

Relatividade Restrita

Transformação de Galileu (S' se movimentando com $\vec{u} = (u, 0, 0)$ em relação a S):

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \text{ ou } x' = x - ut, y' = y, z' = z; t' = t$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo u por $-u$

de velocidades: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$, ou $v'_x = v_x - u, v'_y = v_y, v'_z = v_z$

de acelerações: $\vec{a}' = \vec{a}$

Transformação de Lorentz (mesmo caso): $x' = \gamma(x - ut), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x)$,

$$\text{onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{u}{c}$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo u por $-u$

$\vec{u}$ em uma direção qualquer: $r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - \vec{u}t), \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}\vec{r} \cdot \hat{u}) = \gamma(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c^2})$

Transformação de velocidades: $\vec{v}' = \left(\frac{v_x - u}{1 - (u/c^2)v_x}, \frac{v_y}{\gamma(1 - (u/c^2)v_x)}, \frac{v_z}{\gamma(1 - (u/c^2)v_x)} \right)$

$\vec{u}$ em uma direção qualquer: $v'_{\parallel \vec{u}} = \frac{v_{\parallel \vec{u}} - u}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}}, \vec{v}'_{\perp \vec{u}} = \frac{\vec{v}_{\perp \vec{u}}}{\gamma(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2})}$

Efeito Doppler para a luz: $\nu_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u/c \cos \theta} \cdot \nu_0 = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u_r/c} \cdot \nu_0$,

onde $\vec{u}$ = velocidade relativa fonte - observador (+ para afastamento),

θ = ângulo $\vec{u}$ - linha de visada, $u_r = u \cos \theta$ componente radial

$\Rightarrow$ Efeito longitudinal ($\vec{u} \parallel$ linha de visada): $\nu_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} \cdot \nu_0 = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot \nu_0$

$\Rightarrow$ Efeito transversal ($\vec{u} \perp$ linha de visada): $\nu_{\text{obs}} = \frac{\nu_0}{\gamma} = \sqrt{1-u^2/c^2} \cdot \nu_0$

Redshift: $\lambda_{\text{obs}} = (1+z)\lambda_0, z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}$

Redshift Doppler: $z = \sqrt{\frac{1+u_r/c}{1-u_r/c}} - 1$

Colimação relativística (S' : ref. da fonte, θ e θ' : ângulos com a linha de visada):

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$$

Lei de Hubble-leMaître: $v = H_0 d, H_0 \approx 70 \frac{\text{km}}{\text{s.Mpc}}$

" usando o redshift cosmológico: $d = \frac{cz}{H_0}$ até $z \approx 0.13, d = \frac{c}{H_0} \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$ até $z \approx 2$

Tempo próprio: $d\tau = \frac{dt}{\gamma_v}$

Momento linear relativístico: $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma_v m \vec{v}$

Energia total relativística: $E = E_0 + K = mc^2 + K = \gamma_v mc^2$

Relação prática: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = p^2 c^2 + E_0^2$

Fótons (relações de deBroglie): $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$$m_{\text{rel}} = \frac{E}{c^2} = \frac{p}{c} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$$

Invariante prática (conjunto de partículas/corpos): $I = P^2 c^2 - E^2$, onde

$$P = |\vec{P}| = |\sum_i \vec{p}_i|, E = \sum_i E_i$$

Invariantes de Lorentz do campo eletromagnético: $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2, \vec{E} \cdot \vec{B}$, onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos elétrico e magnético (em 3 dimensões, não são quadrivetores)

Equação de Compton: $\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos \theta) = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta)$

Efeito Cherenkov: $\cos \varphi = \frac{c}{nv} = \frac{c}{nv}$, onde n = índice de refração do meio,

φ = ângulo entre a velocidade da partícula $\vec{v}$ e a direção de propagação da luz

Formalismo no Espaço-Tempo de Minkovskij

Quadrivetor: $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$

Produto escalar: $A \cdot B = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = A g B$, onde

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{tensor métrico de Minkovskij}$$

Norma quadrática de A : $A^2 = A \cdot A = A g A = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - \vec{A}^2$

Quadrivetor evento: $X = (X_0, X_1, X_2, X_3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$

Quadrivetor deslocamento: $\Delta X = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = (c\Delta t, \Delta \vec{r})$

Intervalo: $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta \vec{r}^2$

$(\Delta s)^2 < 0$: tipo espaço, $(\Delta s)^2 > 0$: tipo tempo, $(\Delta s)^2 = 0$: tipo luz

Transformação de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta\gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & -\text{sh } \phi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \phi & \text{ch } \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ou $X' = \Lambda X$, onde $\phi = \text{th}^{-1} \frac{u}{c} = \text{rapidez}$

Quadrivetor velocidade: $V = \frac{dX}{d\tau} = \gamma_v \frac{dX}{dt} = \gamma_v(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma_v(c, \vec{v})$

Norma quadrática: $V^2 = c^2$

Quadrivetor Energia-Momento: $P = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = \gamma_v m(c, \vec{v}) = mV$

Norma quadrática: $P^2 = m^2 c^2$

Quadrivetor Energia-Momento de um fóton: $P = \frac{h\nu}{c}(1, \vec{n})$, $P^2 = 0$

Produto escalar dos quadrimomentos de:

- 2 partículas com massa ($u = \text{vel. relativa entre elas}$): $P_1 \cdot P_2 = \gamma_u m_1 m_2 c^2$

- 1 partícula com massa e 1 fóton ($\nu_2 = \text{f. do fóton no ref. da partícula}$): $P_1 \cdot P_2 = h m_1 \nu_2$

- 2 fótons ($\theta = \text{ângulo entre as direções de propagação}$): $P_1 \cdot P_2 = (\frac{h}{c})^2 \nu_1 \nu_2 (1 - \cos \theta)$

Relatividade Geral

Mudança de frequência na variação de altura: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{g\Delta h}{c^2}$

Entre a superfície de uma massa esférica e um ponto “longe”: $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}}$

Para um campo fraco: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$

Redshift gravitacional: $z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = (1 - 2GM/r_0 c^2)^{-1/2} - 1 \approx GM/r_0 c^2$

Dilatação gravitacional do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}}$

Para um campo fraco: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} \approx 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$

Ângulo de deflexão de luz por uma massa: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R}$

Lentes gravitacionais, raio de Einstein: $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}}$