



Universidade Federal do ABC

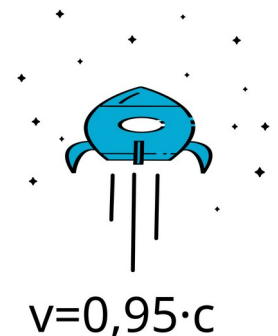
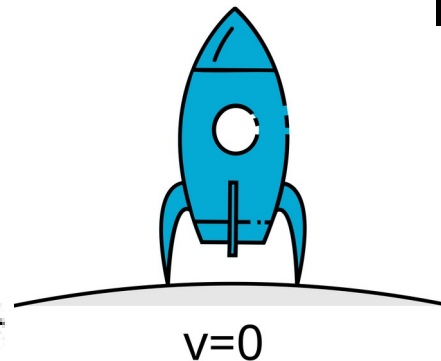
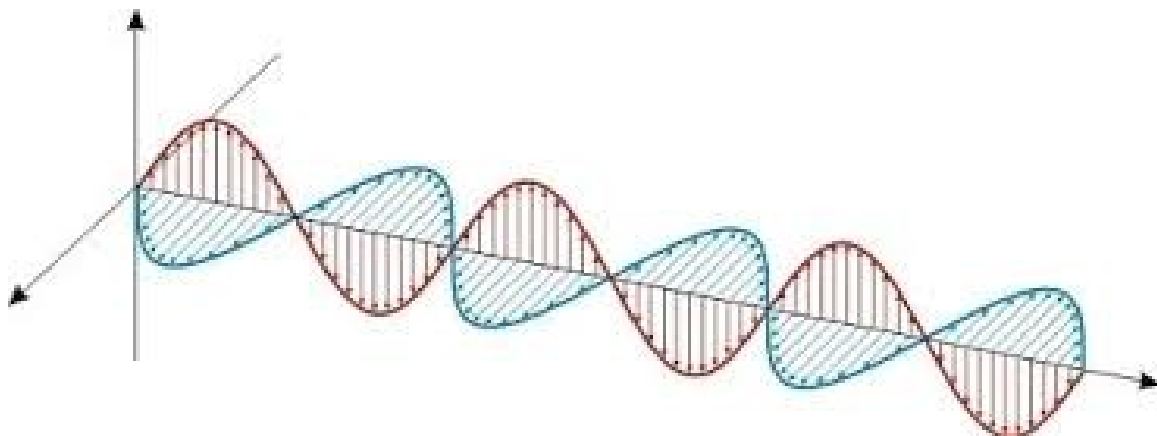
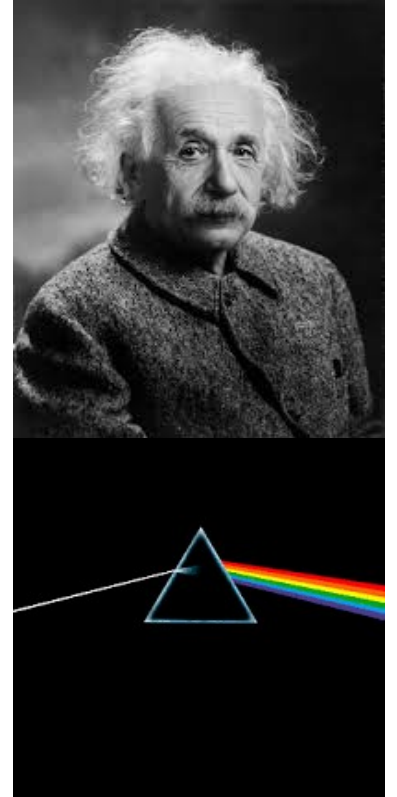
Ótica e Relatividade

15. Soma Relativística de Velocidades, Efeito Doppler Relativístico, Intervalo Invariante Relativístico

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Conseguimos calcular a **transformação** de **velocidades**. Sendo **v** uma **velocidade** (de um corpo ou uma partícula) **em S**, e **v'**, a **transformada** de **Lorentz** de **v**, isto é, a **velocidade** do corpo ou partícula **em S'**, e **u** = (u,0,0), a **velocidade relativa** entre S e S' (como sempre) obtemos:

$$\begin{aligned}v_x' &:= \Delta x' / \Delta t' = \Delta(\gamma \cdot (x - ut)) / \Delta(\gamma \cdot (t - ux/c^2)) \\&= \cancel{\gamma}(\Delta x - u\Delta t) / \cancel{\gamma}(\Delta t - u\Delta x/c^2) && \text{cortar por } \Delta t \\&= (v_x - u) / (1 - uv_x/c^2) \\v_y' &:= \Delta y' / \Delta t' = \Delta y / \Delta(\gamma \cdot (t - ux/c^2)) = \Delta y / \gamma((\Delta t - u\Delta x/c^2)) \\&= v_y / \gamma(1 - uv_x/c^2) \\v_z' &:= \Delta z' / \Delta t' \\&= v_z / \gamma(1 - uv_x/c^2)\end{aligned}$$

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

$$v_x' = (v_x - u) / (1 - uv_x/c^2)$$

$$v_y' = v_y / \gamma(1 - uv_x/c^2)$$

$$v_z' = v_z / \gamma(1 - uv_x/c^2)$$

A **transformação inversa** é a **mesma**, trocando **u** por **$-u$** (como sempre):

$$v_x = (v_x' + u) / (1 + uv_x'/c^2)$$

$$v_y = v_y' / \gamma(1 + uv_x'/c^2)$$

$$v_z = v_z' / \gamma(1 + uv_x'/c^2),$$

e para **velocidades** **u** e **v** **baixas** ($\ll c$), re-obtemos a **transformação de Galileu**, como exigido pelo **princípio de correspondência** (simples de mostrar).

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Já que, nesta geometria, $\mathbf{u}$ é na direção dos x , $uv_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, e podemos achar a transformação por um *boost* por um velocidade $\mathbf{u}$ em **qualquer direção**:

$$v_{\parallel \mathbf{u}}' = (v_{\parallel \mathbf{u}} - u) / (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2)$$

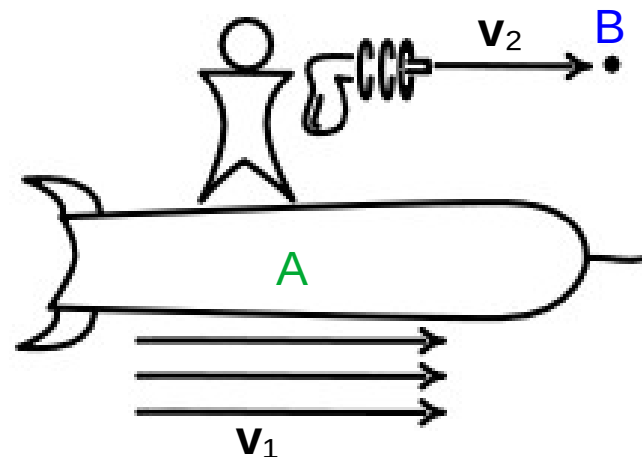
$$\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}}' = \mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}} / \gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2),$$

onde $v_{\parallel \mathbf{u}}$ é a componente de $\mathbf{v}$ paralela a $\mathbf{u}$, e $\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}}$, o vetor 2D composto das componentes perpendiculares a $\mathbf{u}$.

Relatividade Restrita

Adição de Velocidades

Supondo um **objeto** em **movimento** **A** (aqui o foguete) com **velocidade** $\mathbf{v}_1$ em **relação** a algum **referencial** de **interesse** (por exemplo alguém assistindo o foguete de fora), e um segundo **objeto** **B** (aqui a bala) sendo **lançado** com **velocidade** $\mathbf{v}_2$ a partir do **objeto** **A**, para saber a **velocidade** de **B** em **relação** ao **referencial** de **interesse**, temos que **somar** as **velocidades** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (vetorialmente).



Na mecânica **newtoniana**, a **soma** é simplesmente

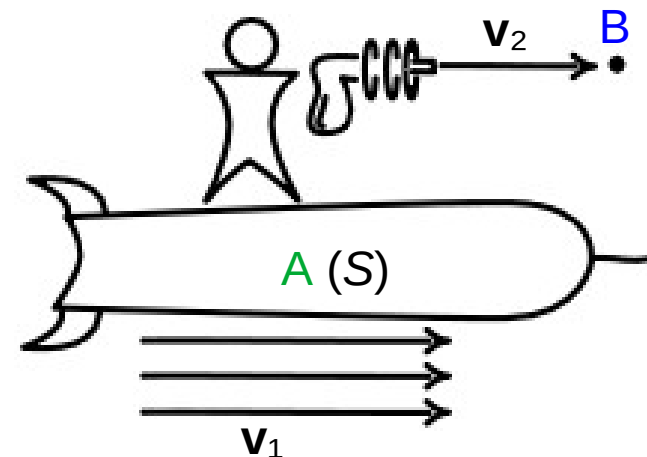
$$\mathbf{v}_{\text{tot}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Relatividade Restrita

Adição de Velocidades

$$\mathbf{v}_{\text{tot}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Isto dá no mesmo que considerar o objeto **B** deslocando-se com $\mathbf{v}_2$ em relação a S (o referencial de **A**), e observá-lo de um referencial S' (o de interesse), S movimentando-se com $\mathbf{v}_1$ em relação a S' ($\Rightarrow S'$ se movimenta com $-\mathbf{v}_1$ em relação a S)
 $\Rightarrow$ transformar $\mathbf{v}_2$ por uma transformação de Galileu pela velocidade $-\mathbf{v}_1$.



$$\mathbf{v}_{\text{tot}} = \text{TG}_{-\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - (-\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Relatividade Restrita

Adição de Velocidades na Relatividade

Na **relatividade** é a **mesma coisa**, só que temos que **substituir** a **transformação** de **Galileu** por um **boost** pela velocidade $-\mathbf{v}_1$.

Tomando $\mathbf{v}_1$ na direção dos x :

$$v_{\text{tot},x} = (v_{1,x} + v_{2,x}) / (1 + v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$

$$v_{\text{tot},y} = v_{2,y} / \gamma(1 + v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$

$$v_{\text{tot},z} = v_{2,z} / \gamma(1 + v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$

Exemplo: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0.999c, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{v}_{\text{tot}} = (0.99999995c, 0, 0)$

Independente de quanto se "adiciona velocidade" (acelera), **nunca** se alcança (ou supera) a **velocidade** da **luz**!

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som. É a **mudança** da **frequência** de uma **onda** sonora da **fonte** para um **observador** em **movimento** em **relação** à **fonte**, devido ao fato, de que **crestas subsequentes** da onda são **emitidas** em **distâncias diferentes** até o **observador**, fazendo que se **soma** ou **subtrai** ao **período** de oscilação da onda (o inverso da frequência), a **diferença** de **tempo** de **viagem** das crestas da fonte até o observador.



Christian Doppler
(1803–1853)

Para calculá-lo, temos que levar em conta as **velocidades** de **fonte** e **observador** em **relação** ao **meio** de **propagação** da onda (o ar).

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

Dando nomes:

ν_0 : frequência da onda no referencial da fonte,

ν : frequência no referencial do observador

$\Delta\nu = \nu - \nu_0$: mudança de frequência de fonte para observador

$\Delta\nu/\nu_0$: mudança relativa de frequência

c_s : velocidade da onda (do som) em relação ao meio de propagação (o ar), ~ 300 m/s.

v_f : velocidade da fonte em relação ao meio

v_o : velocidade do observador em relação ao meio

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

fonte em movimento: $\nu = \nu_0 / (1 \mp v_f / c_s)$

$$v_f \ll c_s : \Delta\nu/\nu_0 = (\nu - \nu_0)/\nu_0 \approx \mp v_f / c_s$$

observador em movimento: $\nu = (1 \pm v_o / c_s) \cdot \nu_0$

$$v_o \ll c_s : \Delta\nu/\nu_0 \approx \pm v_o / c_s$$

=> **ambos em movimento:** $\nu = (1 \pm v_o / c_s) / (1 \mp v_f / c_s) \cdot \nu_0$

$$v_s, v_r \ll c_s : \Delta\nu/\nu_0 \approx (\pm v_o \mp v_f) / c_s = v_{rel} / c_s$$

(sinais superiores p. aproximação, inferiores p. afastamento)

Relatividade Restrita

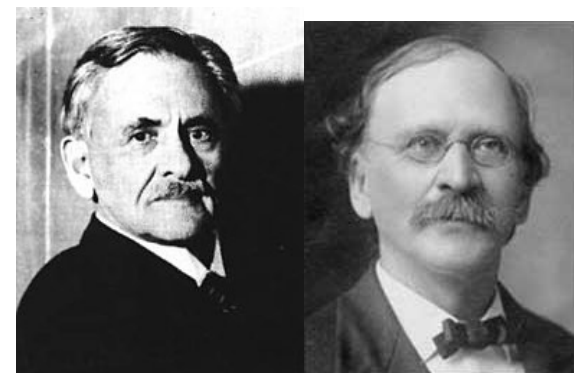
O Efeito Doppler para a Luz

Mas para a **luz**, **não** temos um **meio** de **propagação** (já que Michelson e Morley mataram o éter).

Esperamos que, neste caso, o efeito Doppler seja uma função apenas da **velocidade relativa** entre **fonte** e **observador**.



Christian Doppler
(1803-1853)



Michelson

Morley

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Se a fonte de luz viaja com S' , tomando agora como $\Delta t'$ um **período de oscilação** da **radiação** da lâmpada: $\Delta t' = T = 1/\nu_0$, (ν_0 = freq. de repouso):

Pela dilatação do tempo temos em S : $t_2 - t_1 = \gamma/\nu_0$.

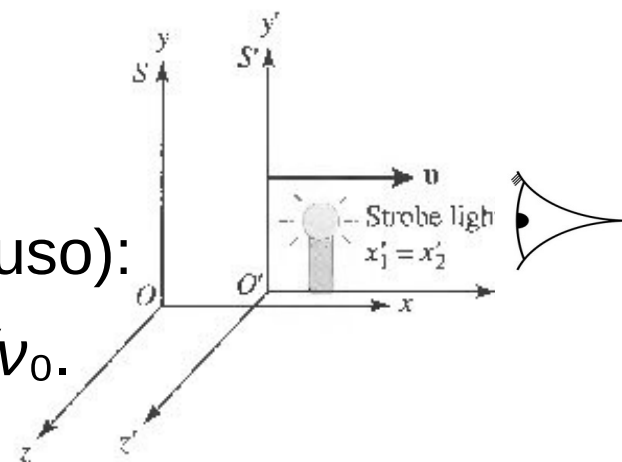
Mas t_1 e t_2 são os momentos da **emissão** das **frentes de onda** pela fonte.

Para calcular a diferença entre os momentos da **chegada** no observador em S , temos que **adicionar** a **diferença** (aqui negativa) de **caminho**, $(t_2 - t_1) \cdot u$, **dividida** pela **velocidade** do **sinal**, c .

$$\Delta t_{\text{obs}} = \nu_{\text{obs}}^{-1} = t_2 - t_1 + (t_2 - t_1) \cdot u/c = \gamma/\nu_0 \cdot (1 + u/c) = \nu_0^{-1} \cdot (1 + u/c) / (1 - u^2/c^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \nu_{\text{obs}} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1 - u/c)/(1 + u/c)} \quad , \text{ para } |u| \ll c: \nu_{\text{obs}} \approx \nu_0 \cdot (1 - u/c)$$

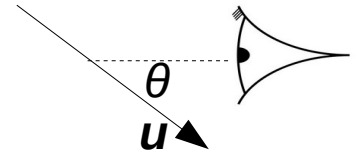
onde u é **negativa** para **aproximação**, e **positiva** para **afastamento relativo**.



Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Isto vale para **movimento** na direção da **linha** de **visada**. Se a fonte está se movimentando a um ângulo θ com a linha de visada, a fórmula se torna ($u_r = u \cdot \cos\theta$ e $u_t = u \cdot \sin\theta$):



$$\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1-u^2/c^2)} / (1+u_r/c)$$

Se a fonte está se movimentando **perpendicular** à linha de visada, há um **efeito Doppler transversal**, devido à **Dilatação do Tempo**:

$$\nu_{\text{obs}} = \gamma^{-1} \nu_0 = \sqrt{(1-u_t^2/c^2)} \cdot \nu_0$$

Às vezes se define o **redshift** (deslocamento para o vermelho) ou **blueshift** (pro azul) devido ao efeito Doppler (aqui $u = u_r$, isto é o movimento relativo é na direção da linha de visada):

$$\lambda_{\text{obs}} = (1+z) \cdot \lambda_0 \quad \Leftrightarrow \quad z \equiv (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0) / \lambda_0 = \sqrt{(1+u_r/c) / (1-u_r/c)} - 1,$$

para $u_r \ll c$: $z = u_r/c$

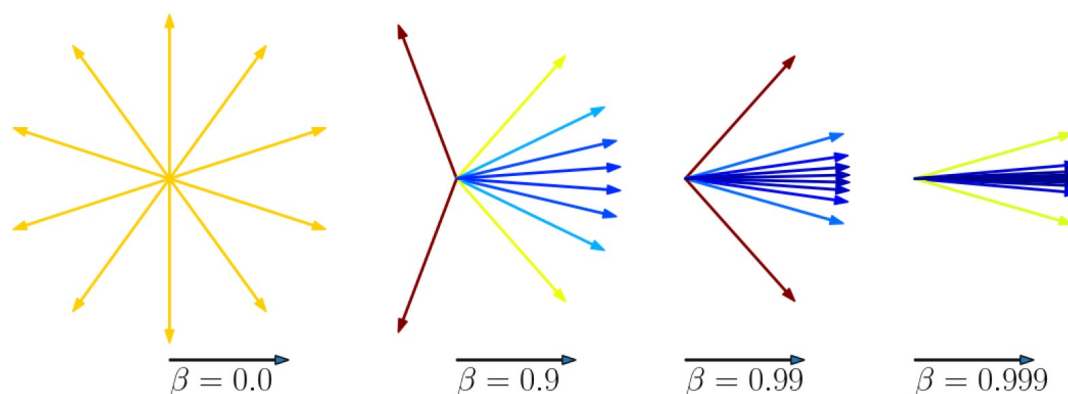
Relatividade Restrita

Colimação Relativística

Uma consequência disto é a **colimação relativística** (ingl. *relativistic beaming* ou *headlight effect*, "efeito farol").

Além de mais azul, a luz emitida **pra frente** também é mais **intensa** (e pra trás, menos intensa), já que luz de comprimento de onda curta é mais energética, e a frequência no sentido de número de fótons por unidade de tempo é maior.

Assim, uma fonte de luz em **velocidade relativística irradia** principalmente na **direção** do seu **movimento** (em relação ao observador).



Relatividade Restrita

Colimação Relativística

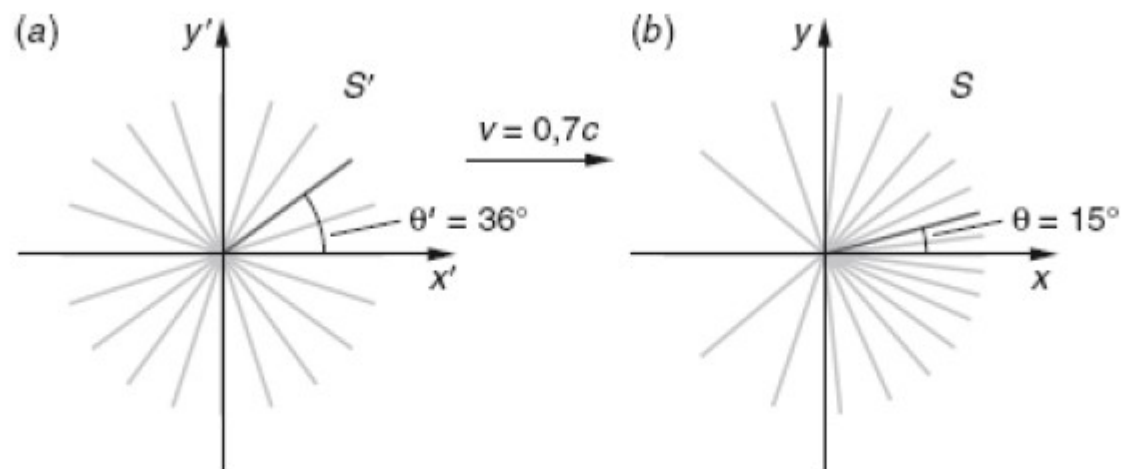


FIGURA 1-38 (a) A fonte em repouso em S' está se movendo com uma velocidade $\beta = 0,7$ em relação a S . (b) Um pulso luminoso que se propaga uniformemente em S' , quando observado do ponto de vista de S , parece concentrar-se em um cone. O ângulo entre os raios mostrados em (a) é 18° . O ângulo entre os raios mostrados em (b) pode ser calculado com o auxílio da Equação 1-41. As linhas mais grossas são raios correspondentes nos dois referenciais.

Outra maneira de entender a colimação relativística é pela **transformação de Lorentz de vetores** na **direção dos raios de luz** emitidos pela fonte do **referencial da fonte**, S' , para o do **observador**, S . Enquanto eles são emitidos **isotropicamente** em **todas as direções** em S' , em S eles estão **concentrados** na direção da **velocidade relativa** (aqui $+x$).

Relatividade Restrita

Colimação Relativística

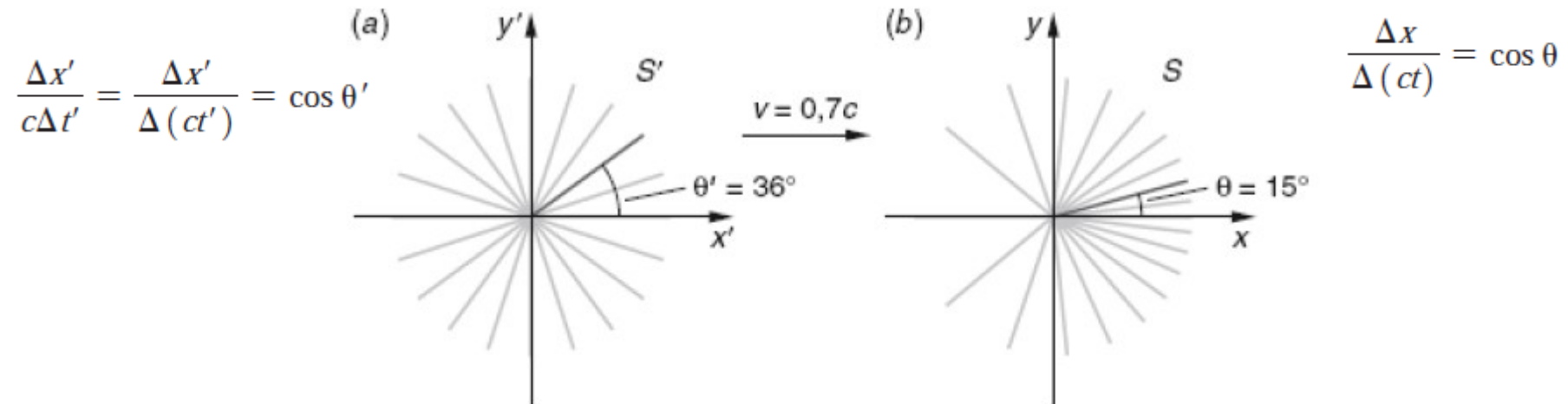


FIGURA 1-38 (a) A fonte em repouso em S' está se movendo com uma velocidade $\beta = 0,7$ em relação a S . (b) Um pulso luminoso que se propaga uniformemente em S' , quando observado do ponto de vista de S , parece concentrar-se em um cone. O ângulo entre os raios mostrados em (a) é 18° . O ângulo entre os raios mostrados em (b) pode ser calculado com o auxílio da Equação 1-41. As linhas mais grossas são raios correspondentes nos dois referenciais.

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \Delta x / c\Delta t = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') / c\gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2) \\ &= (\Delta x' / \Delta t' + v) / c(1 + v\Delta x' / c^2\Delta t') \\ &= (\Delta x' / \Delta(ct') + v/c) / (1 + v/c \cdot \Delta x' / \Delta(ct')) \\ &= (\cos \theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \theta')\end{aligned}$$

Relatividade Restrita

Colimação Relativística

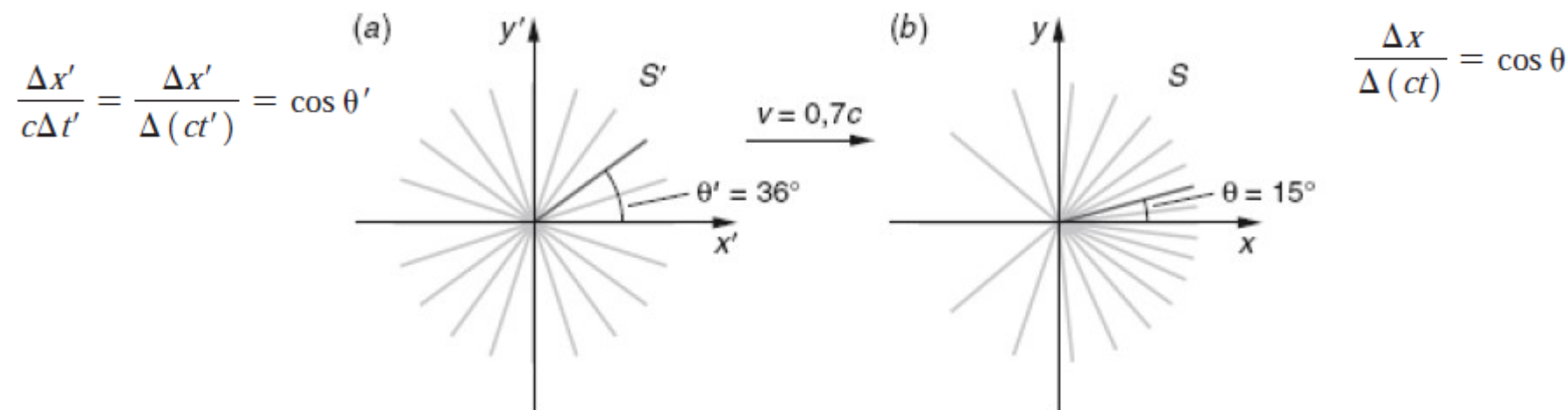


FIGURA 1-38 (a) A fonte em repouso em S' está se movendo com uma velocidade $\beta = 0,7$ em relação a S . (b) Um pulso luminoso que se propaga uniformemente em S' , quando observado do ponto de vista de S , parece concentrar-se em um cone. O ângulo entre os raios mostrados em (a) é 18° . O ângulo entre os raios mostrados em (b) pode ser calculado com o auxílio da Equação 1-41. As linhas mais grossas são raios correspondentes nos dois referenciais.

$$\cos \theta = (\cos \theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \theta')$$

Casos especiais: $\theta' = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e $\theta' = \pi \Rightarrow \theta = \pi \forall \beta$

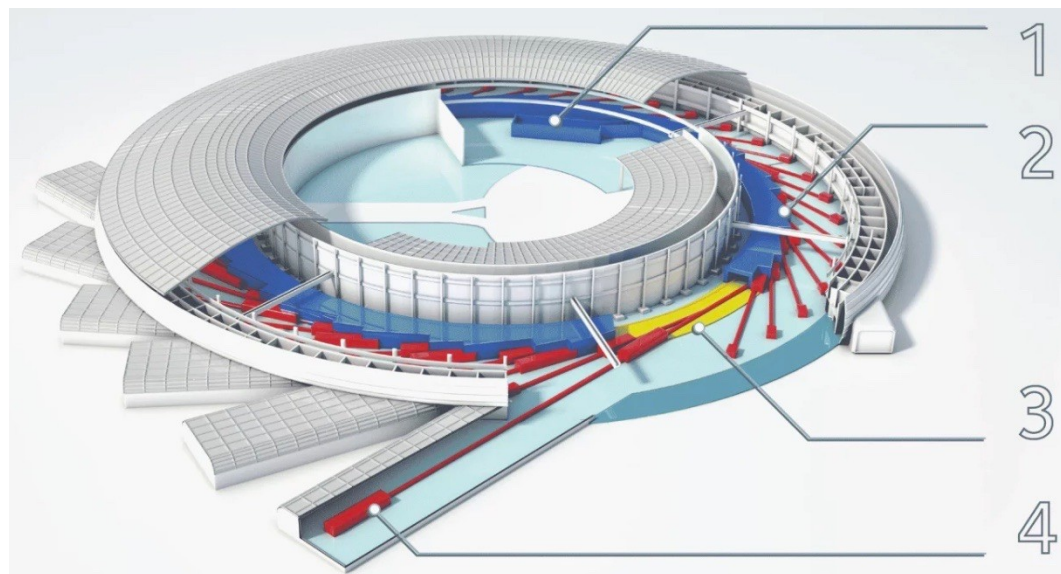
$\beta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \forall \theta'$ todos os raios colimados pra frente
(exceção: $\beta = 1$ e $\theta' = \pi/2 \Rightarrow \cos \theta = 0/0$ não definido)

Relatividade Restrita

Colimação Relativística

Exemplo: Para $\beta = 0.99$, metade da intensidade luminosa emitida por S' está concentrada num cone de ângulo $\theta \sim 8.1$ graus para S .

Isto tem que ser levado em conta, por exemplo, em aceleradores de partículas projetados para produção de luz por partículas carregadas, como o Sirius:



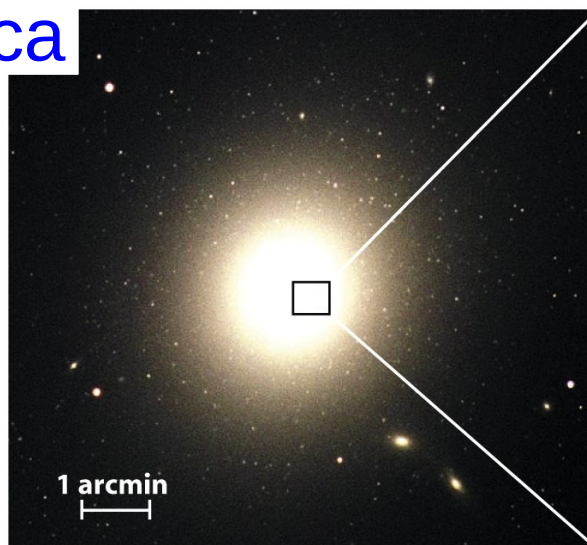
<https://lnls.cnpem.br/sirius/como-funciona-o-sirius/>

Relatividade Restrita

Colimação Relativística

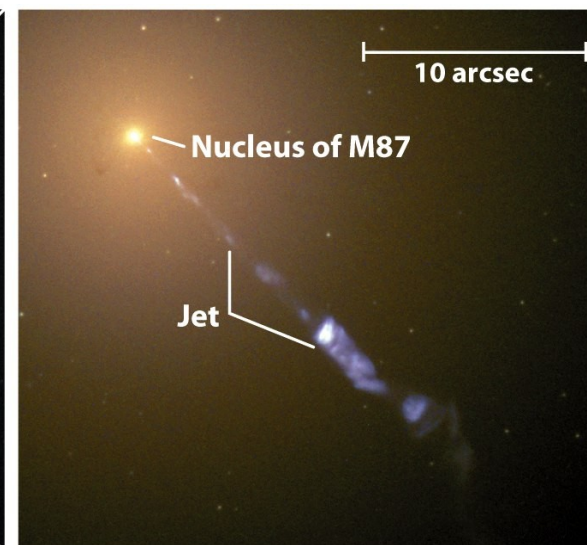
Outro Exemplo:

Em **galáxias ativas**, como a galáxia central do aglomerado de Virgo, M87, o **núcleo** emite **jatos** em **direções opostas** a **velocidades relativísticas**. Muitas vezes, **apenas** o jato vindo na **nossa direção** é **visível**, mas o contrajato, não, por causa da **colimação relativística**.

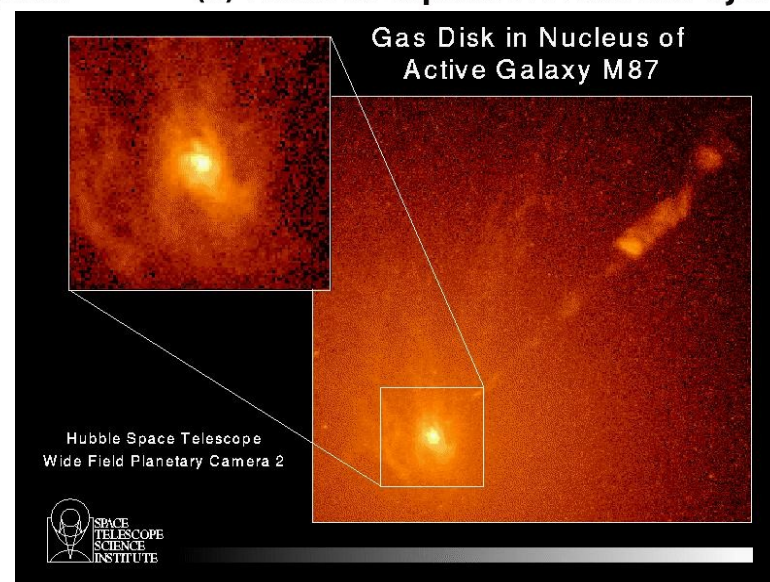


(a) The giant elliptical galaxy M87

Figure 25-8
Universe, Eighth Edition
© 2008 W. H. Freeman and Company



(b) A shorter exposure reveals M87's jet



Hubble Space Telescope
Wide Field Planetary Camera 2



A Expansão do Universo

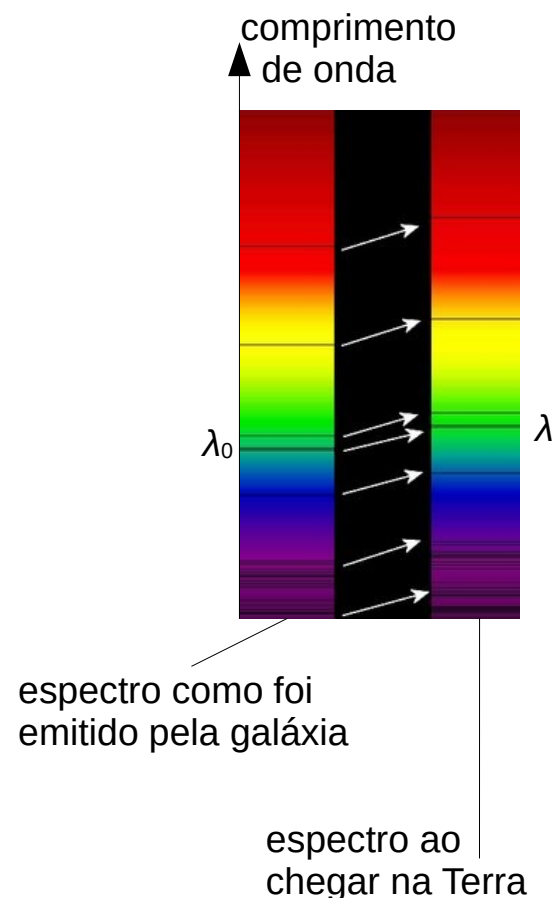
O *Redshift* cosmológico

Em 1914, V. M. **Slipher** descobriu, que os **espectros** da maioria das **galáxias** são **deslocados** para **comprimentos de onda maiores** que os de repouso.

Eles sofrem um ***redshift*** ("deslocamento para o vermelho").

Interpretando este *redshift* como um **efeito Doppler**, isto significaria. que estas galáxias estariam se **afastando** de nós.

Uma exceção notável é a galáxia de Andrômeda, cujo espectro sofre um *blueshift*, e que está se aproximando.



A Expansão do Universo

O *Redshift* cosmológico

Na verdade, **não** é exatamente um **efeito Doppler**. É a **expansão do Universo** (=> aulas Cosmologia), que "**estica**" os **comprimentos de onda** da luz que o permea.

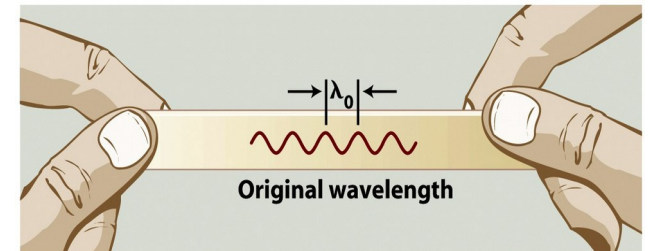
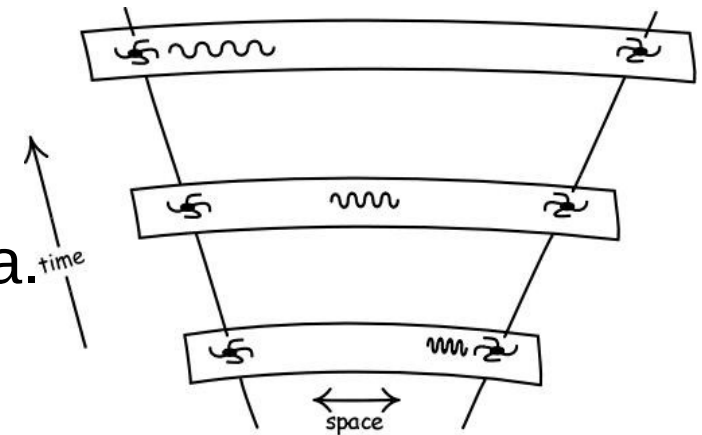
Os comprimentos de onda são esticados por um fator $1+z$, onde z é chamado de **redshift** (**cosmológico**):

$$\lambda = (1+z) \cdot \lambda_0$$

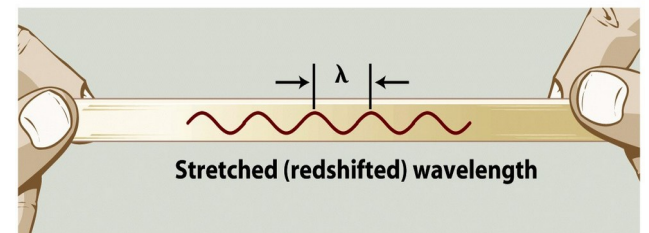
Para z pequenos ($\ll 1$), uma galáxia com redshift z está se **afastando** com velocidade

$$v = c \cdot z$$

! As próprias **galáxias não** estão **expandindo**. Elas são **gravitacionalmente ligadas**. É o **espaço entre** as **galáxias** que está **expandindo**.



(a) A wave drawn on a rubber band ...



(b) ... increases in wavelength as the rubber band is stretched.

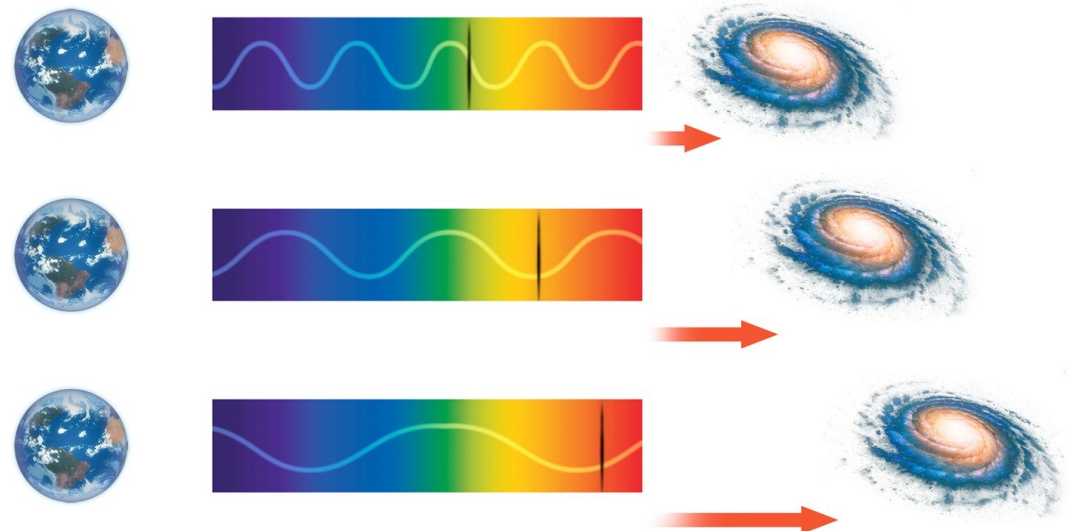
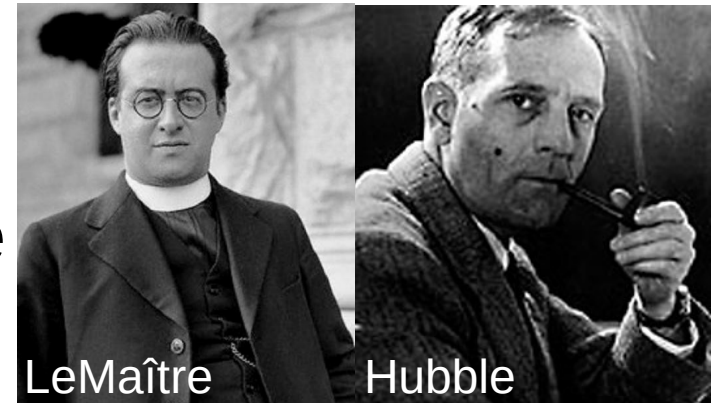
A Expansão do Universo

Lei de Hubble-leMaître (1929, até 2018 Lei de Hubble):

Edwin Hubble (e independentemente, Georges leMaître em 1927) descobriu, que estas **velocidades de recessão** das **galáxias** distantes são **proporcionais** às **distâncias** até elas (medidas usando estrelas variáveis chamadas cefeidas):

$$v = H_0 \cdot d,$$

onde H_0 é chamado **constante de Hubble**



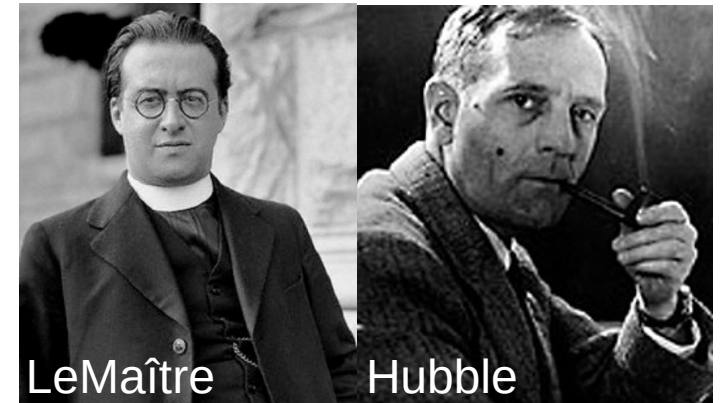
A Expansão do Universo

Lei de Hubble-leMaître

A constante de Hubble é uma medida para a **taxa da expansão** (inclinação da reta no gráfico).

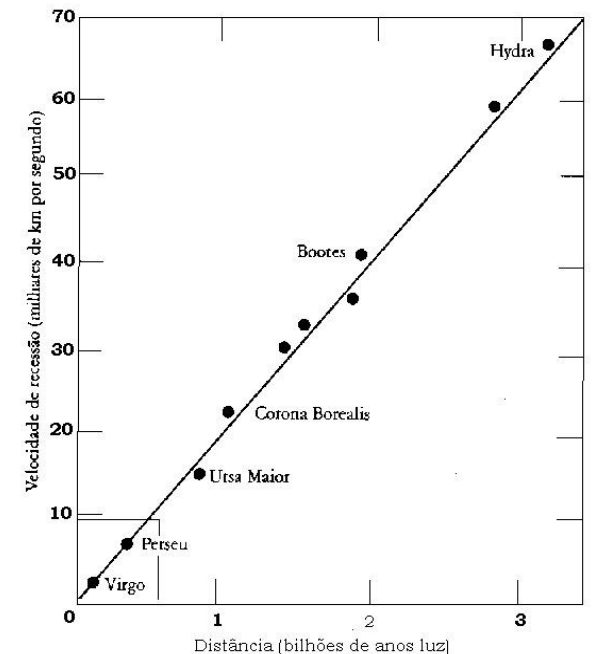
O valor da constante de Hubble foi um assunto controverso por décadas, mas hoje as opiniões convergiram para um valor de $\sim 70 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$.

Diagrama de Hubble:
velocidade de recessão vs. distância.



LeMaître

Hubble



A Expansão do Universo

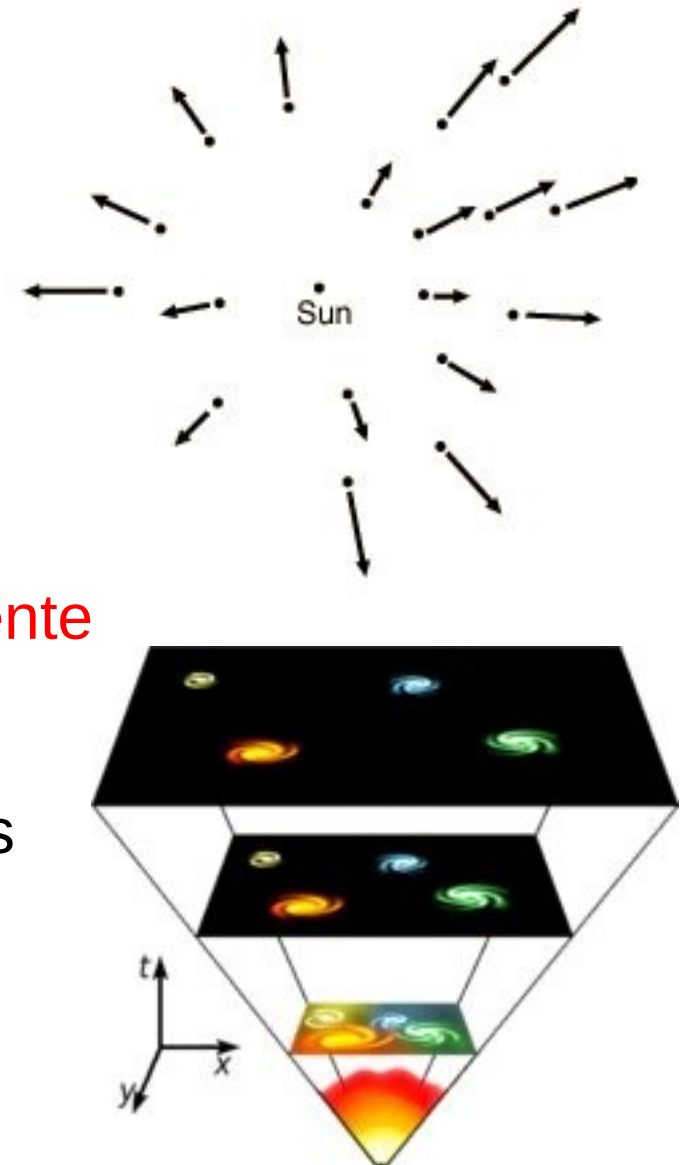
Lei de Hubble-leMaître

Se as velocidades de recessão das galáxias são proporcionais às suas distâncias até nós, então estamos no **centro** da **expansão**?

Afinal, a Terra é o **centro** do **Universo**?

Não, num Universo **expandindo uniformemente** (homogenea- e isotropicamente), **qualquer ponto** "vê" os outros pontos se afastando com velocidades proporcionais às suas distâncias.

=> **Qualquer ponto** se "sente" como o **centro** do **Universo**.



A Expansão do Universo

Lei de Hubble-leMaître

Além de comprovar a expansão do Universo, a Lei de Hubble-leMaître nós fornece um **método para medir a distância** até uma galáxia:

medir z através de uma linha espectral conhecida:

$$z = \lambda/\lambda_0 - 1$$

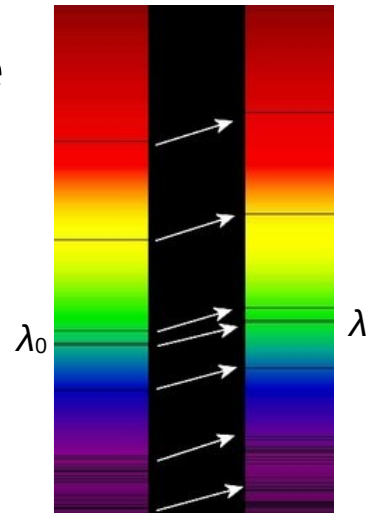
=> **Distância** $d = v/H_0 = c \cdot z/H_0$ válido para $z \leq 0.13$

até um *redshift* de 2, a fórmula

$$d \approx c/H_0 \cdot [(z+1)^2 - 1]/[(z+1)^2 + 1]$$

é uma boa aproximação.

comprimento
de onda



espectro como foi
emitido pela galáxia

espectro ao
chegar na Terra

Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

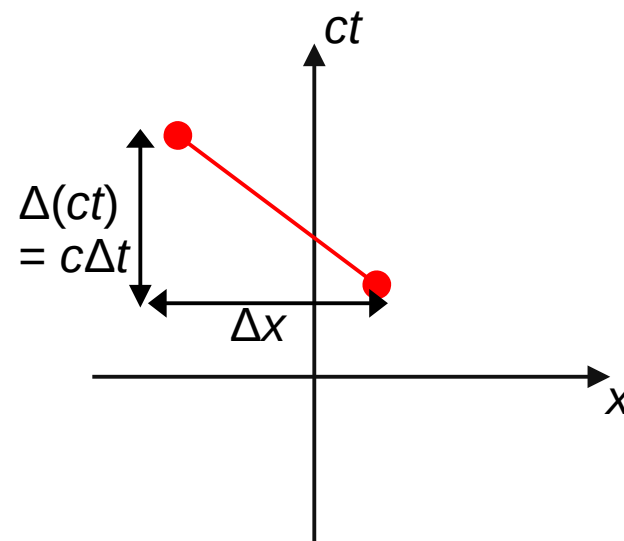
É útil definir distâncias no diagrama espaço-tempo, chamadas **intervalos**, como a seguinte grandeza:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

! $(\Delta s)^2$ pode ser negativo.

!! Alguns autores definem $(\Delta s)^2$ com **sinal oposto**:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$



Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Calculando o **intervalo** $\Delta s'$ da **transformada** de **Lorentz** de $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $(c\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z')$:

$$\begin{aligned}(\Delta s')^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\&= (c\Delta(\gamma \cdot (t - ux/c^2)))^2 - (\Delta(\gamma \cdot (x - ut)))^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot (c\Delta t - u\Delta x/c)^2 - \gamma^2(\Delta x - u\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot [c\Delta t - u\Delta x/c]^2 - (\Delta x - u\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot [c^2(\Delta t)^2 - 2u\Delta x\Delta t + u^2(\Delta x)^2/c^2 - \Delta x^2 + 2\Delta xu\Delta t - u^2(\Delta t)^2] \\&\quad - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot [c^2(\Delta t)^2 - u^2\Delta t^2 - (\Delta x)^2 + u^2(\Delta x)^2/c^2] - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot [c^2(\Delta t)^2(1 - u^2/c^2) - (\Delta x)^2(1 - u^2/c^2)] - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= \gamma^2 \cdot [(1 - u^2/c^2)(c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2)] - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\&= (\Delta s)^2\end{aligned}$$

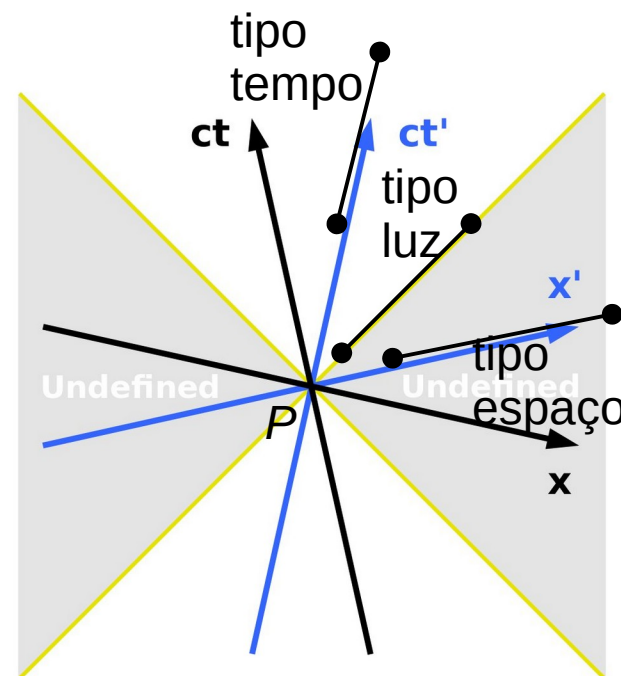
$(\Delta s)^2$ é uma **invariante** de **Lorentz**!

Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Um intervalo se chama:

- **tipo espaço** se $(\Delta s)^2 < 0$: pode ser o **eixo** de uma **dimensão espacial** de um **referencial**.
- **tipo tempo** se $(\Delta s)^2 > 0$: pode ser o **eixo** do **tempo** de um **referencial**.
- **tipo luz** se $(\Delta s)^2 = 0$: pode ser o **caminho** de um **fóton**.



Na definição com o sinal oposto, intervalos tipo espaço têm $(\Delta s)^2 > 0$, e intervalos tipo tempo, $(\Delta s)^2 < 0$.

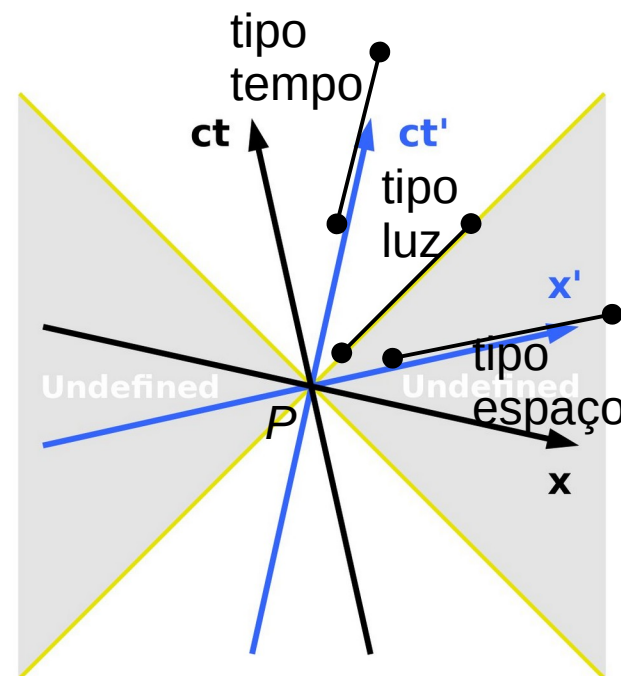
Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Num intervalo **tipo espaço**, $\sqrt{|(\Delta s)^2|}$ é a **distância própria** entre os eventos, a **distância** entre eles num **referencial**, onde eles ocorrem **simultaneamente**.

Num intervalo **tipo tempo**, Δs é o **tempo próprio** entre os eventos ($\cdot c$), o **tempo** entre eles no **referencial**, naquele eles acontecem no **mesmo lugar**.

No caso **tipo luz**, $\Delta s = 0$ significa, que o **tempo próprio** é **zero**. => Para **fótons** (ou qualquer partícula viajando com velocidade da luz) o tempo **não passa**!



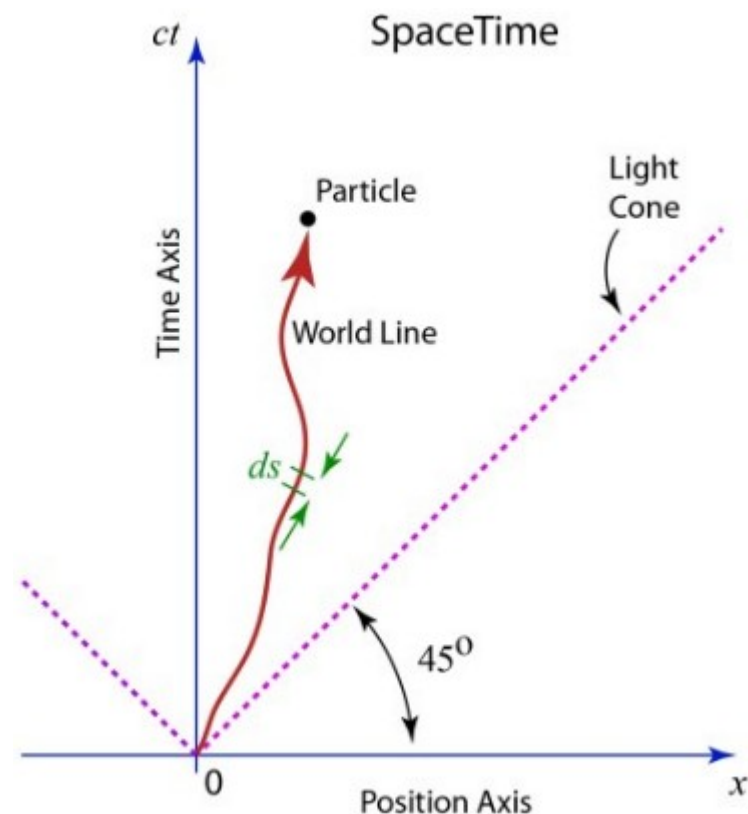
Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

A **invariância** do **intervalo** também explica, por que uma **troca** de **referencial não** consegue causar **paradoxos** com a **causalidade** ou **referenciais**, naquelas **viagens** pro **passado** seriam possíveis.

Um intervalo **tipo tempo** é **tipo tempo** em **todos** os **referenciais**, um **tipo espaço** é **tipo espaço** em **todos** os **referenciais** e um **tipo luz** é **tipo luz** em **todos** os **referenciais**.

Linhas de universo sempre vão pra frente no tempo.





Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

