



Universidade Federal do ABC

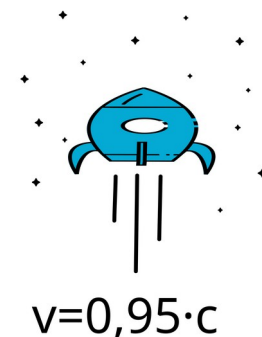
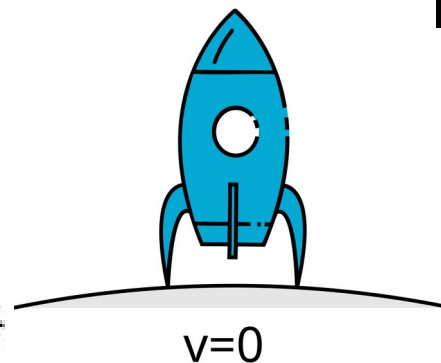
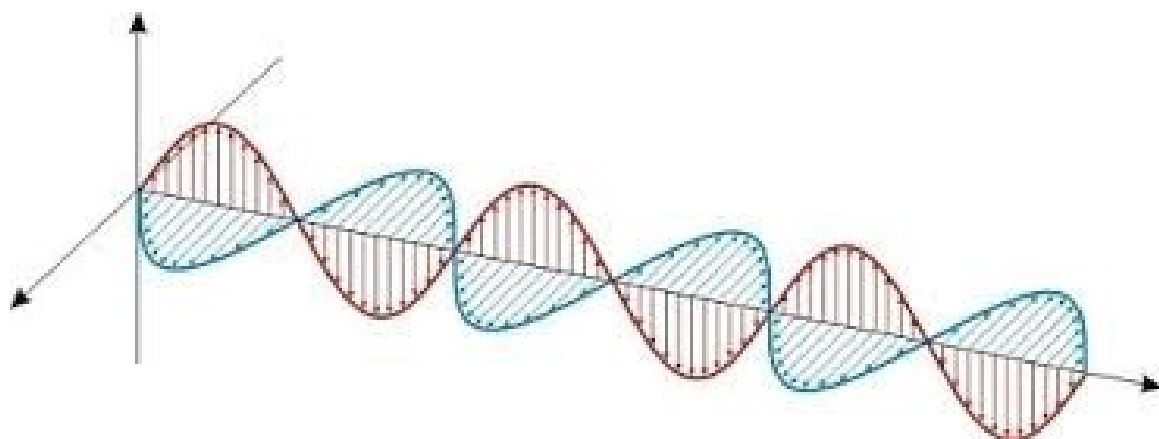
Ótica e Relatividade

16. Quadrivetores (ou Tetravetores)

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



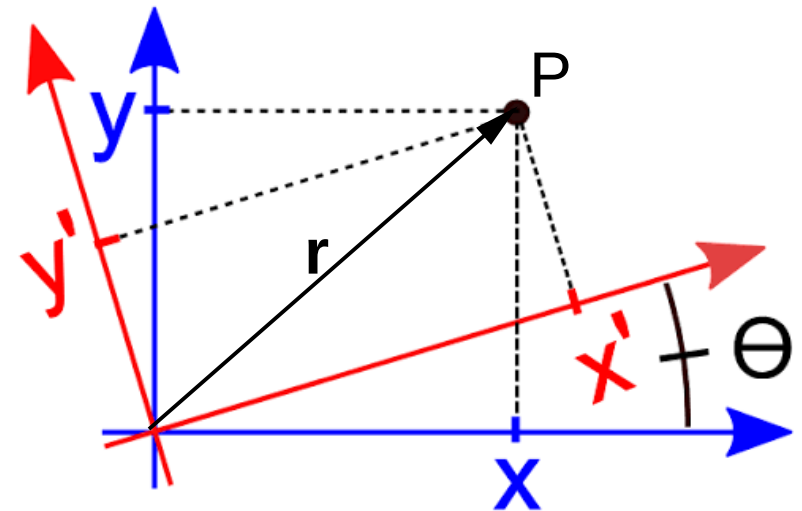
Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Lembrete (Geometria analítica)

Em uma **rotação** do **sistema** de **coordenadas** $S \rightarrow S'$ por um ângulo θ , a **transformação** de **coordenadas** de um **ponto** P (ou do **vetor posição** dele, r) é realizada pela **matriz de rotação**:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

!!! r (ou P) **não muda**. É apenas a **representação** por **coordenadas** (a perspectiva) que **muda**.



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Matriz de Rotação $\Leftrightarrow$ Norma

Para um **vetor** $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x \ \Delta y)$, a grandeza $\Delta \mathbf{r}^2 := \Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, chamada (quadrado do) **módulo** (ou, às vezes **norma**) de $\Delta \mathbf{r}$ **não muda** numa **rotação** (exercício: Mostre que $(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$)
 $\Rightarrow$ **invariante** por **rotações**

Na verdade, **pela invariante** conseguimos **determinar**, de que tipo de **transformação** se trata, ou como é a **matriz** que a realiza.

Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Matriz de Rotação $\Leftrightarrow$ Norma

Seja a **transformação** desconhecida:

$$\begin{bmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{então } (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 &= (A\Delta x + B\Delta y)^2 + (C\Delta x + D\Delta y)^2 \\ &= A^2(\Delta x)^2 + 2AB\Delta x\Delta y + B^2(\Delta y)^2 + C^2(\Delta x)^2 + 2CD\Delta x\Delta y + D^2(\Delta y)^2 \\ &= (A^2 + C^2)(\Delta x)^2 + (2AB + 2CD)\Delta x\Delta y + (B^2 + D^2)(\Delta y)^2 \\ \text{que } &\text{deve ser } (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^2 + C^2 = 1$$

$$AB + CD = 0$$

$$B^2 + D^2 = 1$$

Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Matriz de Rotação $\Leftrightarrow$ Norma

$$A^2 + C^2 = 1 \text{ (I)}, \quad AB + CD = 0 \text{ (II)}, \quad B^2 + D^2 = 1 \text{ (III)}$$

(I) e (III): A e C devem ser um **par sen/cos** do **mesmo ângulo**, a mesma coisa para B e D

$$\text{(II)} \quad A/D = -C/B \Rightarrow (A = D \text{ e } B = -C)^* \text{ ou } (A = -D \text{ e } B = C)^{**}$$

Já que queremos que **identidade** faz **parte** do nosso conjunto de **soluções**, $**$ é descartado, e chegamos em $A = \cos \theta$, $B = \sin \theta$, $C = -\sin \theta$, $D = \cos \theta$

exatamente a **matriz** de **rotação** per um ângulo θ !

(ainda daria para trocar B e C de sinal, mas isto dá no mesmo que trocar θ por $-\theta$, então também é da mesma forma)

$\Rightarrow$ Se sabemos que uma dada transformação deixa alguma **grandeza invariante** (a **norma** da transformação), dá para **determinar** a **transformação** a partir da invariante.

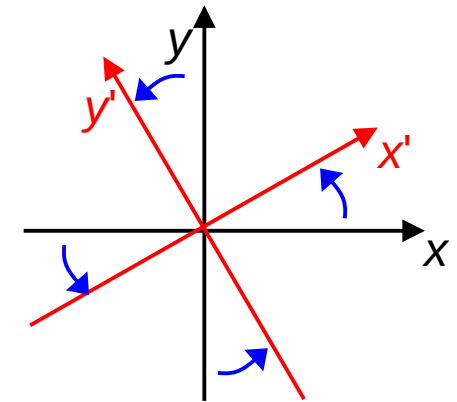
Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Transformação de Lorentz $\Leftrightarrow$ Norma

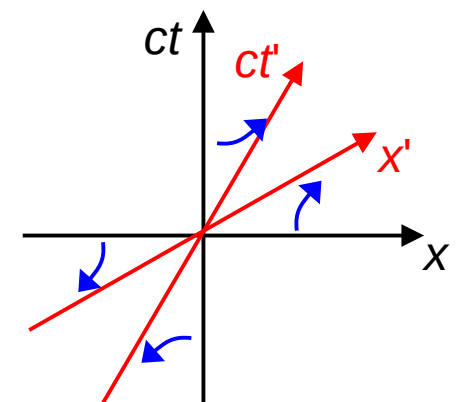
De maneira análoga, podemos usar a **invariante** da **transformação de Lorentz**, (ignorando y e z que não são afetados pelo *boost* no direção de x), para achar uma maneira de escrever a transformação de Lorentz que descreve, o que acontece no **diagrama espaço-tempo**:

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{bmatrix}$$

Rotação



Trf. de Lorentz



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Transformação de Lorentz $\Leftrightarrow$ Norma

Já sabemos que a transformação de Lorentz é realizada por **esta matriz**:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix},$$

mas vamos fingir que não,

e **determinar** A , B , C e D a partir da **invariante**:

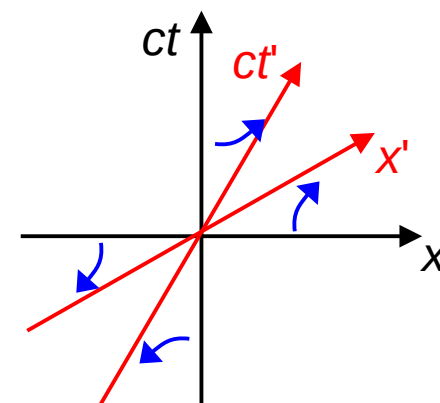
$$(c\Delta t')^2 - (x')^2 = (Ac\Delta t + Bx)^2 - (Cc\Delta t + Dx)^2 = (c\Delta t)^2 - (x)^2$$

$$\Rightarrow A^2 - C^2 = 1$$

$$AB - CD = 0$$

$$B^2 - D^2 = 1$$

Trf. de Lorentz



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Transformação de Lorentz $\Leftrightarrow$ Norma

$$A^2 - C^2 = 1 \text{ (I)}, \quad AB - CD = 0 \text{ (II)},$$

$$B^2 - D^2 = 1 \text{ (III)}$$

Estas condições são satisfeitas por
pares de senos e cossenos hiperbólicos
do **mesmo ângulo**:

Lembrete: $\text{ch } \phi = \frac{1}{2} \cdot (e^\phi + e^{-\phi}) = \cos i\phi$

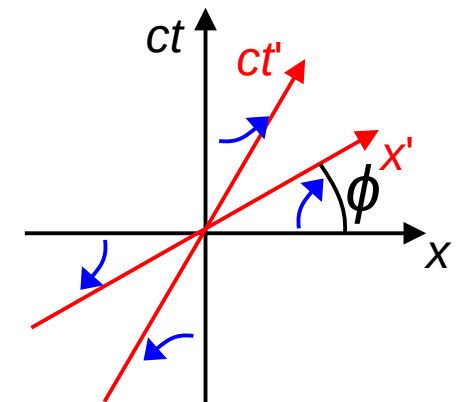
$$\text{sh } \phi = \frac{1}{2} \cdot (e^\phi - e^{-\phi}) = i^{-1} \cdot \text{sen } i\phi,$$

$$\text{ch } 0 = 1, \quad \text{sh } 0 = 0, \quad \text{ch}^2 \phi - \text{sh}^2 \phi = 1$$

Assim, a **transformação de Lorentz** se torna:

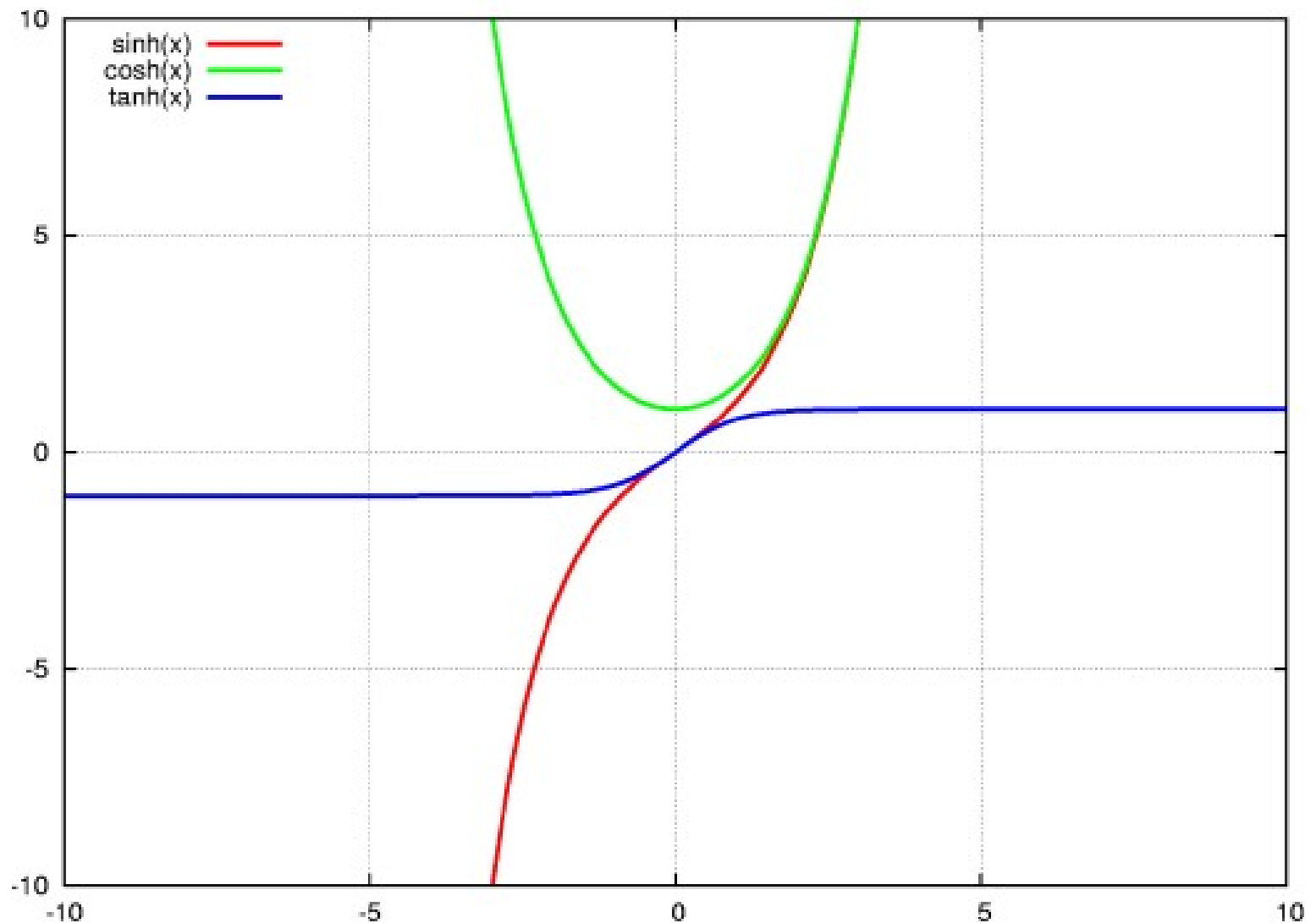
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & -\text{sh } \phi \\ -\text{sh } \phi & \text{ch } \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \text{ uma "rotação hiperbólica"}$$

Trf. de Lorentz



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Lembrete: O comportamento das funções hiperbólicas



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Relação Transformação de Lorentz $\Leftrightarrow$ Norma

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & -\text{sh } \phi \\ -\text{sh } \phi & \text{ch } \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

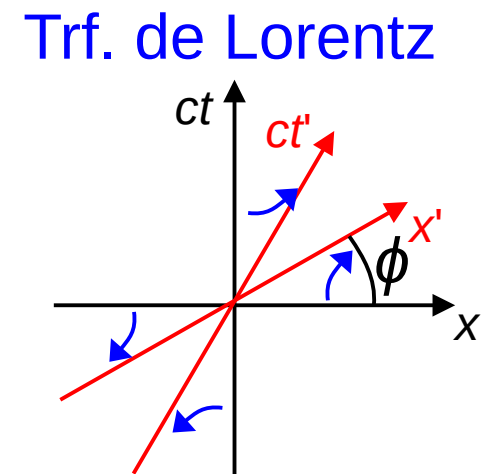
$$\Rightarrow \gamma = \text{ch } \phi, \beta = \text{sh } \phi / \text{ch } \phi = \text{th } \phi$$

Então, já que $\text{ch}^2 \phi - \text{sh}^2 \phi = 1$,

$\gamma^2 - (-\beta\gamma)^2$ também deve ser 1:

$$\gamma^2 - (-\beta\gamma)^2 = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \quad \checkmark$$

$\phi = \text{th}^{-1} u/c$ é chamado **rapidez** (em inglês *rapidity*) da transformação.



Interpretação Geométrica da Transformação de Lorentz

Adendo: Formalismo ict :

Já que $(\Delta ct)^2$ aparece com o sinal oposto que os quadrados das coordenadas espaciais na norma, e $\text{ch } \phi = \cos i\phi$ e $\text{sh } \phi = i^{-1} \cdot \text{sen } i\phi$, alguns autores definiram a coordenada temporal com valor imaginário, ict , assim a trf. de Lorentz vira:

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos i\phi & -i \cdot \text{sen } i\phi \\ i \cdot \text{sen } i\phi & \cos i\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix},$$

e a invariante (definida com o sinal oposto), $(\Delta ict)^2 + \Delta x^2$. Este formalismo é, às vezes chamado "formalismo ict ", mas ele tem várias desvantagens e caiu em desuso. (Em lugar disto, tratamos do sinal negativo pela métrica.)

Unidades Naturais

Na Relatividade e em outras áreas frequentemente se usa um sistema de **unidades naturais**, naquele a velocidade da luz no vácuo, **c** (no SI, $\sim 3 \cdot 10^8$ m/s) é igual a **1**.

Neste sistema:

- **Velocidades não** têm **unidades**, e valores ≤ 1 ,
- **Tempo** se mede em **metros**: 1 m de tempo é $\sim 3.3 \cdot 10^{-9}$ s (o tempo, naquele a luz no vácuo percorre 1 m),
- **Acelerações** têm unidades de $\text{m}/\text{m}^2 = \text{m}^{-1}$, e **Forças**, **kg/m**,
- **Massa**, **Energia** e **Momento Linear** têm as **mesmas** unidades, **kg**,
- Os **campos elétrico** e **magnético** também têm as **mesmas unidades**,
- etc.

Unidades Naturais

Para que se faz isso?

- Em muitos **cálculos** pode-se **omitir** fatores c , c^2 , c^{-2} , etc., tornando eles bem **menos laborosos** (por exemplo, alguns desta disciplina).
- Várias fórmulas se tornam mais **elegantes** e **simétricas**:
Exemplo: A transformação de Lorentz (só p. x e t) vira:
 $x' = \gamma \cdot (x - ut)$, $t' = \gamma \cdot (t - ux)$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$.

Existem **vários sistemas naturais**, naqueles algumas constantes fundamentais como c , a constante da gravitação G , a constante de Planck h (ou a reduzida $\hbar$), a carga elementar e , a massa do elétron m_e e/ou as do eletromagnetismo ϵ_0 e μ_0 (ou $4\pi\epsilon_0$ e $\mu_0/4\pi$) são igualadas a 1.

Quadrivetores (ou Tetravetores)

Já que o **espaço-tempo** ou espaço de **Minkovskij** tem **4 dimensões**, 3 espaciais e uma temporal, **vetores** neste espaço têm **4 componentes**.

Definimos como **quadrivector** A : $(A_0, A_1, A_2, A_3) = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

Outras notações que vocês talvez encontrarão:

$(A_0, \mathbf{A})$, (A_0, A_x, A_y, A_z) , $A^\alpha = (A^0, A^i) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$
e todas com a coordenada "temporal" em 4ª em lugar de 0ª posição
!!! atenção, se em algum trabalho há vetores com índices ambos em sub - e superscrito. Isto entra em assuntos fora do escopo deste disciplina

Exemplo: o **quadrivector evento**: $X = (X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
("posição no espaço-tempo") $= (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$

Quadrivetores (ou Tetravetores)

Outro exemplo:

Quadrivector deslocamente, basicamente a diferença de posição entre X_1 e X_2 : $\Delta X = \begin{pmatrix} ct_2 - ct_1 \\ x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$

É fácil de ver que a transformação de Lorentz (com $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, $\beta = u/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$), agora escrevendo y e z também, é realizada pela matriz Λ :

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \text{ ou } \Delta X' = \Lambda \Delta X$$

Já que a transformação inversa Λ^{-1} é a mesma, mas por $-\mathbf{u}$, a matriz é a mesma, trocando os $-\beta\gamma$ por $\beta\gamma$.

Exercício: Mostre que $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} =$ a matriz identidade.

Quadrivetores (ou Tetravetores)

!!! **Nem todas** as entidades com **4 componentes** $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ são **quadrivetores**, apenas as que se **transformam** sob uma **troca de referencial** como o **vetor deslocamento**, $A' = \Lambda A$, onde Λ é a **matriz** de uma **transformação de Lorentz geral**, i.e., um **boost** por uma velocidade **u** numa direção qualquer **mais** uma **rotação**.

Quadrivetores (ou Tetravetores)

Produto Escalar e Norma Quadrática

Definimos como **produto escalar** no **espaço** de **Minkovskij**

$$A \cdot B = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \text{ (!!! atenção com os sinais)}$$

e como **norma quadrática** de um quadrivector, o **produto escalar** dele **consigo mesmo**:

$$A^2 = A \cdot A = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - \mathbf{A}^2$$

!!! A^2 pode ser **negativa**, ou **nula** sem A ser $(0, 0, 0, 0)$, típico de uma **geometria não Euclidiana**.

Produto escalar e **norma** são **invariantes** numa **transformação** de **Lorentz** (prova igual como pro intervalo).

Quadrivetores

A Métrica do Espaço-Tempo da Relatividade Restrita,
ou do Espaço de Minkovskij

No caso do **vetor deslocamento**, a **norma quadrática** é
justamente o **intervalo** no **espaço-tempo**:

$$\Delta X^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta \mathbf{r}^2 = (\Delta s)^2,$$

por isto, a **métrica** deste espaço é:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= (cdt)^2 - (dr)^2 - (r \cdot d\theta)^2 - (r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi)^2\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas

Quadrivetores

A Métrica do Espaço-Tempo da Relatividade Restrita,
ou do Espaço de Minkovskij

Esta **métrica**, $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$,
é descrita pelo **tensor métrico** de **Minkovskij** g ou η :

$$(ds)^2 = dX \cdot dX = dX g dX$$

$$= (cdt \ dx \ dy \ dz) \underset{g \text{ ou } \eta \rightarrow}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Em geral, um **produto escalar** pode ser calculado por
 $A \cdot B = A g B$

Tempo Próprio

Definimos como **tempo próprio** τ de um **corpo** ou **partícula** **deslocando-se** com **velocidade** $\mathbf{v}$ em **relação** ao **referencial** S como o **tempo** no **referencial** de **repouso** dela:

Pela **dilatação** do **tempo**: $d\tau = dt/\gamma_v$, onde $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

!!! Aqui $\mathbf{v}$ **não** é a **velocidade relativa** de um **referencial** a um **outro**, mas a **velocidade** de uma **partícula** (mas pode ser interpretado como a velocidade do referencial de repouso da partícula em relação a S).

$d\tau^2 = dt^2/\gamma_v^2 = dt^2(1 - v^2/c^2) = dt^2 - \mathbf{v}^2 dt^2/c^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2/c^2$
 $= c^{-2}(c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2) = c^{-2} ds^2$, onde ds^2 é um **intervalo infinitesimal** ao longo da **linha** de **universo** da partícula).

Já que ds^2 é um **escalar invariante** de **Lorentz**, o **tempo próprio** também o é.

Quadrivetores

Quadrivector Velocidade

Se definíssemos um "quadrivector velocidade" como $(V_0, \mathbf{v})$, deixando para determinar V_0 depois, a transformada de Lorentz por $(u, 0, 0)$ seria $(\gamma V_0 - \beta \gamma v_x, -\beta \gamma V_0 + \gamma v_x, v_y, v_z)$, o que obviamente **não** é igual a $(V_0', \mathbf{v}')$, independentemente da escolha de V_0 . $\Rightarrow (V_0, v_x, v_y, v_z)$ **não** é um **quadrivector**.

mas $V = dX/d\tau = \gamma_v dX/dt = \gamma_v (cdt/dt, dx/dt, dy/dt, dz/dt)$
 $= \gamma_v (c, \mathbf{v}) = (\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v})$
é sim, um **quadrivector**, já que dX é um e $d\tau$ é um escalar invariante de Lorentz.

Quadrivetores

Quadrivector Velocidade

Da aula passada: $v_x' = (v_x - u) / (1 - uv_x/c^2)$

$$v_y' = v_y / \gamma_u(1 - uv_x/c^2), \quad v_z' = v_z / \gamma_u(1 - uv_x/c^2)$$

$$\Rightarrow v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$

$$= [(v_x - u)^2 + (v_y/\gamma_u)^2 + (v_z/\gamma_u)^2] / (1 - uv_x/c^2)^2$$

$$= [(v_x - u)^2 + (1 - u^2/c^2)v_y^2 + (1 - u^2/c^2)v_z^2] / (1 - uv_x/c^2)^2$$

$$= [v_x^2 - 2v_xu + u^2 + v_y^2 - u^2v_y^2/c^2 + v_z^2 - u^2v_z^2/c^2] / (1 - uv_x/c^2)^2$$

$$= [v^2 - 2v_xu + u^2 - u^2v_y^2/c^2 - u^2v_z^2/c^2] / (1 - uv_x/c^2)^2$$

Para **mostrar** que $V' = \Lambda V$, precisamos mostrar que

$$\gamma_u \gamma_v = \gamma_{v'} / (1 - uv_x/c^2) \quad (I),$$

$$\text{ou } \gamma_u^{-2} \gamma_v^{-2} = \gamma_{v'}^{-2} (1 - uv_x/c^2)^2 \quad (II)$$

Quadrivetores

Quadrivector Velocidade

$$\gamma_u^{-2} \gamma_v^{-2} = \gamma_{v'}^{-2} (1 - uv_x/c^2)^2 \quad (II)$$

Lado esquerdo de (II):

$$\gamma_u^{-2} \gamma_v^{-2} = (1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2) = 1 - u^2/c^2 - v^2/c^2 + u^2 v^2/c^4$$

Lado direito de (II): $\gamma_{v'}^{-2} (1 - uv_x/c^2)^2 = (1 - v'^2/c^2)(1 - uv_x/c^2)^2$

$$= (1 - uv_x/c^2)^2 - v'^2 (1 - uv_x/c^2)^2 / c^2$$

$$= (1 - uv_x/c^2)^2$$

$$- [v^2 - 2v_x u + u^2 - u^2 v_y^2/c^2 - u^2 v_z^2/c^2] / \cancel{(1 - uv_x/c^2)^2} \cdot \cancel{(1 - uv_x/c^2)^2} / c^2$$

$$= (1 - uv_x/c^2)^2 - [v^2 - 2v_x u + u^2 - u^2 v_y^2/c^2 - u^2 v_z^2/c^2] / c^2$$

$$= 1 - 2uv_x/c^2 + u^2 v_x^2/c^4 - v^2/c^2 + 2v_x u/c^2 - u^2/c^2 + u^2 v_y^2/c^4 + u^2 v_z^2/c^4$$

$$= 1 - \cancel{2uv_x/c^2} + u^2 v_x^2/c^4 + u^2 v_y^2/c^4 + u^2 v_z^2/c^4 - v^2/c^2 + \cancel{2v_x u/c^2} - u^2/c^2$$

$$= 1 + u^2 v^2/c^4 - v^2/c^2 - u^2/c^2 \quad \text{igual o lado esquerdo}$$

$$\Rightarrow \text{confirmado } \gamma_u \gamma_v = \gamma_{v'} / (1 - uv_x/c^2)$$

Quadrivetores

Calculando ΛV :

$$\begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v v_x \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v c - u \gamma_u \gamma_v v_x / c \\ -u \gamma_u \gamma_v + \gamma_u \gamma_v v_x \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v \cdot c(1 - uv_x/c^2) \\ \gamma_u \gamma_v \cdot (v_x - u) \\ \gamma_u \gamma_v \cdot v_y / \gamma_u \\ \gamma_u \gamma_v \cdot v_z / \gamma_u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_v / (1 - uv_x/c^2) \cdot c(1 - uv_x/c^2) \\ \gamma_v / (1 - uv_x/c^2) \cdot (v_x - u) \\ \gamma_v / (1 - uv_x/c^2) \cdot v_y / \gamma_u \\ \gamma_v / (1 - uv_x/c^2) \cdot v_z / \gamma_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v (v_x - u) / (1 - uv_x/c^2) \\ \gamma_v v_y / \gamma_u (1 - uv_x/c^2) \\ \gamma_v v_z / \gamma_u (1 - uv_x/c^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v v_x' \\ \gamma_v v_y' \\ \gamma_v v_z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda V = V'$$

A **quadrivelocidade** definida como $V = \gamma_v(c, v_x, v_y, v_z)$ se **transforma de maneira certa** (como o **vetor deslocamento**), então é um **quadrivetor**.

Quadrivetores

Quadrivetor Velocidade

$$V = \gamma_v(c, v_x, v_y, v_z) = (\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v})$$

A **norma quadrática** de V é

$$V^2 = V \cdot V = (\gamma_v c)^2 - (\gamma_v \mathbf{v})^2 = \gamma_v^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \gamma_v^2 (1 - \mathbf{v}^2/c^2) = c^2,$$

obviamente uma **invariante** de **Lorentz**.

De maneira similar, podemos definir o **quadrivetor aceleração** como $dV/d\tau = d^2X/d\tau^2$, mas este acaba não sendo muito importante para nós.

Anotem que, ao contrário que na mecânica newtoniana, na **Relatividade** a **aceleração não é invariante** numa troca de referencial.



Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

