



Quarta Lista de Exercícios – 2025-2

Tema: Dinâmica Relativística

Problemas marcados com * deverão ser entregues até 24/08.

Problemas:

Em todos os problemas, considere sempre que S e S' são dois referenciais em configuração padrão, conforme definido nas aulas.

1. * O tetravetor momento é dado por $P = (E/c, \vec{p})$. Definimos o vetor tetravelocidade como a derivada da posição $X = (ct, \vec{r})$ de uma partícula em relação ao seu tempo próprio τ .

a) Lembrando que $d\tau = dt/\gamma$ mostre que

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \gamma(u) (c, \vec{u})$$

onde \vec{u} é a velocidade (3D) da partícula em relação ao referencial S .

b) Considere agora um partícula com tetravetor momento P e tetravelocidade U , observada por um observador S . Prove que a energia de repouso da partícula é o produto escalar $P \cdot U$.

2. Considerando as definições do problema 1, defina agora o tetravetor aceleração como a derivada da velocidade U em relação ao tempo próprio, ou seja, $A = dU/d\tau$. Mostre que:

$$A = \gamma(u) \left(c \frac{d\gamma(u)}{dt}, \frac{d\gamma(u)}{dt} \vec{u} + \gamma(u) \vec{a} \right)$$

onde \vec{a} é a aceleração (3D) medida no referencial S , e onde

$$\frac{d\gamma(u)}{dt} = \gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2}.$$

Mostre também que, no referencial instantâneo de repouso, temos $A = (0, \vec{a})$.

3. Considerando os tetravetores velocidade e aceleração para uma partícula definidos nos problemas 1 e 2, mostre que: $U \cdot U = c^2$, $U \cdot A = 0$ e $A \cdot A = -\alpha^2$, onde α é a chamada *aceleração própria*, ou seja, a aceleração medida no referencial instantâneo de repouso da partícula.



4. Seja um observador S com tetravelocidade U e uma partícula P com tetra-aceleração A . Se $U \cdot A = 0$ (note, essa igualdade é diferente do que você provou no exercício 3, porque aqui U e A se referem a objetos diferentes!), prove que no referencial de repouso de S a partícula P se move com módulo de velocidade $|\vec{v}|$ constante.

5. Usando T , E , N e V para denotar, respectivamente: vetores do tipo *tempo* (i.e., $T^2 > 0$), tipo *espaço* (i.e., $E^2 < 0$), tipo *nulo* (i.e., $N^2 = 0$) e um vetor geral (ou seja, sem presumir um valor específico para V^2). Prove que:

- a) Qualquer V (que não seja do tipo nulo) ortogonal a um T ou a um N é do tipo S .
- b) A soma de dois vetores tipo T , ou de um T com um N , que sejam isócronos (ou seja, os dois apontando para o futuro ou para o passado), é necessariamente um T , isócronos com os dois vetores originais.
- c) Todo T pode ser escrito como a soma de dois N isócronos.
- d) Todo S pode ser escrito como a diferença de dois N isócronos.

5. Uma partícula de massa m_0 , inicialmente em repouso, decai num par de partículas de massa m_1 e m_2 . Calcule as energias E_1 e E_2 dos produtos desse decaimento.

6. Um fóton de energia E é espalhado por um elétron livre. Mostre que o máximo de energia cinética que o fóton pode transferir para o elétron é dada por

$$T_{max} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

7. No acelerador linear de Stanford, "pacotes" contendo um grande número de elétrons e pósitrons são acelerados ao longo do equipamento, em direções opostas, e se encontram para colidir em um determinado ponto. No referencial do laboratório, cada "pacote" tem cerca de 1,0 cm de comprimento e 10,0 μm de diâmetro. Na região de colisão, cada partícula tem energia de 50,0 GeV.

Qual o comprimento e largura do "pacote" no seu próprio referencial de repouso?

Qual deve ser o comprimento próprio mínimo do acelerador para que cada "pacote" caiba inteiramente no acelerador, conforme o seu próprio referencial? (O comprimento real do acelerador é menos de 1km).

- a) Qual o comprimento do "pacote" de pósitrons conforme visto no referencial dos elétrons?
- b) Qual o momento e energia dos elétrons conforme visto no referencial dos pósitrons?



8. Uma nave espacial de massa 10^6 kg viaja com velocidade constante pelo espaço. Para acelerar, ela vai ejetar uma massa de 10^3 kg durante um tempo muito curto (que vamos aproximar como sendo instantâneo) a uma velocidade de $c/2$ em relação à nave.

a) Ignorando qualquer possível mudança de massa total do sistema, calcule a velocidade que a nave vai ter em relação ao seu referencial inicial (antes de aceleração).

b) Calcule essa mesma velocidade, agora usando a mecânica de Newton.

c) Usando os resultados de a), estime a mudança na massa total do sistema nesse processo.

9. A energia de repouso de um próton é 938 MeV. Se a energia cinética também é 938 MeV, determine (a) o momento; (b) a velocidade da partícula.

10. Um elétron (energia de repouso: 0,511 MeV) tem uma energia total de 5 MeV. (a) Determine o momento do elétron em unidades de MeV/c. (b) Determine o valor de u/c para o elétron.

11. * Uma partícula elementar de massa M , inicialmente em repouso, absorve totalmente um fóton, o que faz a massa da partícula aumentar para $1,01 M$. (a) Qual era a energia do fóton que foi absorvido? (b) Por que essa energia era maior que $0,01 Mc^2$?

12. * O antipróton \bar{p} tem a mesma energia de repouso que o próton; pode ser criado, por exemplo, na reação $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Em um experimento, um próton em repouso no referencial do laboratório é bombardeado por um próton de energia cinética K , que deve ser suficiente para que uma energia cinética igual a $2mc^2$ possa ser convertida na energia de repouso de um próton e um antipróton (no caso limite em que as partículas criadas tem velocidade zero). Contudo, no referencial do laboratório, a energia cinética do próton incidente não pode ser convertida totalmente em energia de repouso por causa da conservação do momento. Por isso, é interessante analisar a situação no chamado referencial de momento zero, em que os dois prótons iniciais estão se movendo um em direção ao outro com velocidades de módulo igual, pois aí toda a energia cinética pode ser convertida em energia de repouso, já que o momento total é (e deve permanecer) igual a zero.

a) Determine a velocidade u dos dois prótons para que a energia cinética total no referencial de momento zero seja igual a $2mc^2$. Considere esse como o referencial S do problema.

b) Determine a velocidade u' de um dos prótons no referencial em que o outro próton se encontra em repouso. Esse é o referencial do laboratório, que será o S' .

c) Mostre que a energia cinética do próton incidente no referencial do laboratório é $E_k = 6mc^2$.



13. Considere uma partícula instável de massa M , em repouso no referencial S , e assumamos que ela decai em duas partículas de massas $m_1 > 0$ e $m_2 = 0$. A partícula de massa m_2 se move com a velocidade da luz e seu tetravetor energia-momento é dado por $Q = \frac{E_2}{c} (1, \hat{x})$, onde \hat{x} é o vetor unitário na direção x (escolhemos orientar o eixo dos x na mesma direção da velocidade desta partícula). Qual a velocidade da partícula de massa m_1 , no referencial S , em termos de M , m_1 e c ?

14. Considere uma partícula instável de massa M , em repouso, e assumamos que ela decai em duas partículas de massa m .

a) Calcule a velocidade das partículas resultantes, em função de c , M e m no referencial de repouso de M .

b) Mostre que este decaimento só é possível se satisfeita a condição: $M \geq 2m$. Explique porque essa condição é razoável.

c) Qualitativamente, qual a diferença entre a situação limite $M = 2m$ e a condição mais geral $M > 2m$?