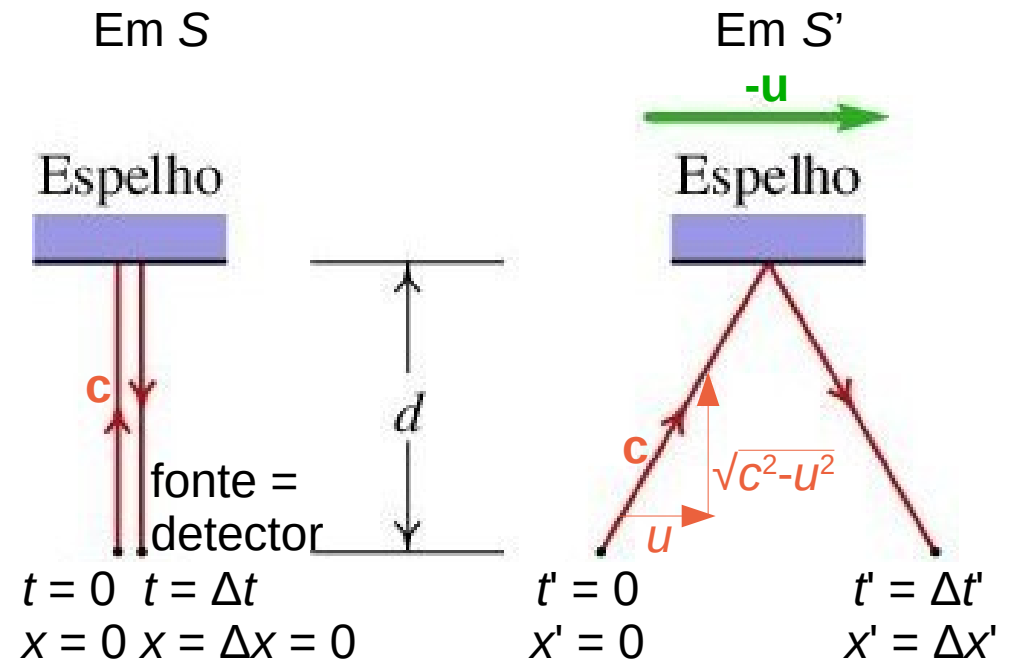
Tempo de viagem em S:

$$\Delta t = 2d/c$$

em S':

$$\Delta t' = 2d/\sqrt{c^2 - u^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t'/\Delta t = 2d \cdot c / 2d \cdot \sqrt{c^2 - u^2} \\ = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} =: \gamma$$



O **intervalo** de **tempo** depende do **referencial**!

Fenômeno chamado **dilatação** do **tempo**.

Em S', ele é maior por um **fator** $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, que é, então, o coeficiente D na transformação que estamos procurando, e em geral um fator **importante** na **Relatividade**.

A Transformação de Lorentz

$$x' = A(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = Bx + \gamma t, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

Olhando agora para **luz** partindo em $t = 0$ na **origem** e se deslocando na direção $+x$, $x = ct^*$,
ainda pela **invariância** da **velocidade** da **luz**:

$$c = \Delta x / \Delta t = \Delta x' / \Delta t' \Rightarrow A = \Delta x' / \Delta x = \Delta t' / \Delta t = \gamma$$

e

$$x' = ct' \Rightarrow \gamma(x - ut) = c(Bx + \gamma t)$$

$$\Rightarrow Bx = \gamma(x - ut)/c - c\gamma t/c = \gamma(x - ut - ct)/c =^* \gamma(-ut)/c$$

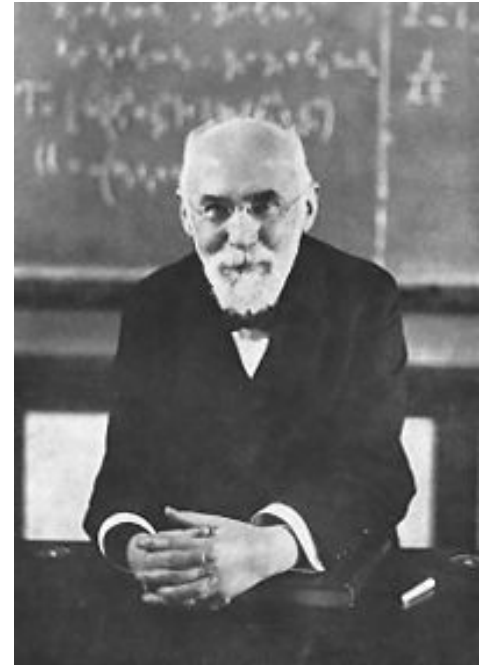
$$\Rightarrow B = \gamma(-ut)/cx =^* \gamma(-ut)/cct = -\gamma u/c^2$$

A Transformação de Lorentz

Na **Relatividade Restrita**, a transformação de coordenadas na **troca** de **referencial**, i. e. no caso "Sistema S' se movimentando com $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ em relação a S " é realizada pela

Transformação de Lorentz (1904):

Esta transformação é às vezes chamada **boost** pela velocidade $\mathbf{u}$ (neste caso, na direção dos x).



Hendrik Antoon
Lorentz (1853-1928)

A Transformação de Lorentz

Chegamos na **Transformação de Lorentz**:

$$x' = \gamma \cdot (x - ut)$$

$$y' = y$$

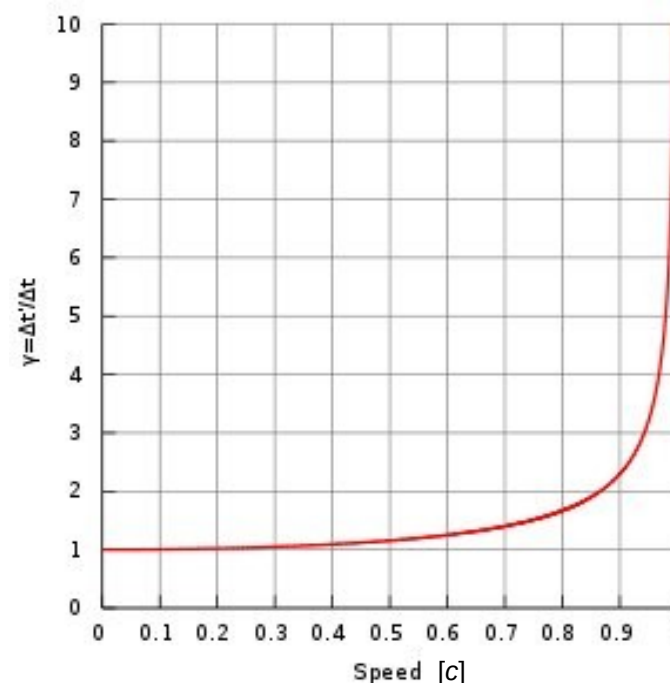
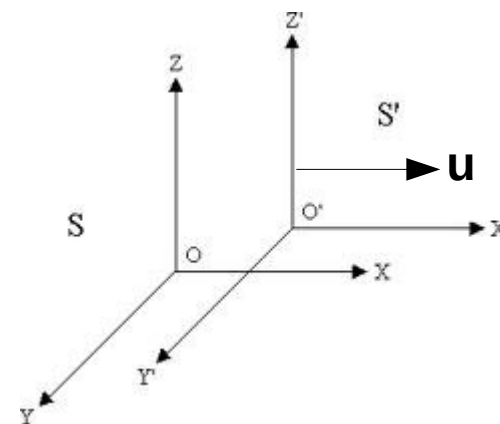
$$z' = z$$

$$t' = \gamma \cdot (t - ux/c^2),$$

onde $\gamma := 1/\sqrt{1-u^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
= **fator de Lorentz**, $\beta := u/c$

$$\gamma(u=0) = 1$$

$$\gamma(u=c) = \infty$$



A Transformação de Lorentz

Exercício: mostre que, aplicando esta transformação em (x', y', z', t') usando $-u$ em lugar de u , obtém-se (x, y, z, t) de volta.

=> As **transformações inversas** são as **mesmas**, substituindo u por $-u$, como deveria ser, já que S se movimenta com $-u$ em relação a S' .

Exercício 2: Mostre que, para $u \ll c$, estas transformações tendem às transformações de Galileu (princípio de correspondência).

A Transformação de Lorentz

Para a maioria das **questões cotidianas**, os valores de β e $\gamma-1$ são **muito pequenos** e as **transformações de Galileu** são **válidas**.

Ex.: O avião mais rápido da história:
Com uma velocidade de 7000 km/h,
 $\beta = 6.5 \cdot 10^{-6}$, $\gamma-1 = 2.1 \cdot 10^{-11}$



<https://economia.uol.com.br/todos-a-bordo/2021/03/20/a-viao-mais-rapido-da-historia.html>

A Transformação de Lorentz

Conferindo a Invariância da Velocidade da Luz

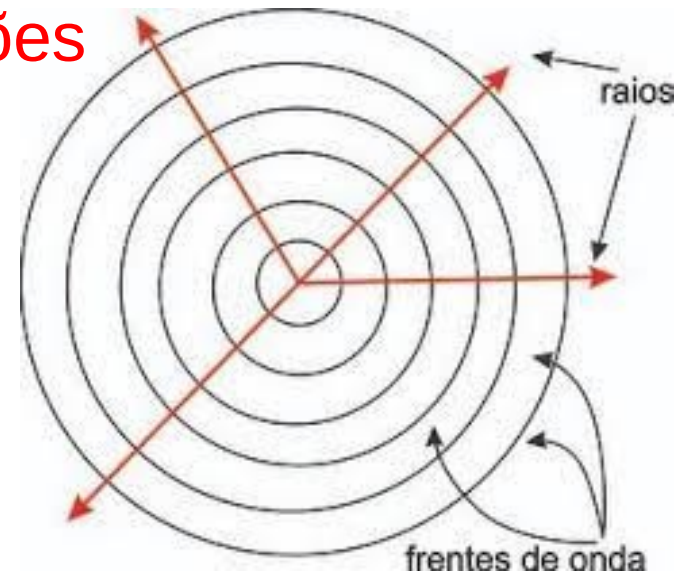
Pela maneira, como construímos a transformação, ela deve **manter** a **velocidade** da **luz** (no vácuo) **invariante** para luz **propagando-se** na direção $+x$.

mas ela realmente a deixa invariante para luz viajando em **qualquer direção**?

Supondo uma **onda** de **luz** partindo de $x = y = z = 0$ em $t = 0$ em **todas** as **direções** (ou seja, esférica), vale para **todos** os **pontos** na **frente** da **onda**:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

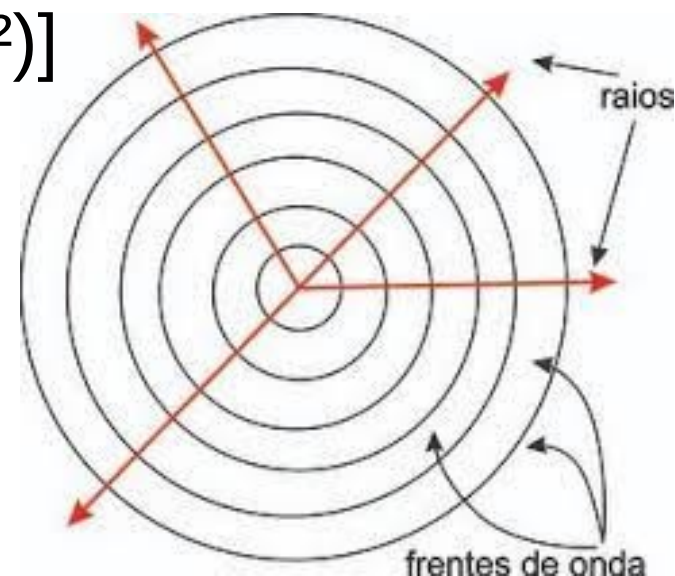
Precisamos mostrar que,
se vale $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$,
também vale $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$.



A Transformação de Lorentz

Conferindo a Invariância da Velocidade da Luz

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= (\gamma \cdot (x - ut))^2 + y^2 + z^2 - c^2 (\gamma \cdot (t - ux/c^2))^2 \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [(x - ut)^2 - c^4 (t - ux/c^2)^2] \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [x^2 - 2utx + u^2 t^2 - c^2 (t^2 - 2uxt/c^2 + u^2 x^2/c^4)] \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [x^2 - \cancel{2utx} + u^2 t^2 - c^2 t^2 + \cancel{2uxt} - u^2 x^2/c^2] \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [x^2 - u^2 x^2/c^2 + u^2 t^2 - c^2 t^2] \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [x^2 - u^2 x^2/c^2 - c^2 (t^2 - u^2 t^2/c^2)] \\&= y^2 + z^2 + \gamma^2 [(1 - u^2/c^2)x^2 - c^2 t^2 (1 - u^2/c^2)] \\&= y^2 + z^2 + \cancel{\gamma^2 (1 - u^2/c^2)} (x^2 - c^2 t^2) \\&= y^2 + z^2 + x^2 - c^2 t^2 = 0 \text{ QED}\end{aligned}$$



A Transformação de Lorentz

Boost por uma velocidade u em uma direção qualquer

$$r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - \mathbf{u}t)$$

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$$

$$t' = \gamma(t - (u/c^2)\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = \gamma(t - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}/c^2),$$

onde $r_{\parallel}$ = a **componente** do vetor posição $\mathbf{r}$ **paralela** a $\mathbf{u}$, e $\mathbf{r}_{\perp}$ = o **vetor 2D** consistindo das **componentes** de $\mathbf{r}$ **perpendiculares** a $\mathbf{u}$

A Transformação de Lorentz

A **transformação de Lorentz geral** é dada por

- um **boost** por uma velocidade $\mathbf{u}$ em uma **direção qualquer** (que torna as transformações de x , y e z mais chatas),
- mais uma **rotação** do sistema de coordenadas (como aprendido na geometria analítica),
- e um possível **deslocamento** da **origem** (adição de um vetor, caso as origens dos dois sistemas não coincidam em $t = 0$).

=> Matematicamente laborioso

Felizmente, a maioria dos fenômenos interessantes podem ser ilustrados usando a geometria adotada até agora: um *boost* na direção dos x , sem rotação ou deslocamento. Continuaremos usando esta geometria quase sempre.

A Transformação de Lorentz

Voltando pro Diagrama Espaço-Tempo

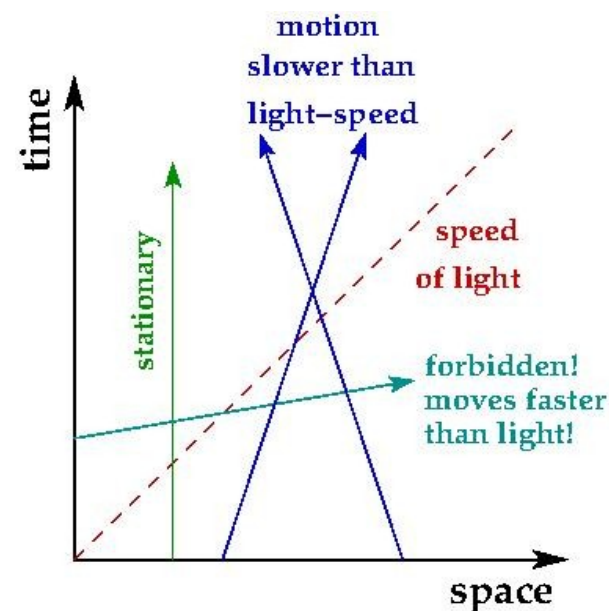
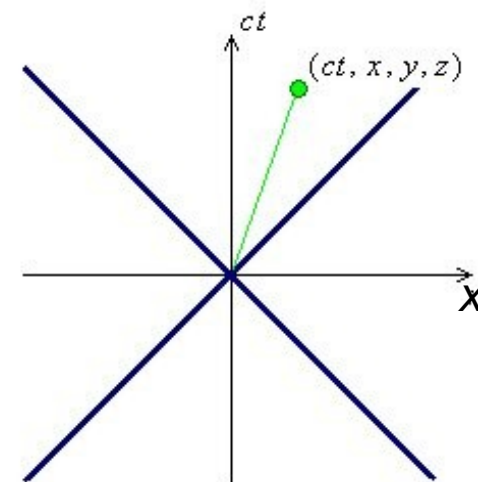
eixo **horizontal**: x

eixo **vertical**: t , multiplicado pela velocidade da luz, c , para que os eixos tenham as mesmas unidades (de distância).

y e z são **ignorados**, já que tudo que é interessante acontece nas dimensões x e t .

Retas no diagrama representam objetos viajando com **velocidades constantes**, quanto **mais rapidamente**, tanto **menos inclinadas**.

Uma inclinação de 45° corresponde à **velocidade da luz**.



A Transformação de Lorentz

Dando uma olhada de novo para estas transformações:

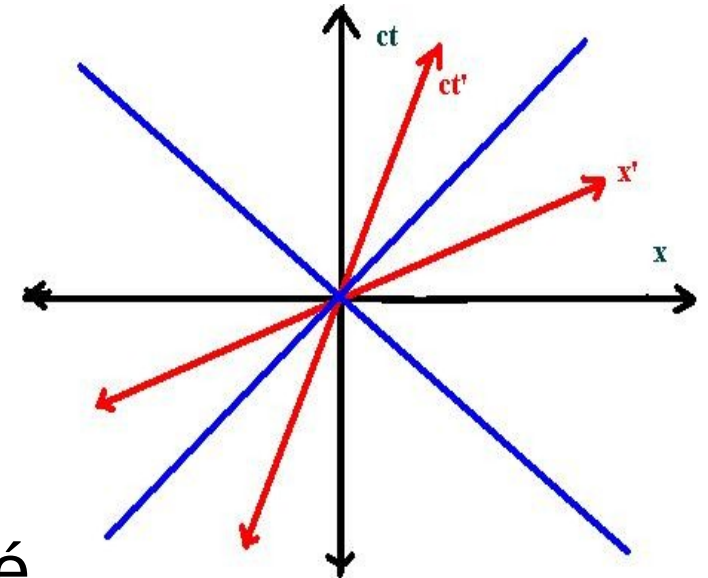
$$x' = \gamma \cdot (x - ut) \quad \text{ou} \quad x' = \gamma \cdot (x - uct/c)$$
$$t' = \gamma \cdot (t - ux/c^2) \quad \text{ou} \quad ct' = \gamma \cdot (ct - ux/c)$$

Elas **misturam espaço** (x) e **tempo**!

O que pro **observador** em S é **espaço** é (parcialmente) **tempo** pro **observador** em S', e vice-versa.

Eventos que acontecem na **mesma posição** para S, **não** necessariamente acontecem na **mesma posição** para S'.

Eventos que são **simultâneos** para S, **não** necessariamente são **simultâneos** para S'.



O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

As quatro dimensões x , y , z e t (o último multiplicado por c) juntos definem um espaço 4-dimensional, o Espaço-Tempo, ou Espaço de Minkovskij.

Minkovskij era professor do Einstein em Zürich, e foi ele quem se deu conta que a teoria da relatividade pode melhor ser entendido em um espaço quadri-dimensional, naquele o tempo faz um papel similar ao das coordenadas espaciais.



Герман Минковский,
1864-1909

O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

"As visões de espaço e tempo que desejo apresentar a vocês surgiram do solo da física experimental e é aí que reside sua força. Eles são radicais. Doravante, o espaço por si, e o tempo por si, estão condenados a desaparecer em meras sombras, e apenas uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente."

Minkovskij



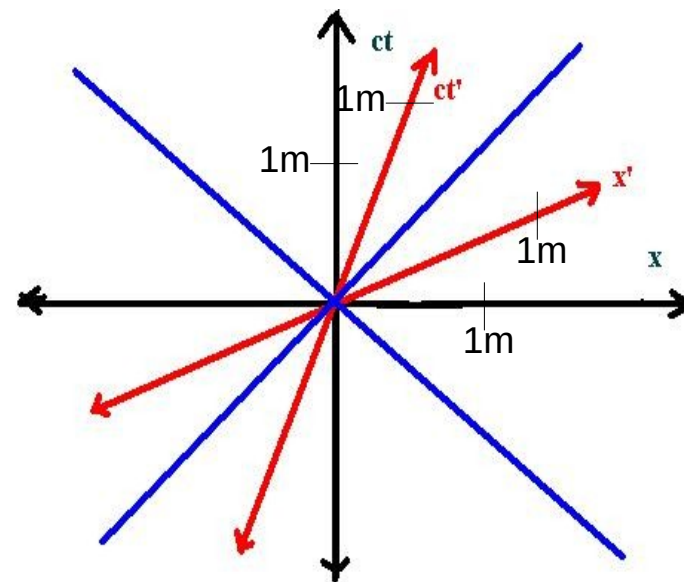
Герман Минковский,
1864-1909

O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

Definimos como **evento** um ponto no Espaço-Tempo, (ct, x, y, z) (ct = zero-ésima coordenada).

!! Vários autores usam ct como quarta coordenada: (x, y, z, ct) .

!! Na transformação de um sistema para outra, as **escalas não são conservadas**.

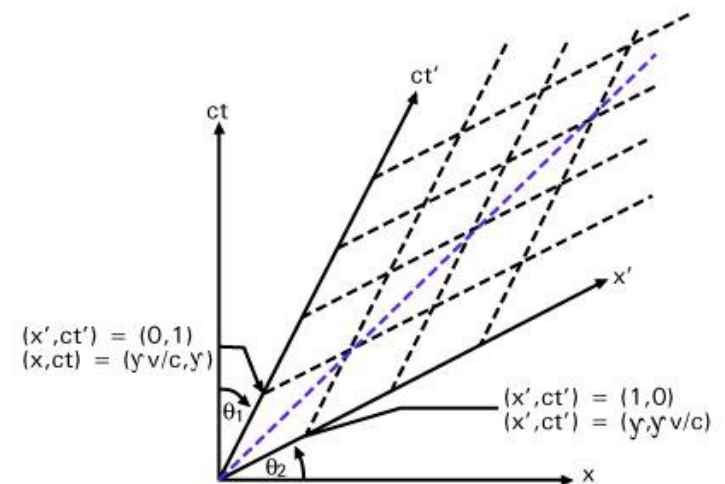
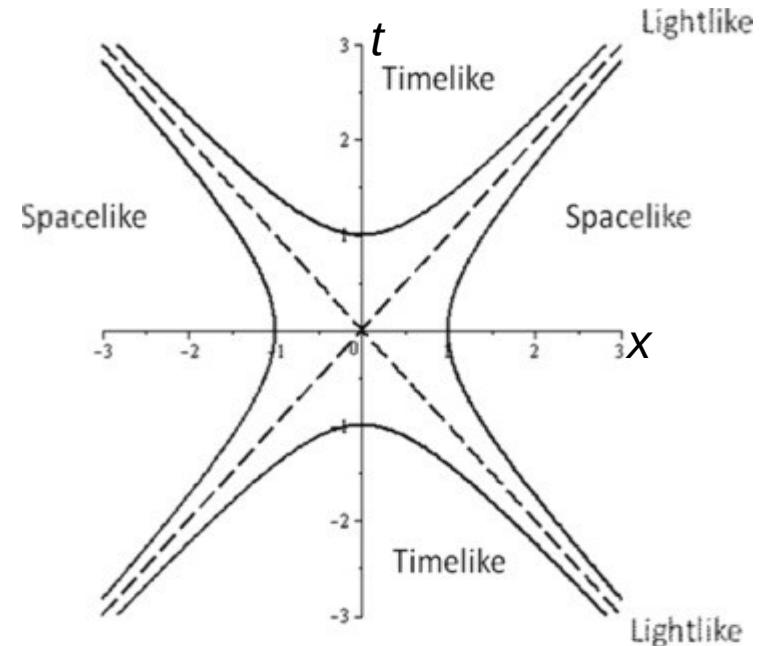


O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

Os eventos que representam $x' = 1 \text{ m}$, $t' = 0$ em todos os referenciais S' (i.e. variando u), descrevem um braço de uma **hipérbole** no diagrama de S .

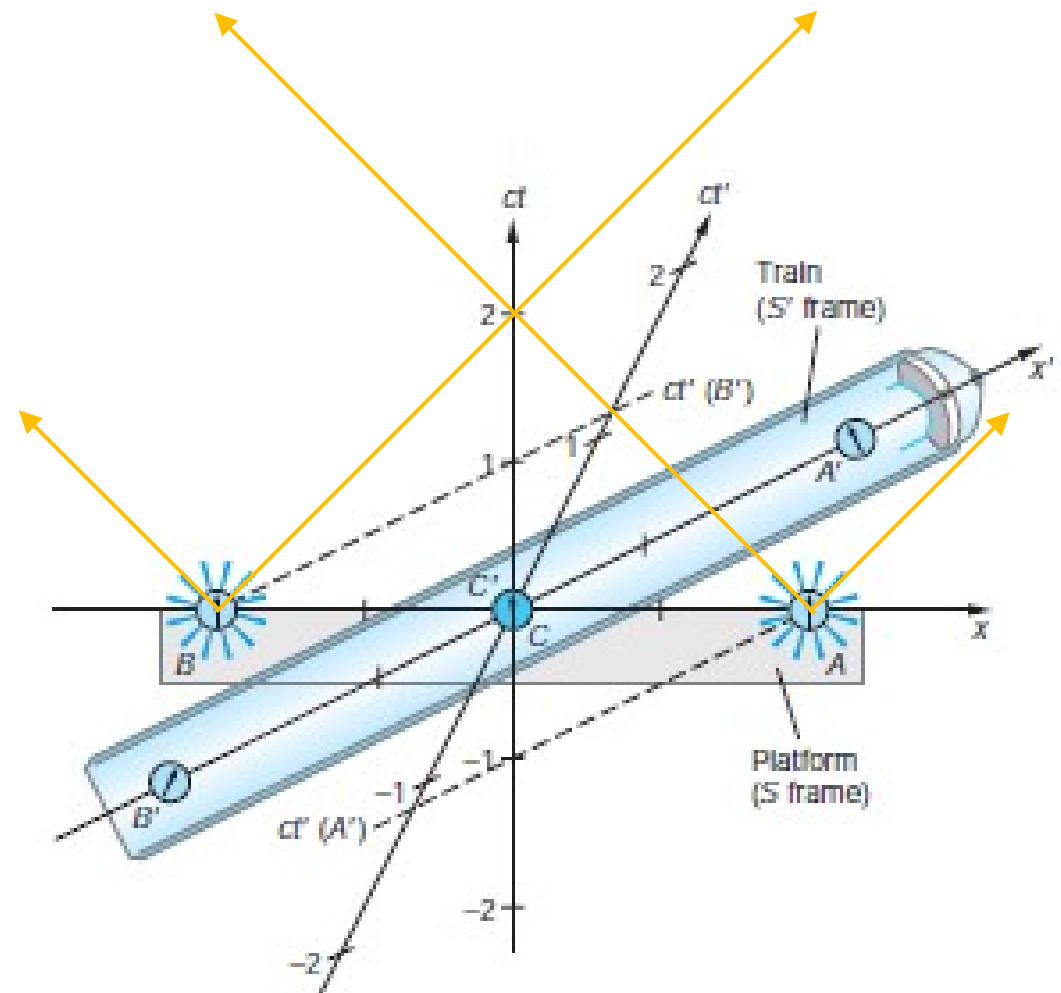
Mesma coisa para todos os eventos $x' = -1 \text{ m}$, $t' = 0$, todos os eventos $x' = 0$, $ct' = 1 \text{ m}$ e todos os eventos $x' = 0$, $ct' = -1 \text{ m}$. (Voltaremos nisto)

Neste diagrama, a **invarância** da velocidade da luz fica **evidente**.



O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

O exemplo do Trem e os Relâmpagos



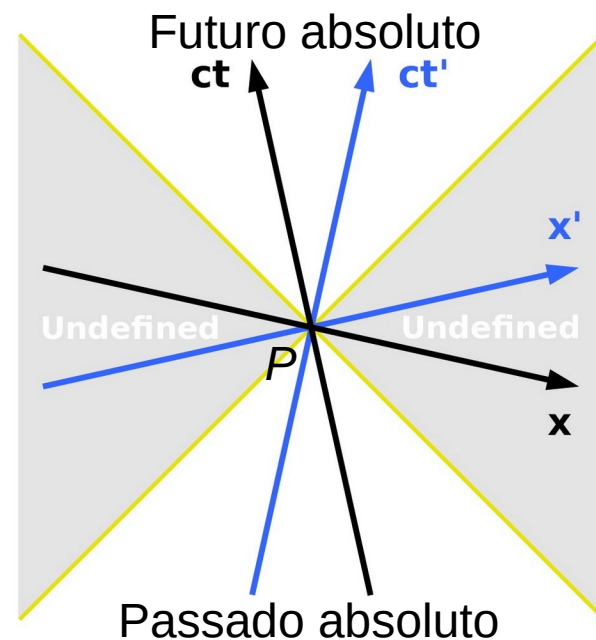
Relatividade Restrita

Passado, Futuro e Causalidade

O **diagrama Espaço-Tempo** centrado no evento P pode ser dividida em **várias regiões**:

O **passado absoluto** de P :
Eventos nesta parte foram **antes** de P ,
independente do referencial,
e podem ter **causado** P .

O **futuro absoluto** de P :
Eventos nesta parte serão **depois** de P ,
independente do referencial,
e podem ser a **consequência** de P .



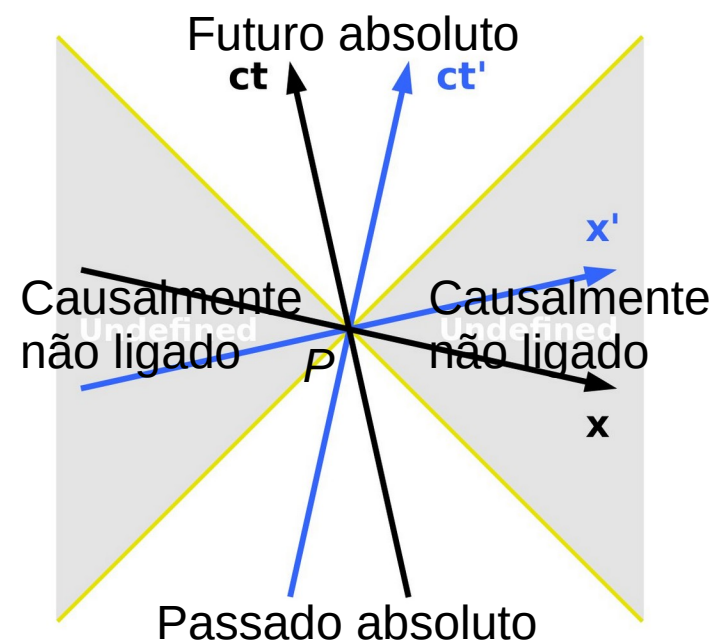
Relatividade Restrita

Passado, Futuro e Causalidade

A região **causalmente não ligada** a P :
Eventos nesta parte **não** tem/tiveram **contato** com P , q. d. **informação não** teve **tempo** para chegar destes eventos até P , ou vice-versa.

Eventos nesta região podem ser **antes**, **depois** ou **simultâneos** a P , **dependendo do referencial**, mas tão afastados que não há contato causal.

As retas amarelas são os **caminhos** que tomaria **luz** passando por P .



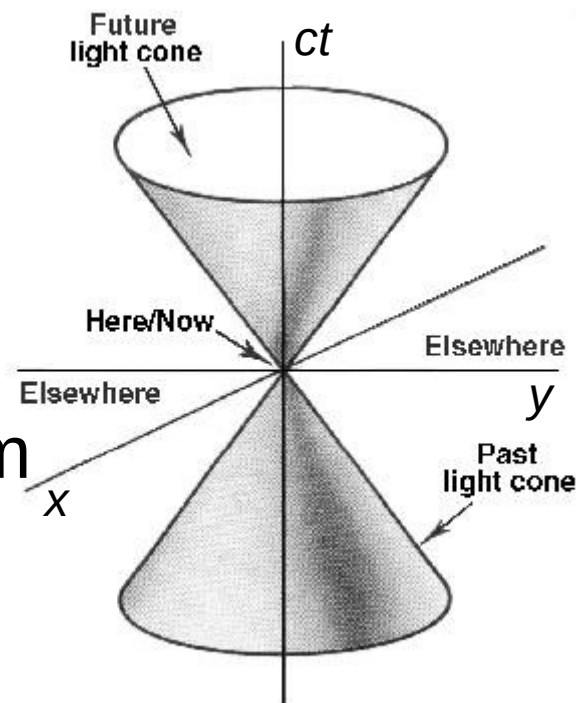
Relatividade Restrita

Cone de Luz

Pode-se fazer **diagramas espaço-tempo** levando em conta x , y e t (suprimindo só z).

=> Os possíveis **caminhos de luz** formam a superfície de um **cone**, o **cone de luz**.

Passado e **futuro absolutos** são as regiões **dentro** do **cone**, e a região **causalmente não ligada**, a região **fora**.





Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

