



## Terceira Lista de Exercícios – 2025-2

## Tema: Cinemática Relativística

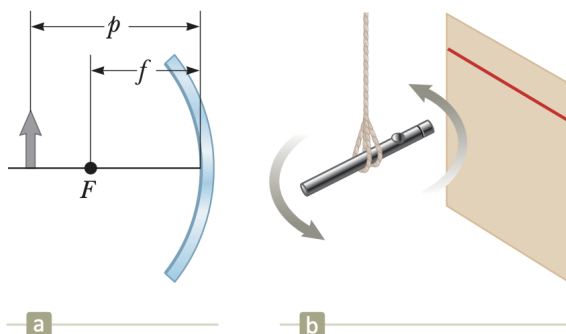
## Questões:

A. Diz-se que Einstein, na adolescência, fez a seguinte pergunta: “O que eu veria em um espelho se o carregasse em minhas mãos e corresse a uma velocidade próxima à da luz?”. Como você responderia a esta pergunta?

B. Você mede o volume de um cubo em repouso como  $V_0$ . Então, mede este mesmo volume quando o cubo passa por você em uma direção paralela a um lado dele. A velocidade do cubo é  $0,980c$ , então  $\gamma \approx 5$ . O volume que você mede é próximo a que valor em unidades de  $V_0$ ?

C. Uma aeronave passa pela Terra com velocidade constante. Um observador na Terra mede que um relógio não danificado na espaçonave gira a uma velocidade de um terço da velocidade de outro na Terra. O que um observador na espaçonave mede de um relógio baseado na Terra? O relógio da Terra irá “girar” mais rápido ou mais lento que o seu?

D. Um corpo é colocado na posição  $p > f$  em um espelho côncavo, como mostrado na Figura (a), onde  $f$  é a distância focal do espelho. Em um intervalo de tempo infinito, o corpo é movido para a direita para uma posição no ponto focal  $F$  do espelho. Mostre que a imagem do corpo se move a uma velocidade maior que a da luz.



E. Uma caneta laser é suspensa em um plano horizontal e colocada em rotação rápida, como mostrado na Figura (b). Mostre que a marca de luz que ela produz em uma tela distante pode se mover pela tela a uma velocidade maior que a da luz. Argumente que os experimentos nas questões d) e e) não invalidam os princípios da relatividade de que nenhum material, energia ou informação pode ser mover mais rápido que a luz no vácuo.

**Problemas:**

Em todos os problemas, considere sempre que  $S$  e  $S'$  são dois referenciais em configuração padrão, conforme definido nas aulas.

1. Para ter uma ideia da ordem de grandeza dos efeitos relativísticos, e quando eles são relevantes, responda:
  - a. Quanto deve ser (em km/h) a velocidade relativa entre dois observadores, para que a diferença entre suas medidas de tempo ou espaço seja de 1%?
  - b. Com que velocidade uma trena precisa se mover se seu comprimento for medido com um encolhimento de 0,500 m?
  - c. Uma estrela está a 5,00 anos-luz da Terra. A que velocidade uma espaçonave precisa se mover em seu caminho até a estrela para que a distância entre ela e a Terra medida no referencial da espaçonave seja de 2,00 anos-luz?

2. Considere a equação da onda,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x, t) = 0,$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Mostre o que acontece com essa equação quando é aplicada uma transformação de Galileu e uma transformação de Lorentz. Ou seja: considere essa equação no referencial  $S'$ , e desenvolva como será sua forma escrita em termos das coordenadas de  $S$ . Discuta o resultado no contexto da Relatividade Restrita.

3. Ao resolver os três itens abaixo, discuta sempre o seu resultado no contexto do conceito de causalidade (i.e., efeitos não podem acontecer antes de suas causas).
  - a. Considere dois eventos e assuma que, num dado referencial inercial, eles podem ser conectados por um sinal que viaja com a velocidade da luz. Mostre que a ordem temporal entre os eventos será a mesma em qualquer referencial inercial.
  - b. Se dois eventos acontecem no mesmo local num dado referencial inercial  $S$ , mostre que sua ordem temporal será a mesma para qualquer outro referencial inercial, e que o menor intervalo de tempo medido entre os dois referenciais será em  $S$ .
  - c. Sejam dois eventos que acontecem no mesmo instante com uma separação  $\Delta x \neq 0$  num dado referencial  $S$ . Mostre que a separação temporal entre esses eventos pode assumir qualquer valor em diferentes referenciais inerciais, mas que a menor separação espacial medida entre os dois será justamente  $\Delta x$ .



4. Uma fonte de luz afasta-se de um observador com velocidade  $v_s$  pequena se comparada a  $c$ .
- a. Mostre que a variação fracional no comprimento de onda medido é fornecida pela expressão

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_s}{c}$$

Este fenômeno é conhecido como desvio para o vermelho (*red shift*) porque a luz visível é modificada em direção a esta cor.

- b. Medidas espectroscópicas da luz com comprimento de onda  $\lambda = 397 \text{ nm}$  vinda de uma galáxia na Ursa Maior revelaram uma mudança para o vermelho de  $20,0 \text{ nm}$ . Qual é a velocidade de afastamento da galáxia?
5. Uma partícula se move com velocidade  $0,9c$  na direção positiva do eixo  $x''$ , conforme medido num referencial  $S''$ , que por sua vez se move com velocidade  $0,9c$  na direção positiva do eixo  $x'$  do referencial  $S'$ . Por fim,  $S'$  também se move com velocidade  $0,9c$  na direção positiva do eixo dos  $x$  do referencial  $S$ . Qual a velocidade da partícula conforme medida por  $S'$  e  $S$ ?
6. Um observador em  $S'$  emite um raio de luz na direção positiva do eixo dos  $x$ . Use a fórmula de soma relativística de velocidades para mostrar que a velocidade desse raio de luz, conforme medida em  $S$ , será  $c$ , em conformidade com os postulados da Relatividade Restrita.
7. Fizeau realizou seu experimento acreditando no arrastamento parcial do éter pela matéria. Segundo essa ideia, a velocidade da luz dentro de um fluido com índice de refração  $n$ , fluindo com velocidade  $V$  num certo referencial  $S$ , seria medida como:  $v = c/n + Vf$  onde  $f = 1 - 1/n^2$  é o coeficiente de arrasto de Fresnel. Mostre que, dentro do contexto da relatividade, o mesmo resultado é obtido da fórmula da soma de velocidades, no limite de  $V/c$  muito pequeno.
8. Estude a seção 6.2 de MNv4, onde é detalhado o experimento de Michelson-Morley. Refaça essa análise levando em conta a Relatividade Restrita, mostrando que o resultado do experimento é de fato nulo, ou seja, nenhum deslocamento de franjas é esperado [Dica: Lembre-se do efeito de contração de espaço].
9. Um raio luminoso se propaga ao longo do eixo  $y'$  com velocidade  $c$  no referencial  $S'$ , que está se movendo para a direita com velocidade  $v$  em relação ao referencial  $S$ . (a) Determine os valores de  $u_x$  e  $u_y$ , as componentes da velocidade do raio luminoso no referencial  $S$ . (b) Mostre que o módulo da velocidade do raio luminoso no referencial  $S$  é igual a  $c$ .



10. Mostre que duas transformações de Lorentz sucessivas, correspondentes a velocidades  $v_1$  e  $v_2$  na mesma direção e sentido, são equivalentes a uma única transformação de Lorentz com velocidade

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

Este resultado é compatível com a fórmula de adição de velocidades obtida em aula? Isso é razoável?

11. Mostre que a rapidez  $\phi = \tanh^{-1}(v/c)$  é uma quantidade aditiva, i.e., se  $v_3$  é a velocidade obtida pela soma relativística das velocidades  $v_1$  e  $v_2$ , então  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$

12. Considere os referenciais S e S' em configuração padrão. No referencial S, o evento 1 ocorre em  $x_1 = 1$  ano-luz e  $t_1 = 1$  ano e o evento 2 ocorre em  $x_2 = 2$  anos-luz e  $t_2 = 0,5$  ano. Os eventos ocorrem simultaneamente no referencial S'. (a) Determine o módulo e a direção da velocidade de S' em relação a S. (b) Em que instante os eventos ocorrem no referencial S'? (c) Calcule o intervalo no espaço-tempo  $\Delta s$  entre os eventos. (d) O intervalo é do tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz? (e) Qual é a distância própria  $L_p$  entre os eventos? (f) Represente os eventos e os sistemas S e S' em um diagrama espaço tempo.

13. Usando que

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'}$$

e similarmente para as componentes y e z da aceleração, use as transformações de Lorentz para o intervalo infinitesimal  $dt$  e para as velocidades, para provar que as transformações de Lorentz para as componentes da aceleração podem ser dadas por:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3} \quad a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} - \frac{a_x u_y \frac{v}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

e a direção z tem uma expressão similar à da direção y. Comente sobre a diferença que existe para as expressões correspondentes nas transformações de Galileu.



14. Um amigo da sua idade viaja para Alfa do Centauro, a 4 anos-luz de distância, retornando imediatamente após chegar à estrela, viajando na mesma velocidade (em módulo) da ida. Ele afirma que a viagem durou apenas 6 anos. (a) Com que velocidade seu amigo viajou? (b) Qual é a diferença de idade entre vocês dois quando voltam a se encontrar? (c) Desenhe um diagrama espaço-tempo para confirmar as respostas dos itens (a) e (b).