



Universidade Federal do ABC

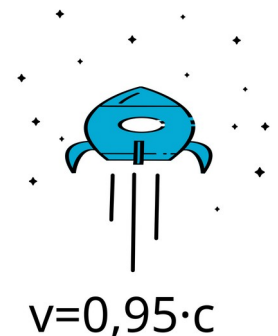
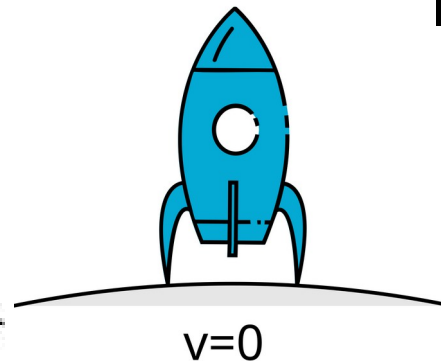
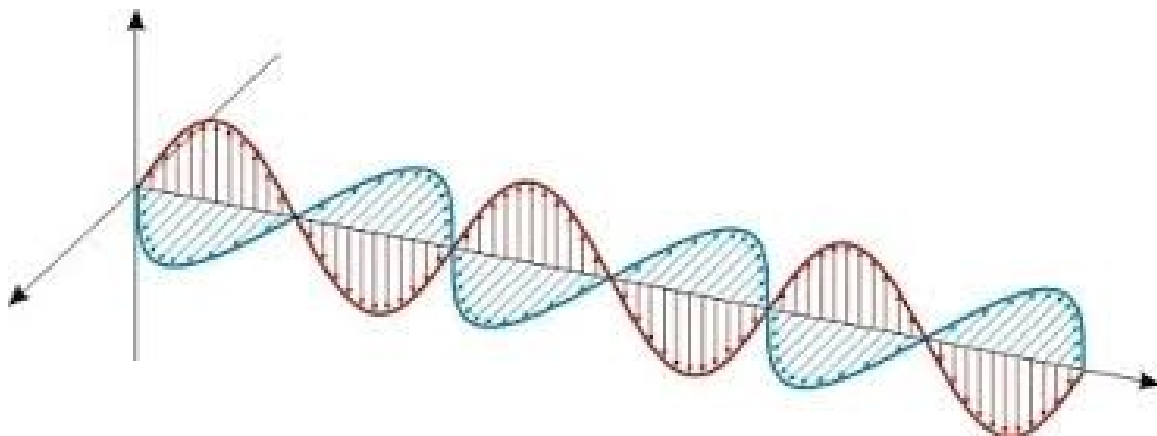
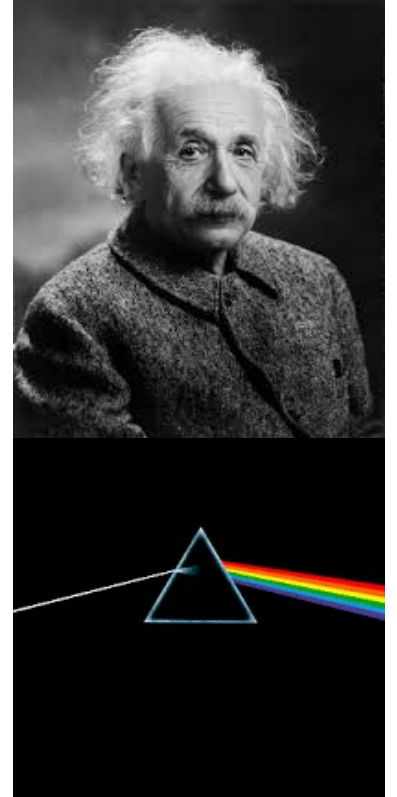
Ótica e Relatividade

17. Quadrivetor Energia-Momento, Conservação de Energia, Massa Invariante

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/OtRel.html>



Momento Linear e Energia Relativísticos

Uma das coisas que gostaríamos "salvar" da **mecânica Newtoniana** são os **conceitos** de **momento linear** e **energia**, junto com as **leis** de **conservação** destas grandezas, já que eles sempre se mostraram **muito úteis**.

Será que na **Relatividade** também existem estes conceitos, e a conservação deles?
E se for, **qual forma** eles assumem na nova teoria?

Começando pelo **momento linear**, a **hipótese** mais natural é que ele seja **igual** como na **física Newtoniana**, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

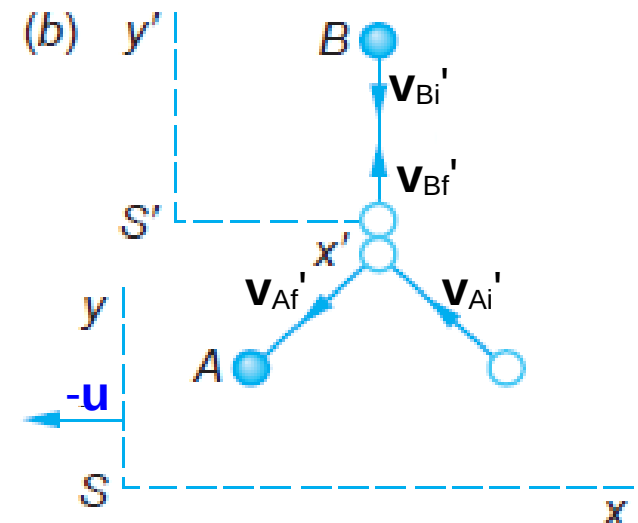
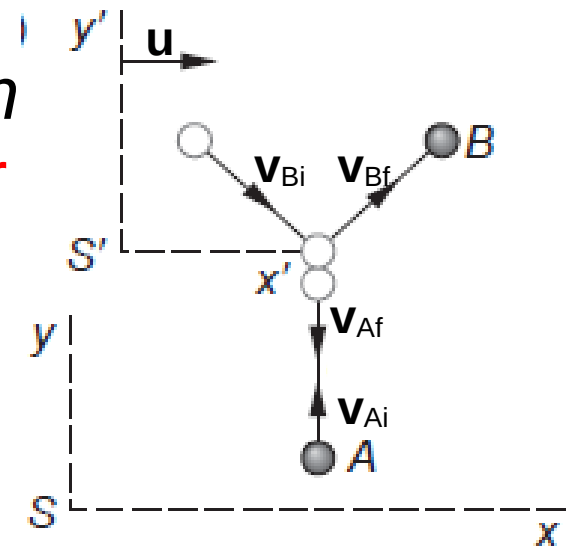
Momento Linear Relativístico

Olhando para uma **colisão perfeitamente elástica** de **duas partículas** com massa m como nesta figura, naquela o **observador** em S joga a **partícula A** na **direção $+y$** com a **mesma velocidade**, com aquela o **observador** em S' joga a **partícula B** na **direção $-y$** (i = inicial, f = final):

$$V_{Aiy} = -V_{Biy}' =: V_y,$$

e a **velocidade relativa** entre as **referenciais**, u , corresponde à **componente x** da **velocidade inicial** da **partícula B** em S ,

$$\mathbf{u} = (v_x := v_{Bix}, 0) \quad (S' \text{ se desloca junto com B na direção } x)$$



Momento Linear Relativístico

No referencial S :

Antes do choque:

$$\mathbf{v}_{Ai} = (0, v_y)$$

$$\mathbf{v}_{Bi} = ((v_{Bix}' + u)/(1 + uv_{Bix}'/c^2), v_{Biy}' / \gamma_u(1 + uv_{Bix}'/c^2)) \\ = (v_x, -v_y/\gamma_u)$$

Depois do choque:

$$\mathbf{v}_{Af} = (0, -v_y)$$

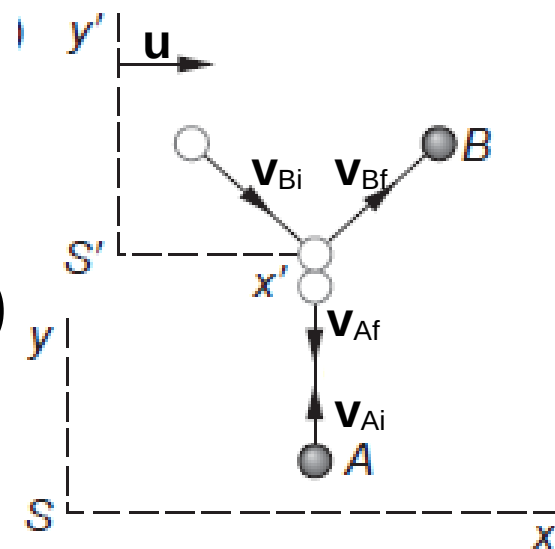
$$\mathbf{v}_{Bf} = (v_x, v_y/\gamma_u)$$

$$\mathbf{p}_{tot,i} = m\mathbf{v}_{Ai} + m\mathbf{v}_{Bi} = m(v_x, (1 - 1/\gamma_u)v_y)$$

$$\mathbf{p}_{tot,f} = m\mathbf{v}_{Af} + m\mathbf{v}_{Bf} = m(v_x, -(1 - 1/\gamma_u)v_y)$$

O momento linear em x é conservado, mas em y não!

Anote que, no limite não-relativístico, $\gamma_u \rightarrow 1$, este momento é conservado.



Momento Linear Relativístico

No referencial S' :

Antes do choque:

$$\mathbf{v}_{Ai} = (-v_x, v_y/\gamma_u)$$

$$\mathbf{v}_{Bi} = (0, -v_y)$$

Depois do choque:

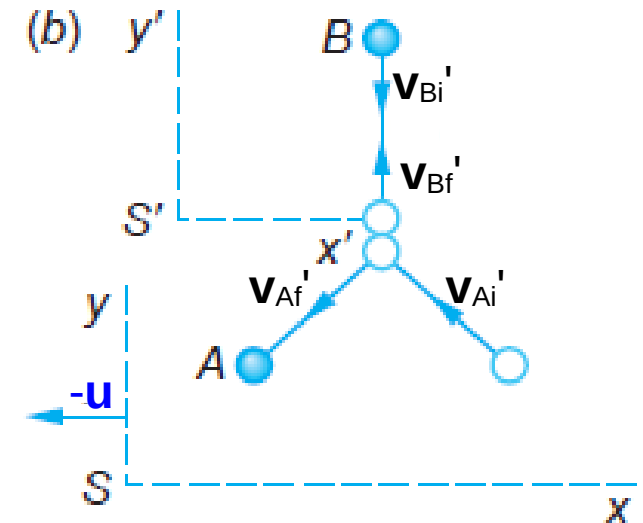
$$\mathbf{v}_{Af} = (-v_x, -v_y/\gamma_u)$$

$$\mathbf{v}_{Bf} = (0, v_y)$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot},i} = m\mathbf{v}_{Ai} + m\mathbf{v}_{Bi} = m(v_x, -(1-1/\gamma_u)v_y)$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot},f} = m\mathbf{v}_{Af} + m\mathbf{v}_{Bf} = m(v_x, (1-1/\gamma_u)v_y)$$

O mesmo resultado que antes: o momento linear em y não é conservado, e surgem problemas similares com a conservação da energia supondo $K = \frac{1}{2}mv^2$.



Momento Linear Relativístico

Voltando pro referencial S:

$$\mathbf{v}_{Ai} = (0, v_y), \mathbf{v}_{Bi} = (v_x, -v_y/\gamma_u)$$

$$\mathbf{v}_{Af} = (0, -v_y), \mathbf{v}_{Bf} = (v_x, v_y/\gamma_u)$$

Temos que **definir** um **momento linear** tal, que ele é **conservado** na **colisão**.

Faz **sentido** assumir $\mathbf{p} = X(v)m\mathbf{v}$, com $v = |\mathbf{v}|$

Pelo **princípio** de **correspondência**, $X(v) \rightarrow 1$ para $v \rightarrow 0$.

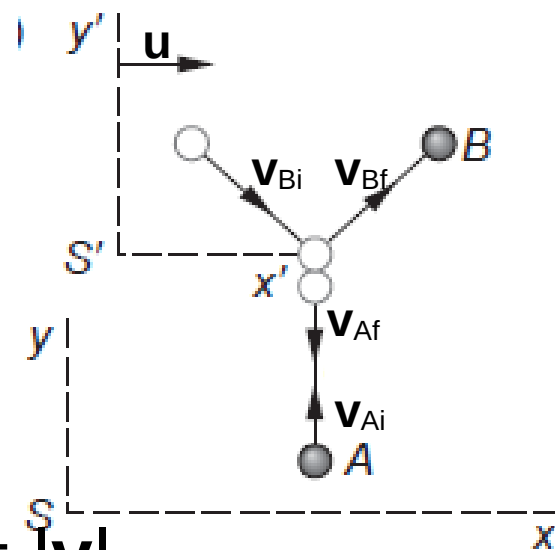
$$v_{Ai}^2 = v_{Af}^2 =: v_A^2 = v_y^2, v_{Bi}^2 = v_{Bf}^2 =: v_B^2 = v_x^2 + (v_y/\gamma_u)^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}_{iy} = X(v_A)mv_y - \gamma_u^{-1}X(v_B)mv_y = (X(v_A) - X(v_B)/\gamma_u)mv_y,$$

$$\mathbf{p}_{fy} = -X(v_A)mv_y + \gamma_u^{-1}X(v_B)mv_y = -(X(v_A) - X(v_B)/\gamma_u)mv_y$$

Conservação: $\mathbf{p}_{fy} - \mathbf{p}_{iy} = 0 \Rightarrow X(v_A) - X(v_B)/\gamma_u = 0$

$$\Rightarrow X(v_B) = \gamma_u X(v_A)$$



Momento Linear Relativístico

$\mathbf{p} = X(v)m\mathbf{v}$, com $v = |\mathbf{v}|$, $X(v) \rightarrow 1$ para $v \rightarrow 0$

$$v_A = v_y, v_B^2 = v_x^2 + (v_y/\gamma_u)^2$$

$$X(v_B) = \gamma_u X(v_A)$$

No limite $v_A \rightarrow 0 \Rightarrow v_B \rightarrow v_x = u$

$$\Rightarrow X(v_A) \rightarrow 1, X(v_B) = \gamma_u = \gamma_{v_B}$$

Omitindo o B: $X(v) = \gamma_v$

O **momento linear relativístico** de uma **massa** m com **velocidade** $\mathbf{v}$ é

$$\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}, \text{ onde } \gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

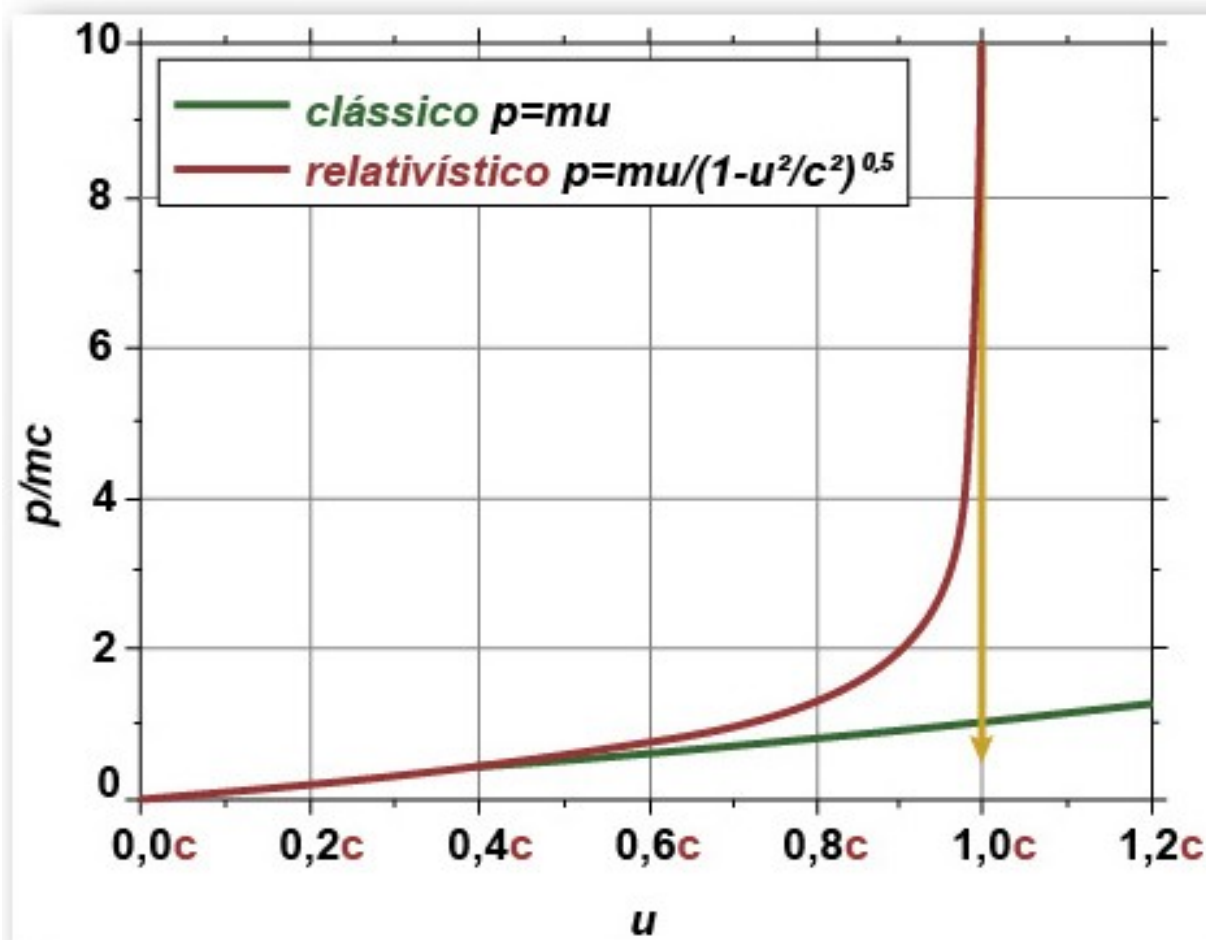
! O $\mathbf{v}$ aqui é a **velocidade** da **massa/corpo/partícula** no referencial de interesse, e **não** uma **velocidade relativa** entre **referenciais**.

Momento Linear Relativístico

É fácil de ver que o momento **tende** à **expressão clássica**, $m\mathbf{v}$, para **baixas velocidades**, e ao **infinito** para $v \rightarrow c$.

Exercício:

Confira que, usando $\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$, o **momento** é **conservado** no exemplo dos slides anteriores.



Energia Relativística

A partir de $\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$ podemos calcular a energia cinética relativística, supondo que ela é o resultado de uma força $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ que acelerou a massa, e que as relações clássicas $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ e $dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ valem

(a força $\mathbf{F}$ em si não é muito importante na Relatividade; a usamos apenas para este passo intermediário):

A energia cinética de uma massa m com velocidade v é obtida integrando dK de $v' = 0$ (onde $K = 0$) a $v' = v$:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^v F ds = \int_0^v dp/dt ds = \int_0^v d(\gamma_v m v')/dt ds \\ &= m \int_0^v d(\gamma_v v')/dt ds \end{aligned}$$

Energia Relativística

$$K = m \int_0^v d(\gamma_v v')/dt ds$$

Antes de continuar determinamos $d\gamma_v/dv'$ e $d(\gamma_v v')/dt$:

$$\begin{aligned} d\gamma_v/dv' &= d(1-v'^2/c^2)^{-1/2}/dv' = -2v'/c^2 \cdot (-1/2) \cdot (1-v'^2/c^2)^{-3/2} \\ &= v'/c^2 \cdot (1-v'^2/c^2)^{-3/2} *, \end{aligned}$$

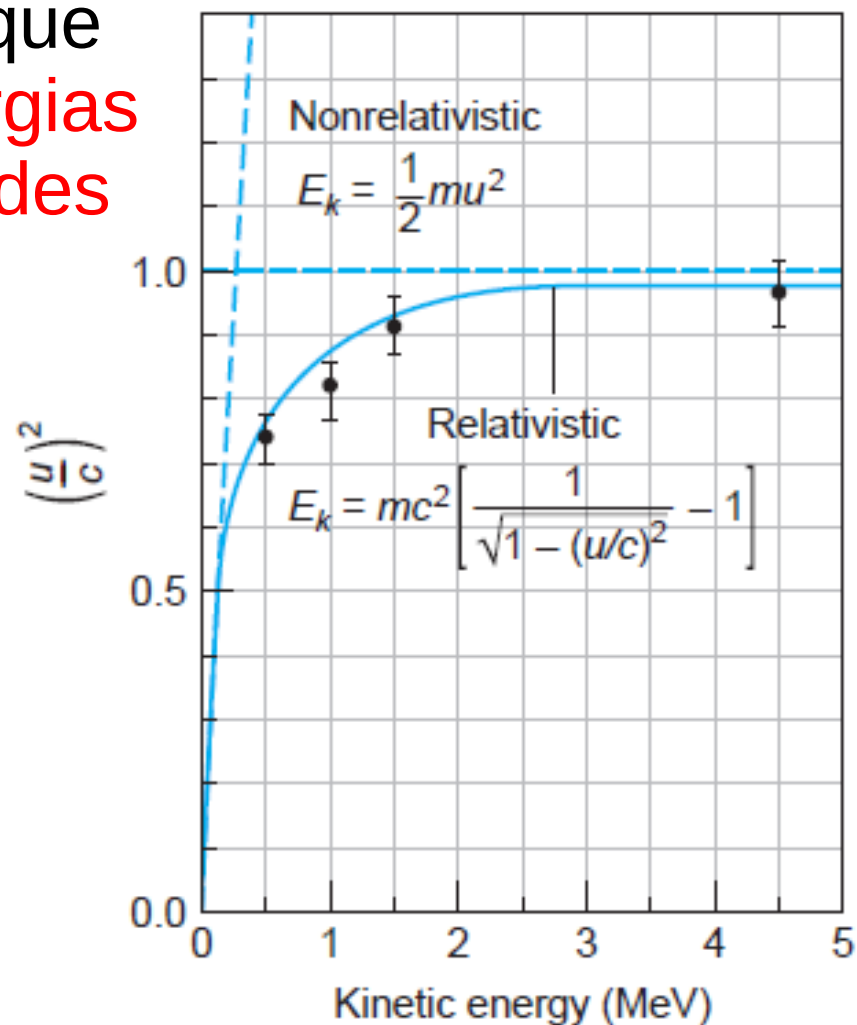
$$\begin{aligned} d(\gamma_v v')/dt &= d\gamma_v/dt \cdot v' + \gamma_v dv'/dt = d\gamma_v/dv' \cdot dv'/dt \cdot v' + \gamma_v dv'/dt \\ &= (d\gamma_v/dv' \cdot v' + \gamma_v) dv'/dt =* [v'/c^2 \cdot (1-v'^2/c^2)^{-3/2} \cdot v' + \gamma_v^{-2} \gamma_v^3] dv'/dt \\ &= [v'^2/c^2 \cdot (1-v'^2/c^2)^{-3/2} + (1-v'^2/c^2)(1-v'^2/c^2)^{-3/2}] dv'/dt \\ &= (1-v'^2/c^2)^{-3/2} dv'/dt ** \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= m \int_0^v d(\gamma_v v')/dt ds =** m \int_0^v (1-v'^2/c^2)^{-3/2} dv'/dt ds \\ &= m \int_0^v (1-v'^2/c^2)^{-3/2} ds/dt dv' = m \int_0^v (1-v'^2/c^2)^{-3/2} v' dv' \\ &= mc^2 \int_0^v (1-v'^2/c^2)^{-3/2} v'/c^2 dv' =* mc^2 [\gamma_v]_0^v = (\gamma_v - 1) mc^2 \\ &= \underbrace{\gamma_v mc^2}_E - \underbrace{mc^2}_{E_0} \end{aligned}$$

Energia Relativística

Relação de Energia Cinética com Velocidade

De fato, em **experimentos** em que **elétrons** são **acelerados** a **energias** de vários MeV e suas **velocidades** são **medidas**, as velocidades **seguem** esta **relação**, i.e., elas **não tendem** ao **infinito**, mas a **c**.



Momento Linear e Energia Relativísticos

Resumo

Momento linear relativístico: $\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$

Energia relativística: $E = \gamma_v mc^2$,
onde $E_0 = mc^2$ é a **energia de repouso**,
e $K = E - E_0 = (\gamma_v - 1) \cdot mc^2$, a **energia cinética**

Alguns ainda usam as grandezas massa de repouso, m (que é simplesmente a massa) e massa relativística, $\gamma_v m$.

!!! **Energia se manifesta como massa**, e vice-versa.

=> **Equivalência massa-energia**

para $v \ll c$: $\mathbf{p} \approx m \mathbf{v}$,

$K = ((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1) \cdot mc^2 = (1 + \frac{1}{2} \cdot v^2/c^2 + O((v/c)^4) - 1) \cdot mc^2 \approx \frac{1}{2} \cdot mv^2$

=> O **princípio de correspondência é satisfeito**.

Momento Linear e Energia Relativísticos

Exemplo: A Massa Relativística de Múons Cósmicos

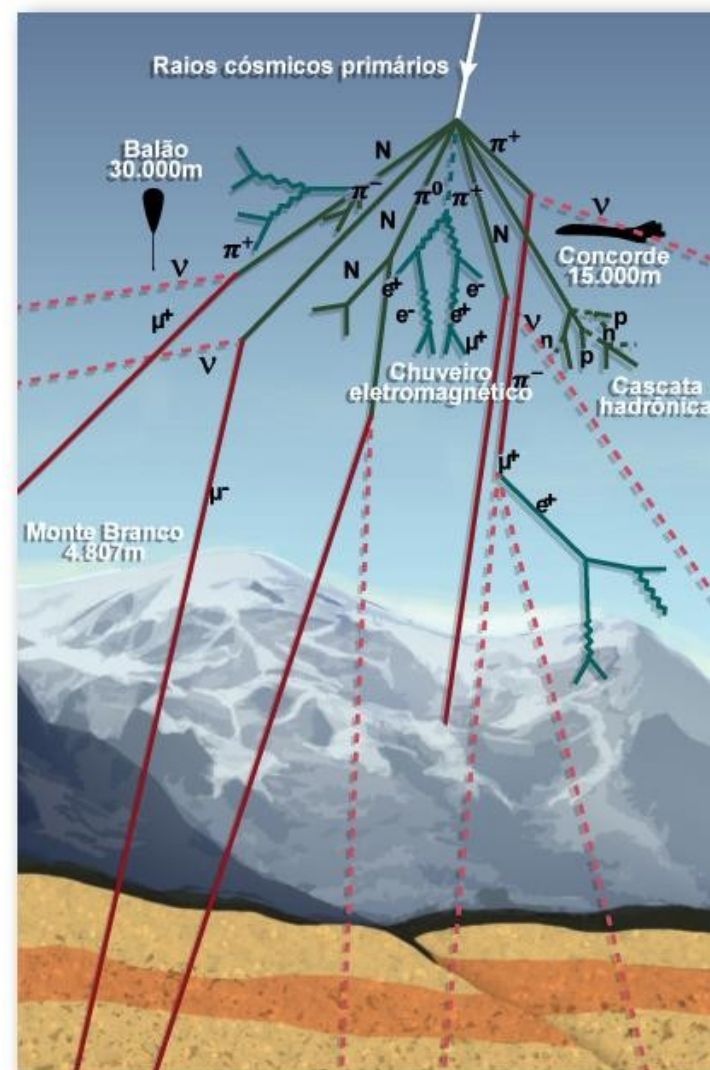
Já mencionamos os **múons**, μ , **cósmicos**, partículas criadas em **choques** de **raios cósmicos** com as partículas no topo da nossa **atmosfera**, que se deslocam de lá com **velocidades** $\sim 0.9952 c$ rumo Terra (em **relação à Terra**).

A **massa de repouso** do μ é $105.7 \text{ MeV}/c^2$ (Lembrem que $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Quanto são **energia** e a **massa relativística** medidas no **referencial da Terra**?

$$\gamma_v = 1/\sqrt{1-0.9952^2} = 10.22$$

$$\Rightarrow E_\mu = \gamma_v m_\mu c^2 = 1.08 \text{ GeV} = 1.73 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

$$m_\mu = E_\mu/c^2 = 1.08 \text{ GeV}/c^2 = 1.93 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



Momento Linear e Energia Relativísticos

Quadrivector Energia-Momento

Energia e momento relativísticos podem ser juntados em um quadrivector, o Quadrivector Energia-Momento, ou simplesmente Quadrivector Momento, Momento-Energia, Momenergia, Quadrimomento ou 4-momento:

$$P = (E/c, \mathbf{p}) = (\gamma_v mc, \gamma_v m \mathbf{v})$$

Isto é simplesmente o quadrivector velocidade da última aula, multiplicado pela massa do corpo/partícula, então fica evidente, que P é mesmo um quadrivector:

$$\Lambda P = \Lambda m V = m \Lambda V = m V' = P'.$$

A norma quadrática (invariante de Lorentz) é

$$P \cdot P = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 V \cdot V = m^2 c^2$$

Momento Linear e Energia Relativísticos

Quadrivector Energia-Momento

Para **fótons** e outras **partículas sem massa** (glúons, os hipotéticos grávitons), a **energia** é $E = h\nu = hc/\lambda$, e o **momento** $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$, **vetorial**: $\mathbf{p} = h\nu/c \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é o **vetor unidade** na **direção** da **propagação** do **fóton**:

=> **Quadrivector Momento** do **fóton**:

$$P = h\nu/c \cdot (1, \mathbf{n})$$

A **norma quadrática** é

$$E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = (h\nu/c)^2 - (h\nu/c)^2 = 0,$$

lógico, já que a **massa** do **fóton** é **nula**.

Momento Linear e Energia Relativísticos

Momento Linear e Energia Relativísticos

Fórmula útil: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

! Para $m \neq 0$ e $v \rightarrow c$, p e $E \rightarrow \infty$,
um dos motivos, por aqueles **objetos** com **massa não**
podem alcançar a **velocidade da luz**.

Objetos **sem massa** (fótons, ...) **têm** que se movimentar
com a **velocidade da luz**. Senão eles teriam p e E **zero**
(e não existiriam).

para estes, a última fórmula se reduz à já conhecida
relação de de Broglie: $E = pc$

(lembrem a aula sobre pressão da radiação, onde tivemos $\Delta p = \Delta E/c$?)

Assim, fótons e afins têm, sim, uma **massa relativística**
ou - **dinâmica**: $m_{\text{rel}} = E/c^2 = p/c = h\nu/c^2 = h/c\lambda$

Relatividade Restrita

Partículas de Massa Nula no Modelo Padrão

Fóton: É a **partícula mediadora** da **força eletromagnética** e, por **não** ter **massa**, pode "viajar" a **máxima velocidade permitida**.

Glúons: São as **partículas mediadoras** da **força nuclear forte**, que **mantém** os **quarks unidos** dentro de prótons e nêutrons.

Existem oito tipos de glúons, e todos são considerados **sem massa**.

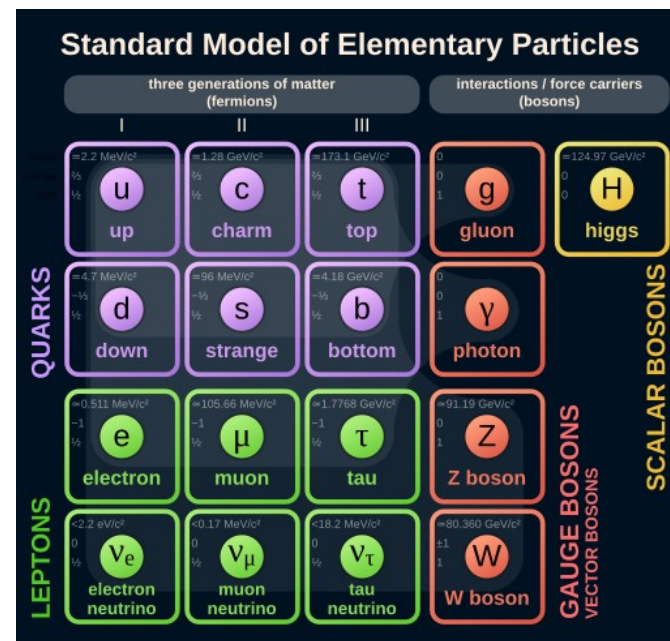
Standard Model of Elementary Particles					
three generations of matter (fermions)			interactions / force carriers (bosons)		
QUARKS	I	II	III		
	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ u up	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ c charm	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ t top	0 0 g gluon	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$ 0 H higgs
	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{1}{3}$ d down	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{1}{3}$ s strange	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{1}{3}$ b bottom	0 0 γ photon	
LEPTONS	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$ -1 e electron	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$ -1 μ muon	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$ -1 τ tau	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$ 0 Z Z boson	
	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$ 0 ν_e electron neutrino	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$ 0 ν_μ muon neutrino	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$ 0 ν_τ tau neutrino	$\approx 80.360 \text{ GeV}/c^2$ ± 1 W W boson	
				GAUGE BOSONS VECTOR BOSONS	SCALAR BOSONS

Relatividade Restrita

Partículas de Massa Nula no Modelo Padrão

O **Modelo Padrão original** postulava que os **neutrinos** (léptons neutros) **não** possuíam **massa**, assim como os fótons e glúons.

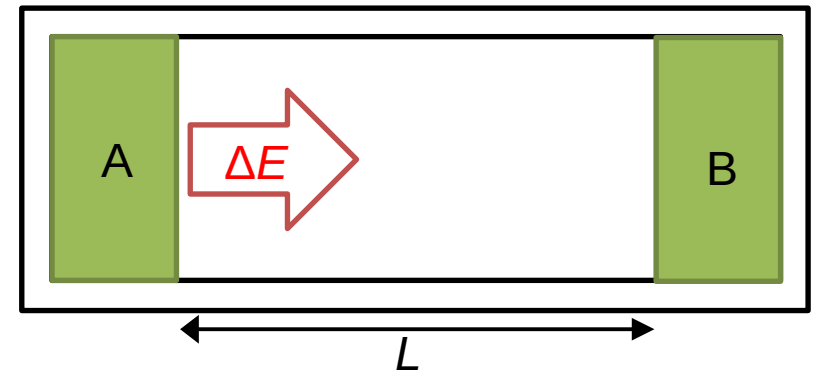
No entanto, **experimentos** posteriores, especialmente aqueles que observaram a **oscilação** de **neutrinos** (neutrinos mudando de um tipo para outro), provaram que os **neutrinos possuem massa**, embora seja uma massa muito pequena. Essa descoberta da massa dos neutrinos é um dos **desafios** para o **Modelo Padrão**, pois este **não prevê** diretamente **como** os neutrinos **adquirem** essa **massa**.



Conservação de Massa-Energia

Discussão de Einstein no artigo de 1905

Considere uma **cavidade** **evacuada** de **comprimento** L . Nas **extremidades** encontram-se **corpos** A e B com **massas desprezíveis** comparadas à **massa total** M .



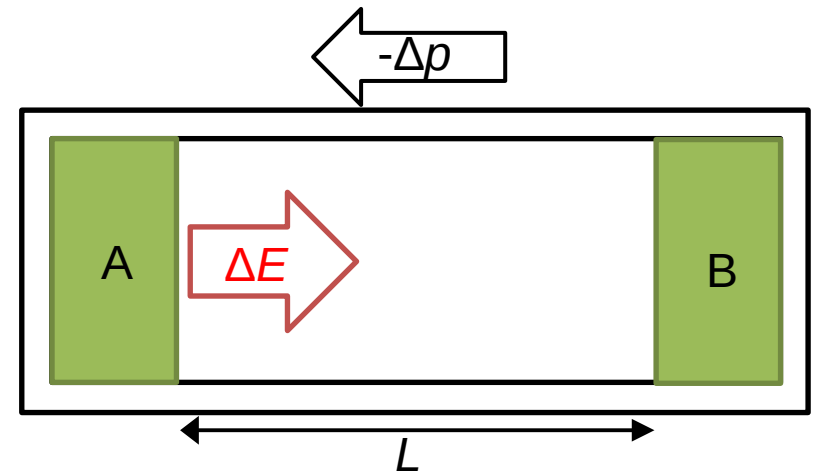
Suponha que A **transmita** um "**pulso**" de **energia** ΔE (pulso de luz) para B. Consideremos que o **tempo** do processo **emissão/absorção** é **desprezível** comparado ao tempo de **transmissão**: $T = L/c$

Esse pulso **transporta momento** dado por: $\Delta p = \Delta E/c$

Conservação de Massa-Energia

Discussão de Einstein no artigo de 1905

Pela lei de **conservação de momento** o **centro de massa** (CM) do **sistema** (isto é, a cavidade com os corpos A e B, mas sem a luz) deve ter um **momento de recuo** dado por $-\Delta p$ no sentido de B para A pelo tempo T , assim temos um **deslocamento**:

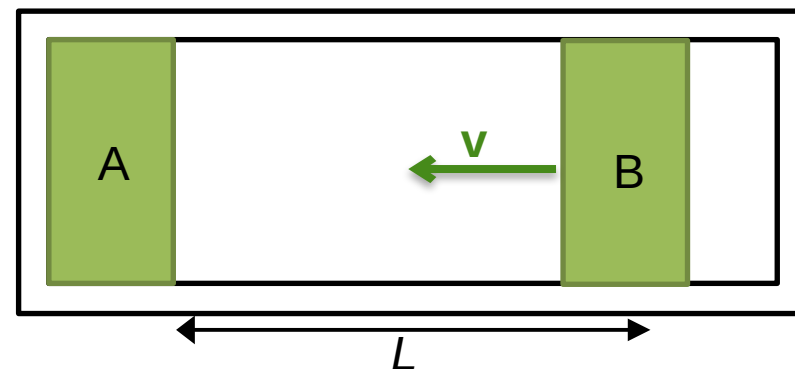


$$-\Delta p/M \cdot T = -\Delta E/Mc \cdot L/c = -L/Mc^2 \cdot \Delta E \quad (\text{sentido } B \rightarrow A)$$

Conservação de Massa-Energia

Discussão de Einstein no artigo de 1905

Após **absorver** a radiação, o **corpo B** se **desloca**, devido a um dispositivo (**interno** ao **sistema**, com **velocidade** v , até **atingir** o **corpo A**).



Se a **massa B**, após **absorver** ΔE é m_1 , então novamente o **CM** do **sistema** vai **adquirir** (durante o movimento de B), uma **velocidade** dada por $V = m_1/M \cdot v$ de A para B.

Esse **movimento** ocorre pelo **tempo** L/v até o **corpo B** **atingir** o **A**.

Neste tempo, o **CM** (da cavidade sem B) se **deslocou** por $V \cdot L/v = m_1/M \cdot L$ (sentido $A \rightarrow B$)

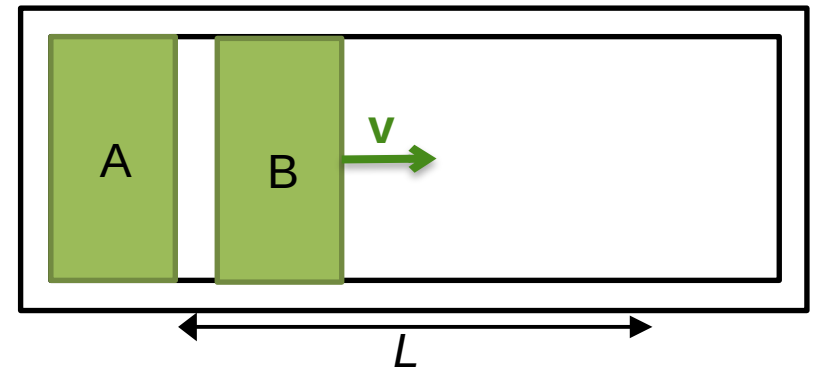
Conservação de Massa-Energia

Discussão de Einstein no artigo de 1905

Após o **corpo B atingir o A**, ele **transfere a energia ΔE** para A, ficando com uma **massa m_2** e se **desloca de volta** para a posição anterior.

Como antes, agora temos um **deslocamento do CM**, dado por:

$-m_2/M \cdot L$ (sentido $B \rightarrow A$)



Conservação de Massa-Energia

Discussão de Einstein no artigo de 1905

Ao voltar para a **posição original**, a **situação** é a **idêntica** à **inicial**.

E o **deslocamento** do **CM** pode ser contabilizada como:

$$\Delta x = L/M \cdot (m_2 - m_1 - \Delta E/c^2)$$

(sentido A $\rightarrow$ B)



Contudo, tudo ocorreu **apenas** com **forças internas** e, portanto, a **cavidade** deve estar no **mesmo lugar** do **começo**, ou seja, $\Delta x = 0$. Então: $m_2 - m_1 = \Delta E/c^2$

Isso nos leva à famosa relação: **$E = mc^2$**

Implicações de $E = mc^2$

Equivalência Massa-Energia: Massa e energia são duas manifestações da mesma coisa. A massa pode ser convertida em energia, e vice-versa.

Energia de Repouso: Qualquer objeto com massa possui uma quantidade inerente de energia (energia de repouso). Isso foi um conceito radical, pois a física clássica de Newton considerava que um objeto em repouso não possuía energia (exceto sua energia potencial, se em um campo).

Implicações de $E = mc^2$

Conservação Massa-Energia: Em vez de leis separadas para a conservação da massa e da energia, a Relatividade unificou-as em uma única lei de conservação massa-energia. A soma total de massa e energia em um sistema isolado permanece constante.

A equivalência massa-energia tem sido confirmada com extrema precisão em experimentos, por exemplo, na medição da energia liberada em reações nucleares e na comparação com a perda de massa correspondente.



Implicações de $E = mc^2$

Defeito ou Déficit de Massa

Um **átomo**, por exemplo de hidrogênio, tem **menos massa** que seus **núcleo** e **elétrons somados**.

Isto é, por que o átomo tem **menos energia** que seus **constituintes separados**.

A diferença é justamente a **energia de ligação**.

O efeito é pequeno, no caso do átomo de hidrogênio $13.6 \text{ eV}/c^2 = 2.4 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$ ($\ll m_e$), mas **mensurável**.

O mesmo acontece com os **núcleos estáveis** e seus **constituintes, prótons e nêutrons**.

Neste caso, a diferença é bem maior, da ordem de **MeV/c²**, e é base de **energia nuclear**.

Implicações de $E = mc^2$

Exemplo: O Núcleo de Deutério d

É um **isótopo** do **hidrogênio**, cujo **núcleo** consiste de **um próton** p^+ e **um nêutron** n .

$$m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2,$$

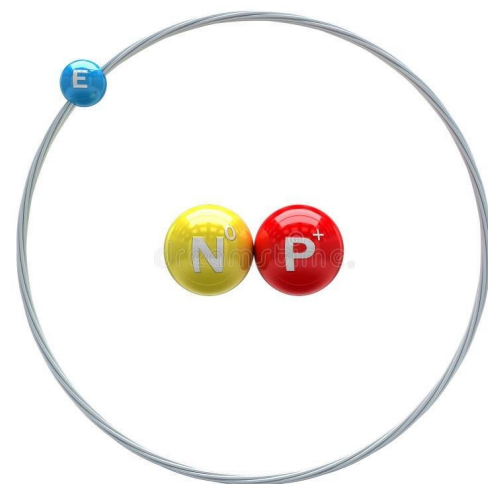
$$m_n = 938.565 \text{ MeV}/c^2 \text{ e}$$

$$m_d = 1875.613 \text{ MeV}/c^2$$

(isto é, o núcleo do d)

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_d - (m_p + m_n) &= (1875.613 - 938.272 - 938.565) \text{ MeV}/c^2 \\ &= -1.244 \text{ MeV}/c^2 = -2.18 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \end{aligned}$$

Já que isto é **negativo**, $m_d < m_p + m_n$, o **deutério** é **estável**, e a **energia de ligação** do **núcleo** de d = 1.244 MeV.



Implicações de $E = mc^2$

Isótopos do Hidrogênio

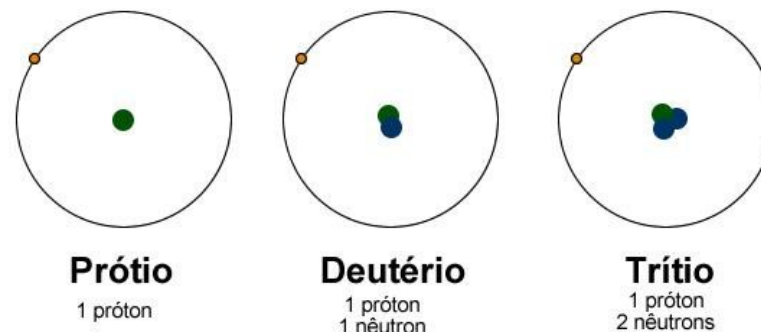


Table 2-1 Rest energies of some elementary particles and light nuclei

Particle	Symbol	Rest energy (MeV)
Photon	γ	0
Neutrino (antineutrino)	ν ($\bar{\nu}$)	$<1 \times 10^{-6}$
Electron (positron)	e or e^- (e^+)	0.5110
Muon	$\mu^- \mu^+$	105.7
Pi mesons (pions)	π^- (π^0) π^+	139.6 (135) 139.6
Proton	p	938.272
Neutron	n	939.565
Deuteron	${}^2\text{H}$ or d	1875.613
Helion	${}^3\text{He}$ or h	2808.391
Alpha	${}^4\text{He}$ or α	3727.379

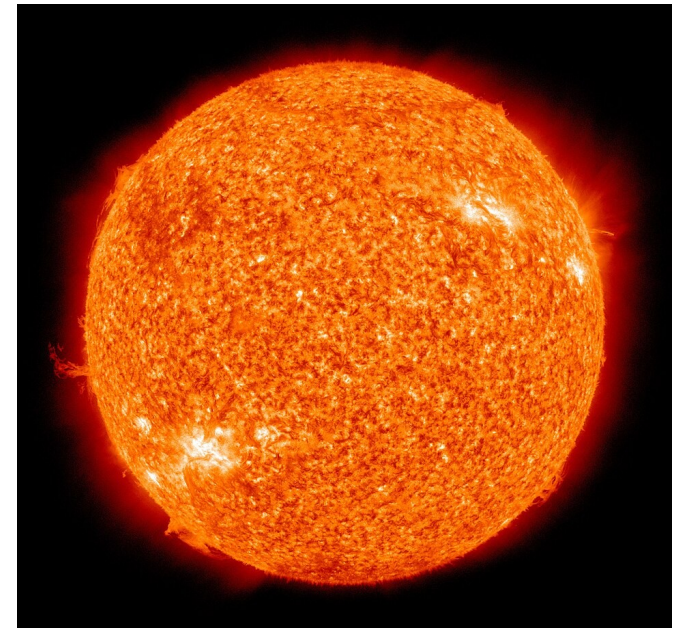
Implicações de $E = mc^2$

A Fonte de Energia do Sol

Como mencionado na aula sobre energia e pressão da radiação ($\Rightarrow$ parte Ótica Ondulatória), a **intensidade** da **radiação solar** na **vizinhança** da **Terra** é $\sim 1400 \text{ W/m}^2$

Já que a Terra se encontra a uns $d = 150 \text{ mi. km}$ do Sol, e que o Sol irradia aproximadamente isotropicamente em todas as direções, isto significa que a **luminosidade** (potência) **total** do **Sol** é

$$L_{\odot} = 4\pi d^2 I = 4\pi (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 1400 \text{ W/m}^2 = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}$$



Implicações de $E = mc^2$

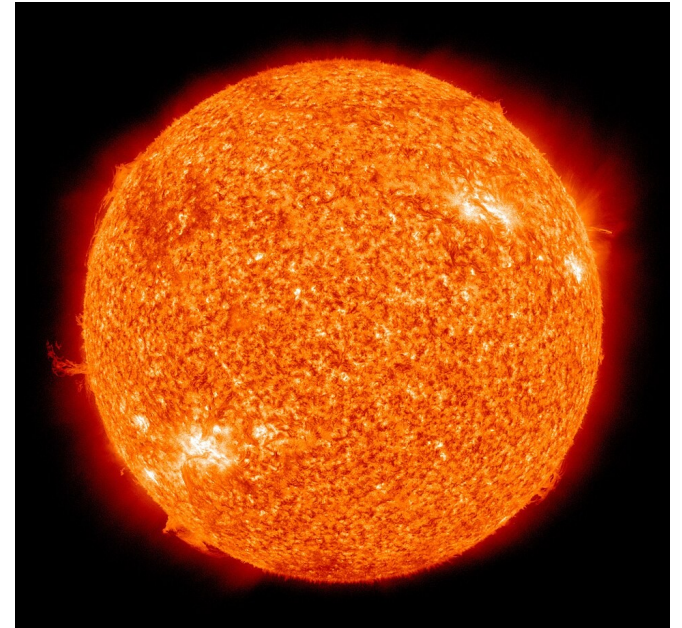
A Fonte de Energia do Sol

O Sol tem idade $4.57 \cdot 10^9$ anos e irradia $L_{\odot} = 3.9 \cdot 10^{26}$ W.

De onde ele tira esta energia toda?

Cálculos supondo que a fonte seria energia potencial gravitacional liberada na sua contração, ou energia química não chegam nem perto da energia necessária para explicar a luminosidade do Sol.

No final do século XIX a fonte de energia do Sol era um mistério.



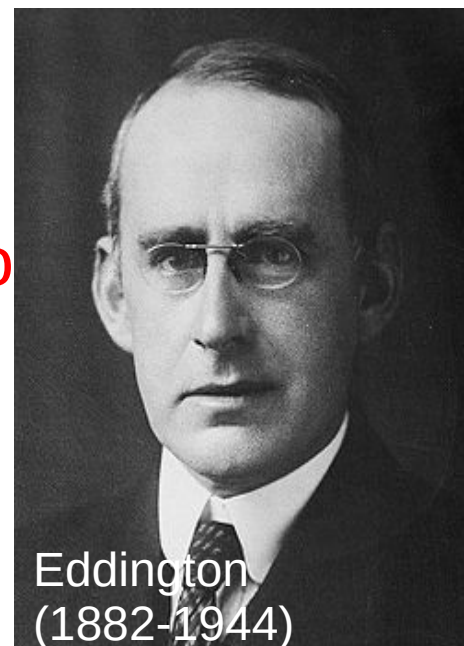
Implicações de $E = mc^2$

A Fonte de Energia do Sol

Em 1920, F. W. Alston descobriu que um átomo de hélio tem da ordem de 7% menos massa que 4 átomos de hidrogênio.

No mesmo ano, Sir Arthur Stanley Eddington levantou a hipótese, baseado na equivalência massa-energia da Relatividade, que a fonte de energia do Sol poderia ser a transformação de hidrogênio em hélio por fusão nuclear.

Até hoje, isto é a única fonte suficientemente rendosa para explicar a luminosidade do Sol. De fato, modelos sofisticados da estrutura e de criação e transporte de energia no Sol não deixam dúvidas, de que a fonte principal de energia do Sol, e das estrelas em geral, é a fusão nuclear.

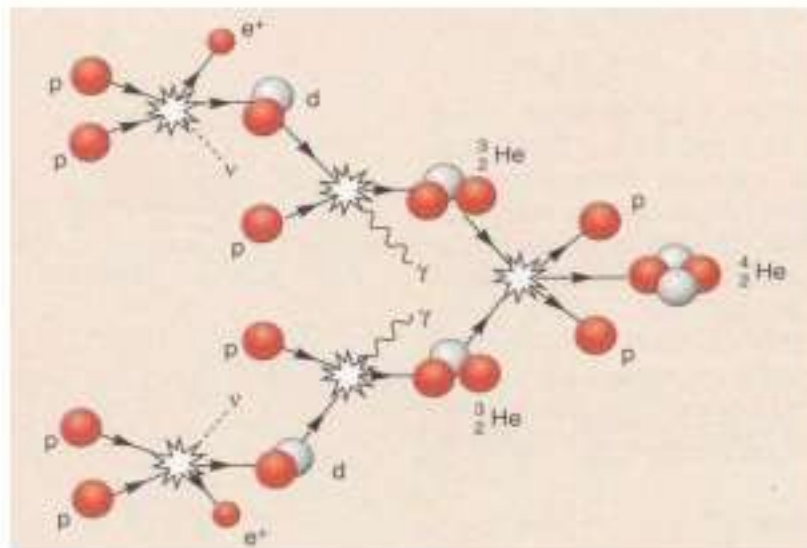
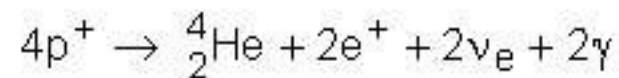


Implicações de $E = mc^2$

No **Sol**, isto acontece predominantemente por um processo chamado **cadeia p-p** (próton-próton).

Já que, **inicialmente**, 74% da massa do Sol era **hidrogênio**, ele tinha um **estoque** para gerar por "queima" (fusão nuclear) de hidrogênio uma energia de:

$\Delta m \cdot c^2 = 0.007 \cdot M_{\text{H}} c^2 = 0.007 \cdot 0.74 \cdot M_{\odot} c^2 = 9.3 \cdot 10^{44} \text{ J}$,
o suficiente para brilhar por **75 bio. anos** à taxa atual, de 10^{38} transformações $4\text{H} \rightarrow \text{He}$ por segundo.



Implicações de $E = mc^2$

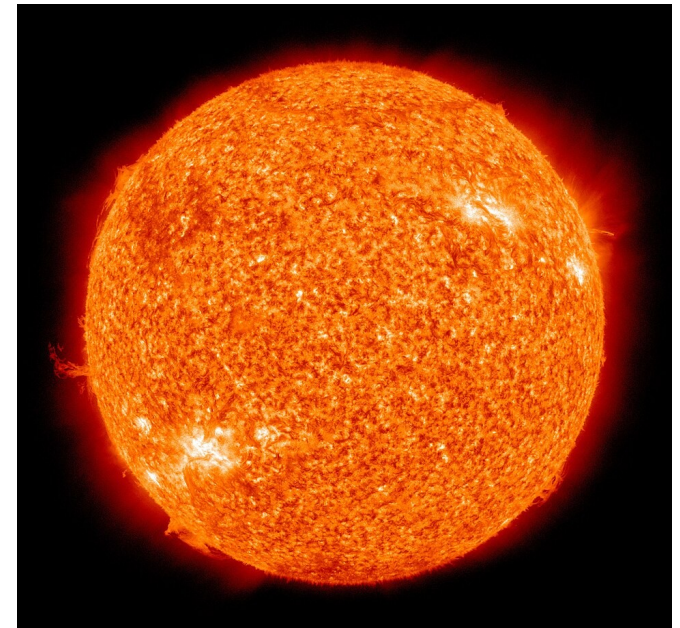
A variação da massa do Sol

Se o Sol irradia $L_{\odot} = 3.9 \cdot 10^{26}$ W, segundo $E = mc^2$, ele deve **perder massa**.

A **taxa** de **perda** de **massa** é

$$\begin{aligned} dM_{\odot}/dt &= d(E_{\odot}/c^2)/dt = 1/c^2 \cdot dE_{\odot}/dt \\ &= L_{\odot}/c^2 \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{ kg/s} \\ &\approx 1.4 \cdot 10^{17} \text{ kg/ano} \end{aligned}$$

Já que a **massa total** da nossa estrela mãe é $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg, ela pode **brilhar** ainda por **muito tempo**.

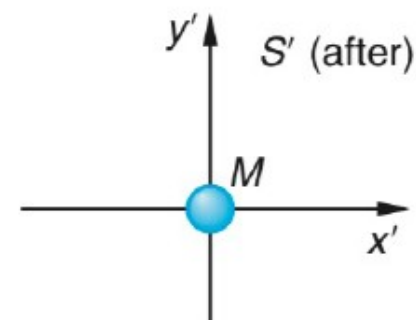
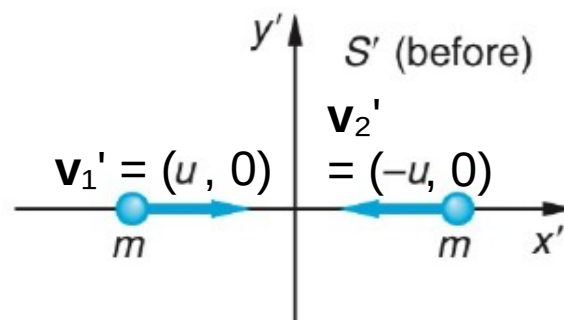


Dinâmica Relativística

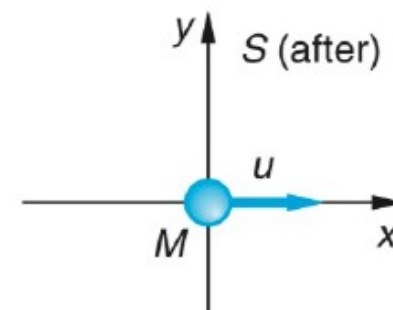
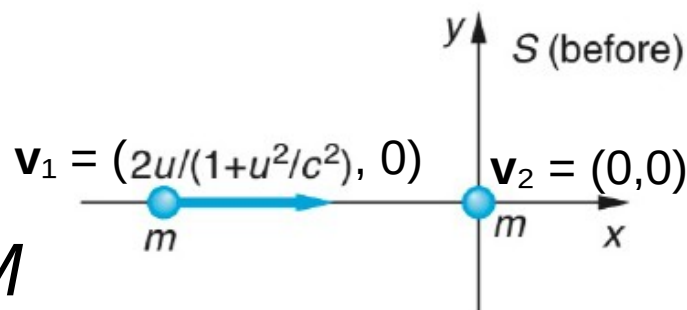
Colisão perfeitamente inelástica

É uma **colisão**, naquela
as **partículas** ficam
"**grudadas**" uma à outra
depois do choque,
como nestas figuras,
em S e S' (na configura-
ção de sempre).

(a)



(b)



Vamos **calcular** a
energia total nos
dois referenciais,
e determinar a **massa** M
da partícula **formada** pelas duas **partículas grudadas**.

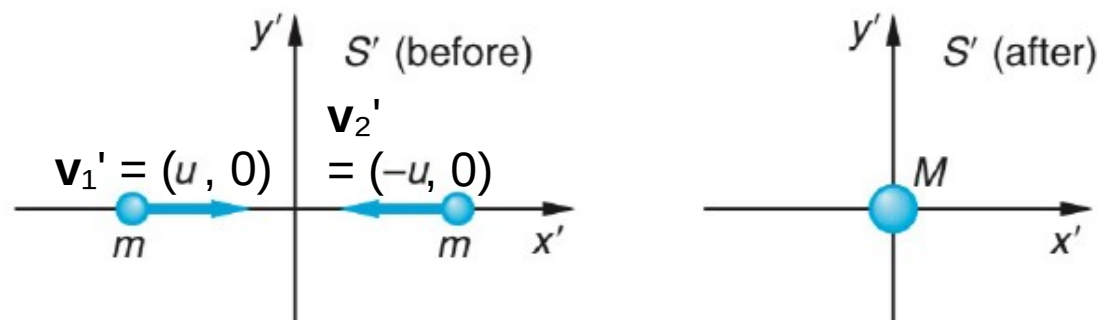
Dinâmica Relativística

Colisão perfeitamente inelástica

Primeiro em S' :

(a)

$$M = E/c^2 = (E_1 + E_2)/c^2 \\ = 2\gamma_u mc^2/c^2 = \mathbf{2\gamma_u m}$$



Dinâmica Relativística

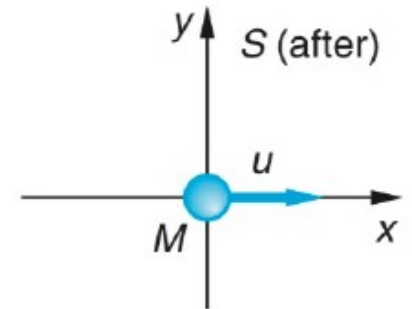
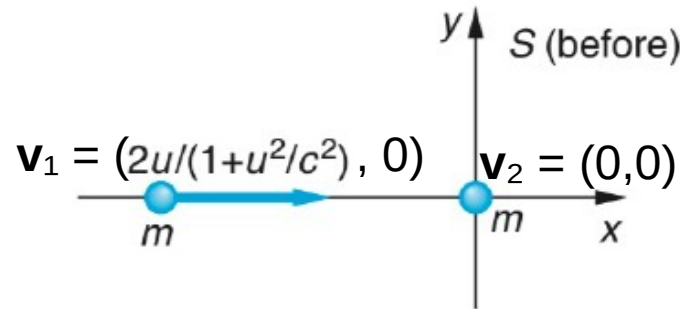
Colisão perfeitamente inelástica

Agora em S :

Definindo $\beta := u/c$:

$$\begin{aligned} \gamma_{v_1} &= (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} \\ &= (1 - (2u/(1 + \beta^2))^2/c^2)^{-1/2} \\ &= (1 - 4\beta^2/(1 + \beta^2)^2)^{-1/2} \\ &= (((1 + \beta^2)^2 - 4\beta^2)/(1 + \beta^2)^2)^{-1/2} \\ &= ((1 + 2\beta^2 + \beta^4 - 4\beta^2)/(1 + \beta^2)^2)^{-1/2} \\ &= ((1 - 2\beta^2 + \beta^4)/(1 + \beta^2)^2)^{-1/2} \\ &= ((1 - \beta^2)^2/(1 + \beta^2)^2)^{-1/2} \\ &= (1 + \beta^2)/(1 - \beta^2) \end{aligned}$$

(b)



Dinâmica Relativística

Colisão perfeitamente inelástica

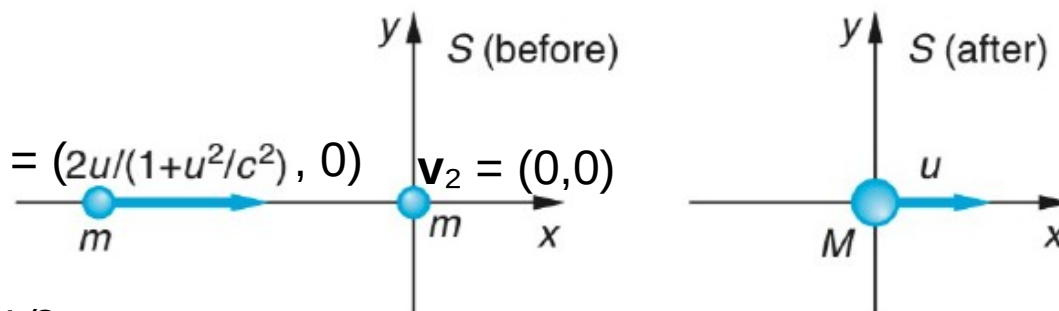
Agora em S:

(b)

$$\Rightarrow M = E/\gamma_u c^2$$

$$= (E_1 + E_2)/\gamma_u c^2$$

$$= (\gamma_{v_1} m c^2 + \gamma_{v_2} m c^2)/\gamma_u c^2 \quad \mathbf{v}_1 = (2u/(1+u^2/c^2), 0) \quad \mathbf{v}_2 = (0,0)$$



$$= ((1+\beta^2)/(1-\beta^2) + 1)(1-\beta^2)^{1/2} \cdot m$$

$$= ((1+\beta^2+1-\beta^2)/(1-\beta^2))(1-\beta^2)^{1/2} \cdot m = (2/(1-\beta^2))(1-\beta^2)^{1/2} \cdot m$$

$$= 2/\sqrt{1-\beta^2} \cdot m = 2\gamma_u m = 2m + 2K/c^2,$$

onde K é a **energia cinética inicial** de **cada** uma das **partículas** em S' .

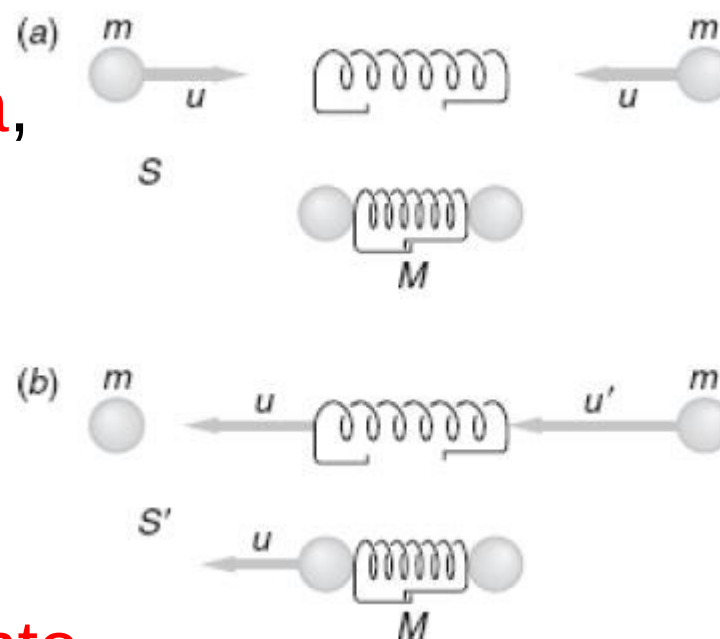
$\Rightarrow M$ é **igual** nos dois **referencias**, e **maior** que a **soma** das **massas** das duas **partículas** iniciais.

Dinâmica Relativística

Variação de massa de um sistema de 2 partículas e uma mola

O mesmo resultado seria obtido se a colisão fosse elástica, supondo por exemplo que existe uma mola de massa desprezível quando relaxada que vai absorver a energia cinética inicial das partículas incidentes.

Quando a mola está maximamente comprimida, ela absorveu os $2K$ e a massa total (mola + partículas) também é $M = 2m + 2K/c^2$.



Dinâmica Relativística

Variação de massa de um sistema de 2 partículas e uma mola

Na **segunda parte** do **choque elástico**, os $2K$ são **devolvidos** às **partículas** e **voltam** a ser **energia cinética** delas.



Em **todos** os **momentos** (antes, durante e depois de choque), a **massa total** do sistema partículas + mola é **M** .

Dinâmica Relativística

A Massa de um Sistema

Qual a **massa total** desse **sistema**?

$$\gamma_v = 1/\sqrt{1-0.6^2} = 1.25$$

=> **momento de cada partícula**: $p = \gamma_v m v = 3 \text{ kg}c$

energia de cada

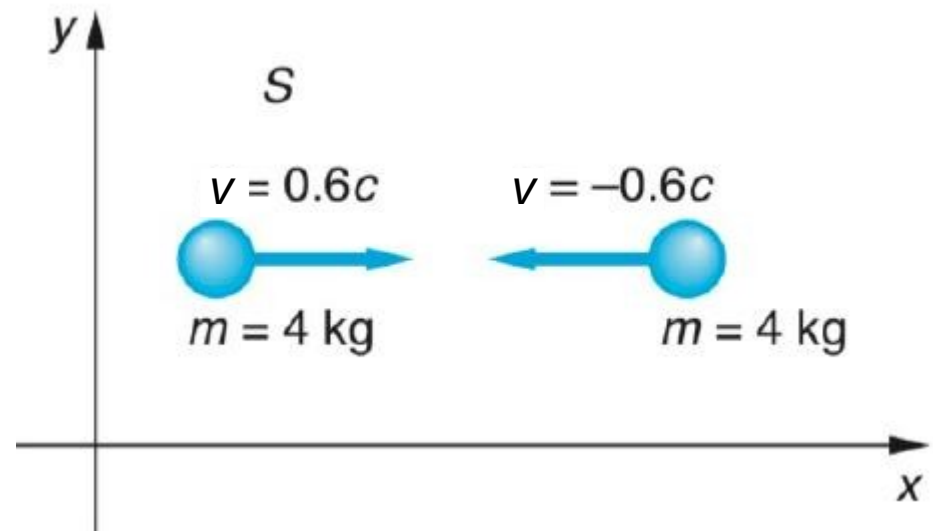
partícula: $\gamma_v m c^2 = 5 \text{ kg}c^2$

Esta última também pode ser calculada usando

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow E = \sqrt{3^2 \text{ kg}^2 c^4 + 4^2 \text{ kg}^2 c^4} = 5 \text{ kg}c^2$$

$$\Rightarrow M_{\text{sistema}} = E_{\text{tot}}/c^2 = 2 \cdot 5 \text{ kg}c^2/c^2 = 10 \text{ kg} > 4 \text{ kg} + 4 \text{ kg}$$

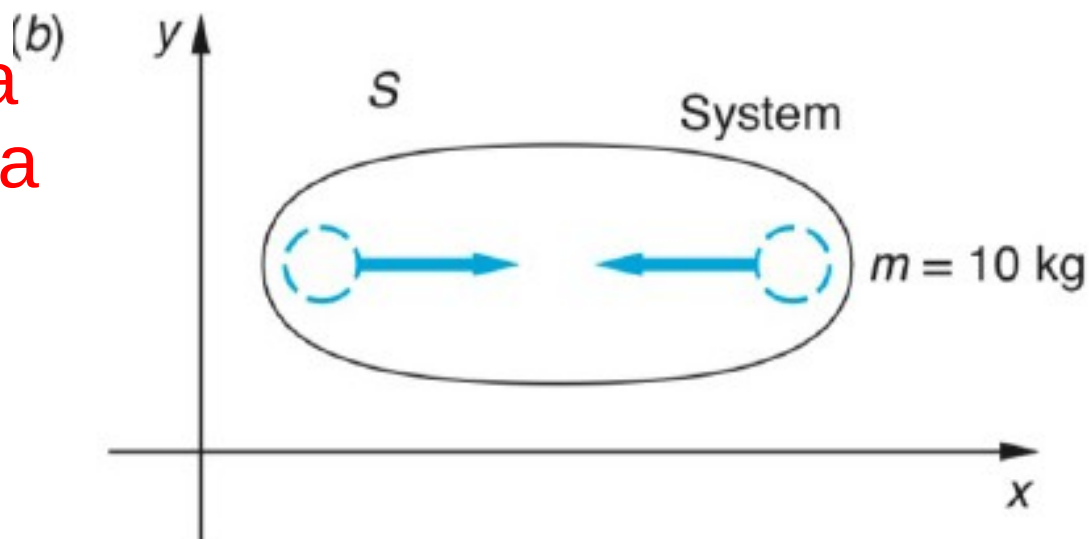
De novo, a **energia cinética interna contribui** pra **massa**.



Dinâmica Relativística

A Massa de um Sistema

Em **resumo**, a **massa** de um **sistema** é a **soma** de **toda** e qualquer **forma** de **massa** e **energia** (positiva ou negativa) **contida** pelo **sistema**.



Aqui 2 videos de PBS Space Time explicando, que a **Equivalência Massa-Energia** realmente é **fundamental**:

The Real Meaning of $E = mc^2$:

<https://www.youtube.com/watch?v=Xo232kyTsO0>

The True Nature of Matter and Mass:

<https://www.youtube.com/watch?v=gSKzgpt4HBU>



Universidade Federal do ABC

Ótica e Relatividade

FIM PRA HOJE

