

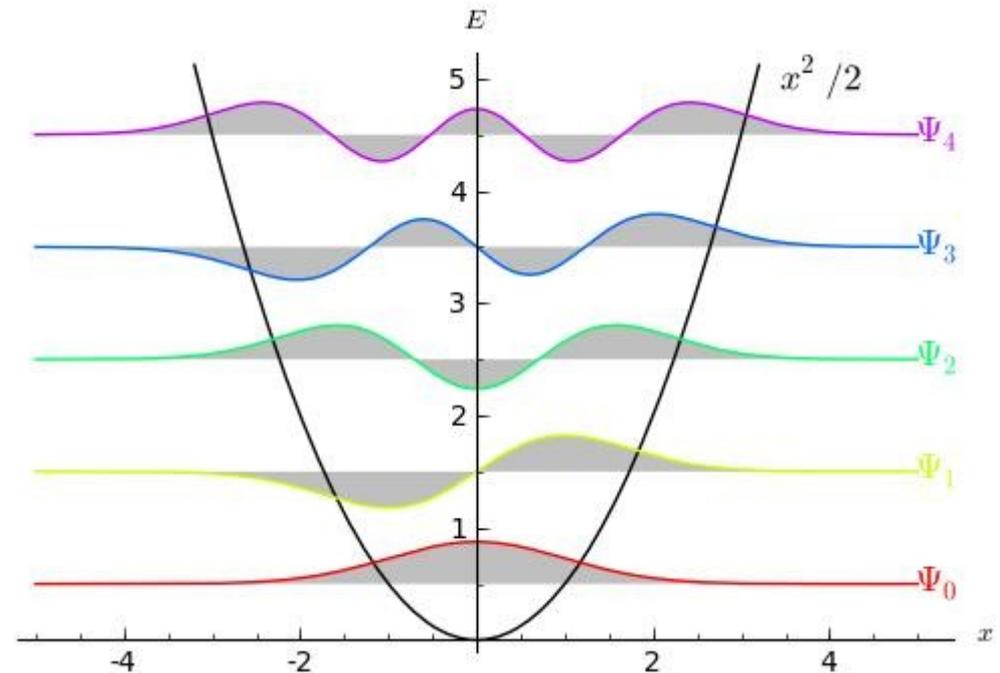
Física Quântica

Aula 4: Ondas, Dualidade Onda-Partícula

Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br



Universidade Federal do ABC



<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Quantica.html>

Resumo da Aula 2

A luz (e outra radiação eletromagnética) tem propriedades **ondulatórias**: Interferência, difração, comprimento de onda, frequência de oscilação, ...

Mas ela também tem propriedades **corpusculares**: Corpo Negro, Efeito Fotoelétrico, Efeito Compton, ...

As “partículas de luz” são chamadas de **fótons**. A energia e o momento linear dos fótons dependem da sua frequência, resp. do seu comprimento de onda, e são dados pelas relações:

$$E = h \cdot \nu = c \cdot h / \lambda$$

$$p = E/c = h \cdot \nu / c = h / \lambda$$

As duas manifestações da luz, onda e partícula, são **complementares**.

O experimento determina o caráter observado.

Se as ondas clássicas são ao mesmo tempo partículas, será que as partículas clássicas, por exemplo os elétrons, são ao mesmo tempo ondas? Elétrons têm comprimento de onda e frequência?

Louis V. de Broglie (1924)

Sugeriou que os **elétrons** em **movimento** deveriam ter propriedades de **onda**.
A **frequência** resp. o **comprimento de onda** desta onda pode ser calculada a partir da **energia**, resp. do **momento linear**, do elétron, usando as **mesmas relações** que para o **fóton**.

Relações de de Broglie

$$\nu = E/h \text{ (onde } E \text{ é a energia total, } E = U + K)$$

$$\lambda = h/p$$

! As relações $E = c \cdot h/\lambda$ e $p = h \cdot \nu/c$ **não** valem para partículas, por que para eles não vale $c = \lambda \nu$ e nem $p = E/c$.



Louis V. de Broglie (1924)

De Broglie se inspirou no átomo de Bohr.

Já que, no átomo de Bohr temos:

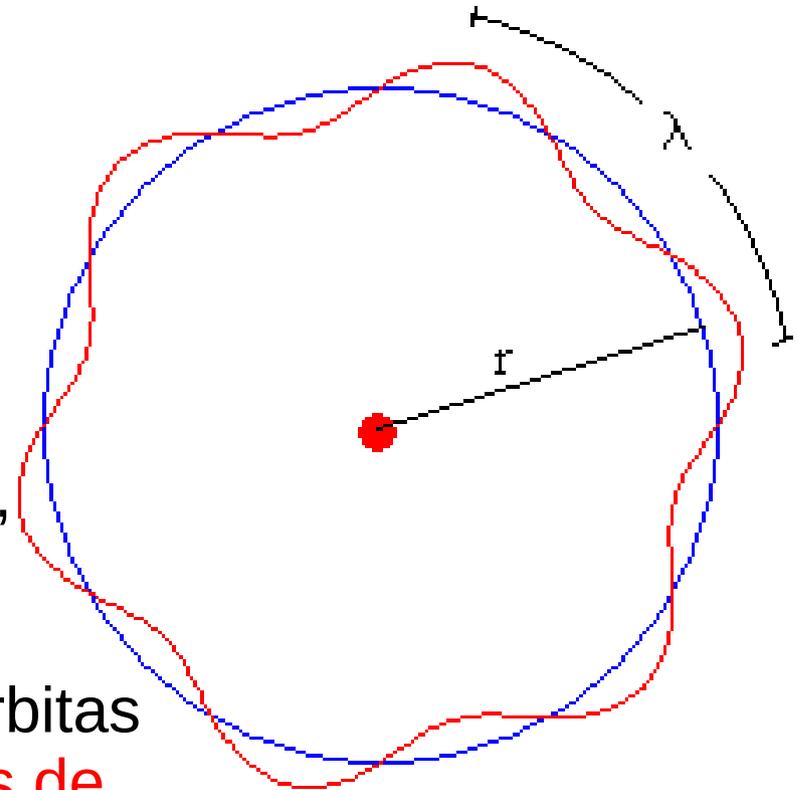
$$L_n = p_n r_n = n\hbar = nh/2\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi r_n = nh/p_n = n\lambda_n$$

Se os **elétrons** têm os **comprimentos de onda** previstos por **estas relações**, eles fazem ondas estacionárias nas suas **órbitas**.

Isto é, as **circunferências** das suas órbitas são **múltiplas** dos seus **comprimentos de onda**.

\Rightarrow As ondas-elétron fazem **interferência construtiva consigo** mesmas.



6ª órbita de Bohr

O Comprimento de Onda da Matéria

Calculamos o comprimento de onda de uma bola de pingue-pongue de 2 g e 5 m/s:

$$\lambda = h/p = h/mv = 6.6 \cdot 10^{-21} \text{ nm}$$

menor que o diâmetro de um núcleo atômico
=> **inobservável**.

The de Broglie wavelengths of various moving objects.

Particle	Mass/kg	Speed/m·s ⁻¹	Wavelength/pm
Electron accelerated through 100 V	9.11×10^{-31}	5.9×10^6	120
Electron accelerated through 10,000 V	9.29×10^{-31}	5.9×10^7	12
α particle ejected from radium	6.68×10^{-27}	1.5×10^7	6.6×10^{-3}
22-caliber rifle bullet	1.9×10^{-3}	3.2×10^2	1.1×10^{-21}
Golf ball	0.045	30	4.9×10^{-22}

Outro exemplo:

Elétron “lento”: acelerado por 10 V => $E_{\text{cin}} = 10 \text{ eV}$

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2m_e E_{\text{cin}}} = 0.39 \text{ nm}$$

Comparável às **distâncias interplanares** em **cristais**.

=> Deveria ser **observável** em experiências de **difração** em cristais.

Davisson e Germer (1927)

Dois anos depois, Davisson e Germer verificaram esta hipótese por um experimento.

Fizeram um feixe de **elétrons** incidir num alvo de **alumínio** em **pó**.

Os elétrons eram acelerados para um **momento linear** que corresponde, segundo as relações de de Broglie, a um **comprimento de onda** comparável àquele de **raios X**.

Se os elétrons realmente se comportassem como **ondas**, eles deveriam ser espalhados e mostrar um **padrão de difração similar** àquele de **raios X** ao passar pelo alvo.



Davisson e Germer (1927)

Deve-se observar raios refletidos sob ângulos que satisfazem a

Lei de Bragg:

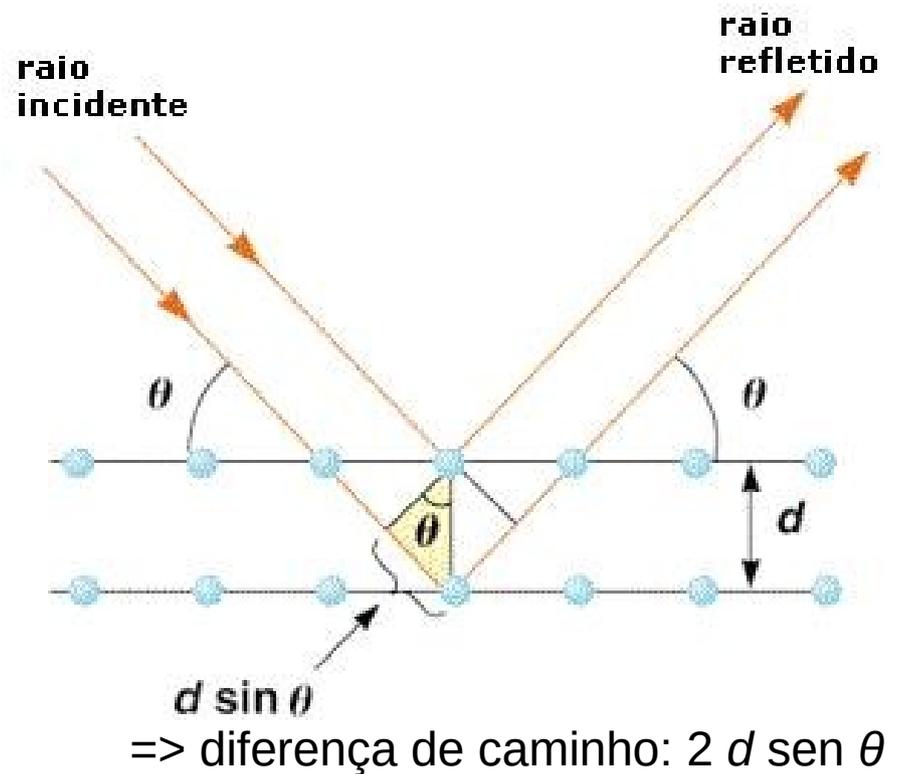
$$2 d \sin \theta = n\lambda$$

A diferença de caminho entre os raios refletidos parciais deve ser um múltiplo do comprimento de onda (de de Broglie).

=> Os raios parciais farão interferência construtiva.

Para outros ângulos, os raios refletidos parciais fazem interferência destrutiva e não se vê raios refletidos.

Os **raios refletidos** devem mostrar um **padrão** de **difração** refletindo a **estrutura cristalina** do material.



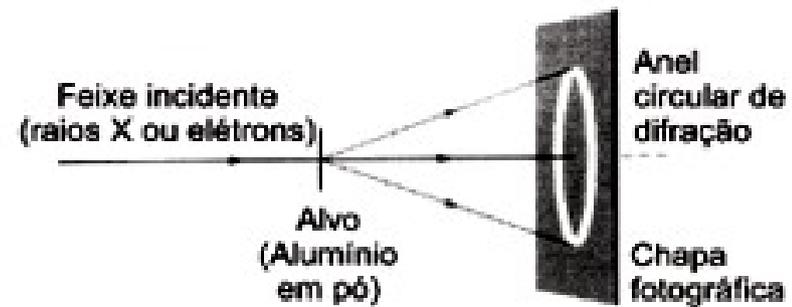
Davisson e Germer (1927)

Isto se confirmou!

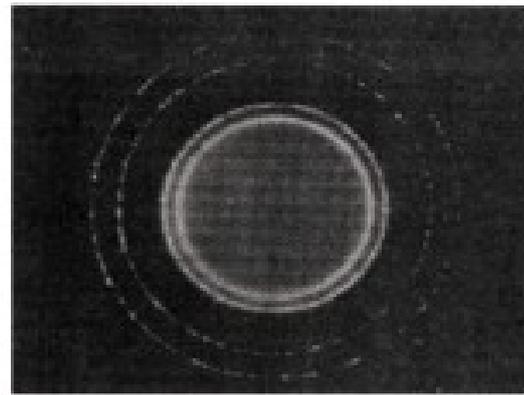
Elétrons têm propriedades ondulatórias, i. e. frequência e comprimento de onda, dados pelas **relações de de Broglie**.

Logo depois, as propriedades ondulatórias foram confirmadas também para outras partículas: Átomos de He, moléculas de H_2 (1930, Stern e Estermann), mais recentemente prótons, nêutrons, ...

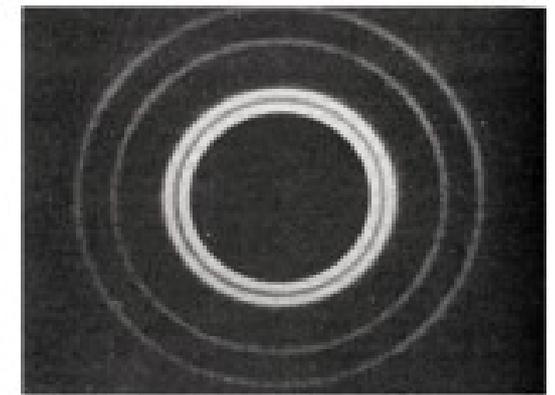
Todas as partículas têm propriedades ondulatórias!



(a)



(b)



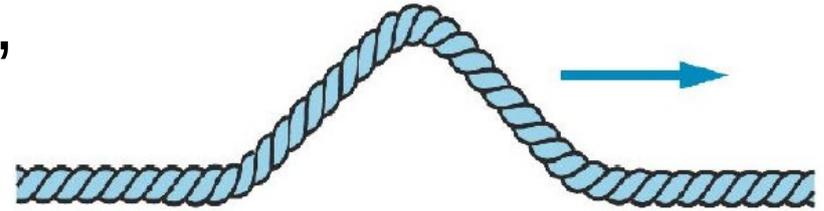
(c)

Figura 1 - Figuras de difração para a montagem, esquematicamente mostrada em (a). Em (b) temos o caso do feixe incidente como sendo de raios-X, enquanto em (c) temos o caso de elétrons. Vale observar que, para o caso da figura, o comprimento de onda de de Broglie, para os elétrons, é o mesmo que o dos fótons de raios-X. A semelhança nos padrões de difração é evidente (Fotos com publicação gentilmente autorizada por John Wiley Inc.).

Ondas

O que é uma onda?

Uma variação, periódica ou não, em alguma **grandeza física** a , que se **propaga** pelo espaço.



Exemplos: Ondas sonoras: variações na pressão do ar,
Ondas eletromagnéticas: campos elétrico e magnético, etc.

Ela satisfaz a **Equação de Onda**:
que é derivada dos processos
que causam a propagação

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$$

(para ondas sonoras, as interações entre as partículas do ar, para ondas eletromagnéticas, uma combinação das Leis de Maxwell, ..)

Ondas

O que é uma onda?

Soluções são:

$a_+(x,t) = g(x - vt)$: onda de forma $g(x)$ propagando-se com velocidade v na direção $+x$, e

$a_-(x,t) = h(x + vt)$: " $h(x)$ " na direção $-x$.

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$$

No caso tri-dimensional, a segunda derivada é o operador laplaciano,

$$\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad (=> \text{FVV})$$

Neste caso, as soluções são ondas propagando-se com velocidade v em qualquer direção.

Ondas

Ondas Periódicas

Um caso interessante são **ondas periódicas**.

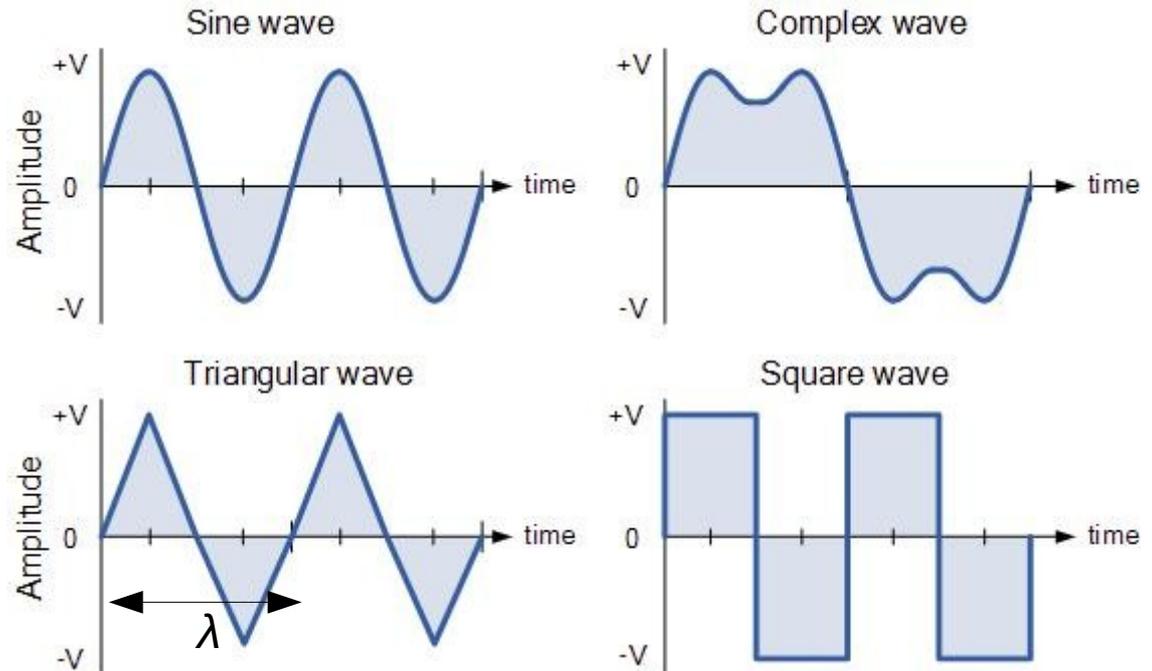
São ondas, para aquelas vale

$$a(x, t) = a(x + n\lambda, t), \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

definimos como

comprimento de onda λ ,
a menor distância que realiza isto.

(Qualquer múltiplo inteiro de λ também realiza isto.)



Ondas

Ondas Periódicas

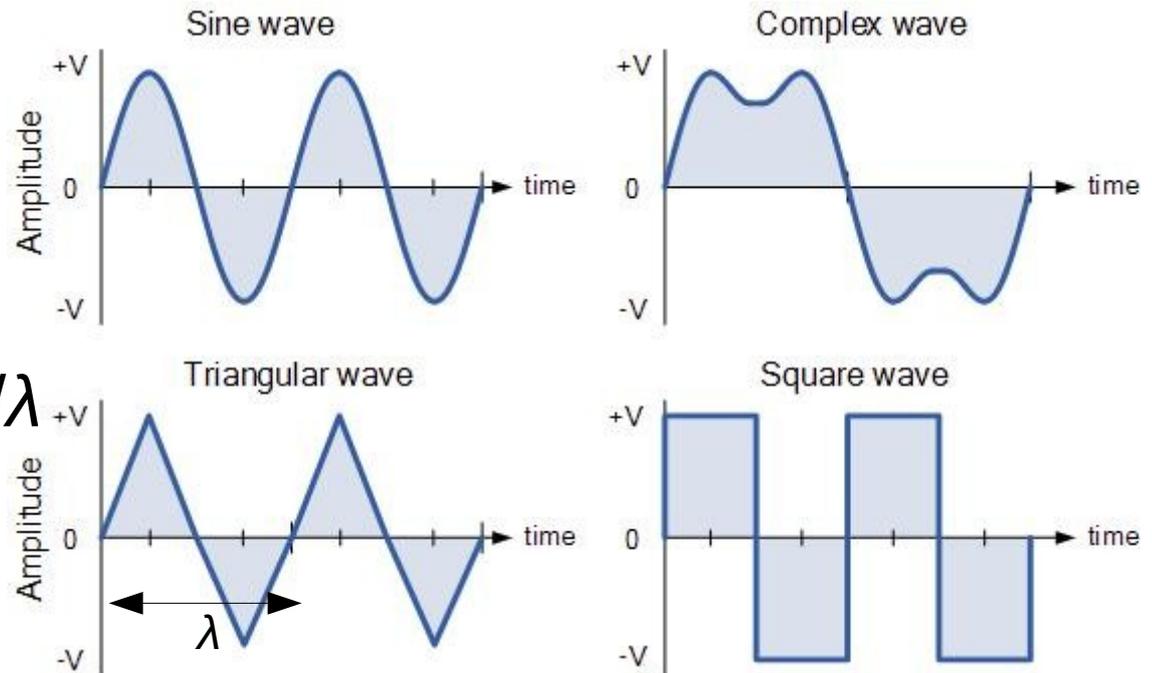
Então: sendo o comprimento de onda λ ,

Definimos como número de onda $k := 2\pi/\lambda$

Em uma dada posição fixa, a grandeza a oscila com período $T = \lambda/v$, isto é, com frequência $\nu = 1/T = v/\lambda$

Ainda definimos a frequência angular $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.

Para ondas propagando-se na direção $-x$, $v < 0$, k e λ são negativos.

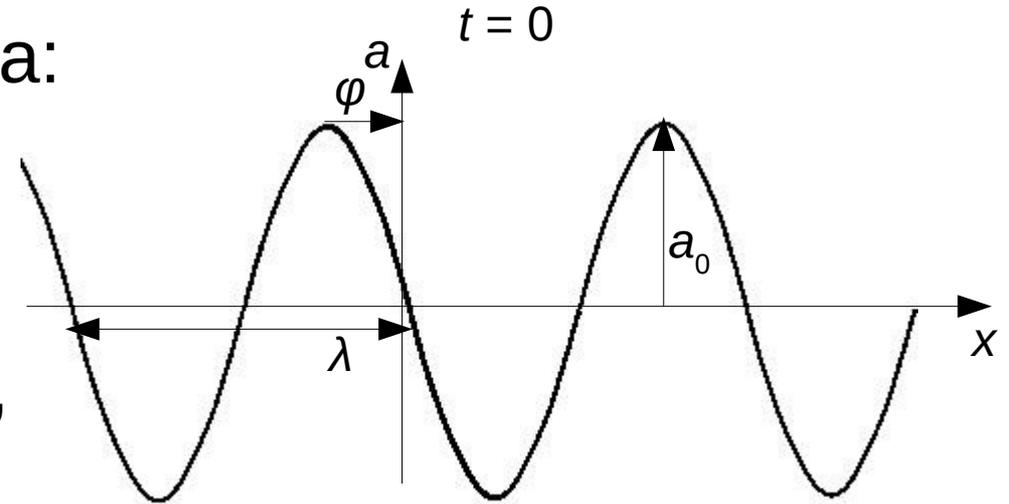


Ondas

Ondas Senoidais

Caso mais interessante ainda:

$$\begin{aligned}a &= a_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \\ &= a_0 \cos 2\pi(x/\lambda - t/T + \varphi) \\ &= a_0 \cos [2\pi/\lambda \cdot (x - vt) + \varphi],\end{aligned}$$



onde

a_0 é a **amplitude** da onda,

φ é chamado **fase**

(o deslocamento do pico da onda até $x = 0$ em $t = 0$).

Ondas

Interferência

Quando duas (ou mais) **ondas** a_1 e a_2 passam pela **mesma região** do espaço, elas se **sobrepoem**:

$$a(x, t) = a_1(x, t) + a_2(x, t)$$

fenômeno chamado **interferência**.

No caso de duas ondas senoidais temos

$$a(x, t) = a_{1,0} \cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + a_{2,0} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$$

vamos agora achar umas propriedades interessantes de ondas em interferência.

Ondas

Interferência: ondas com a mesma frequência

Se as ondas têm a **mesma frequência** e se propagam na mesma direção: $\nu_1 = \nu_2 =: \nu$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 =: \omega, \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, k_1 = k_2 =: k,$$

e têm a mesma amplitude

$$a_{0,1} = a_{0,2},$$

a soma dá

$$a = a_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2),$$

$$\text{onde } a_0 = 2 \cdot \cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2) \cdot a_{0,1}$$

\Rightarrow **uma onda** com os **mesmos frequência, comprimento de onda**, etc. que as duas ondas a_1 e a_2 .

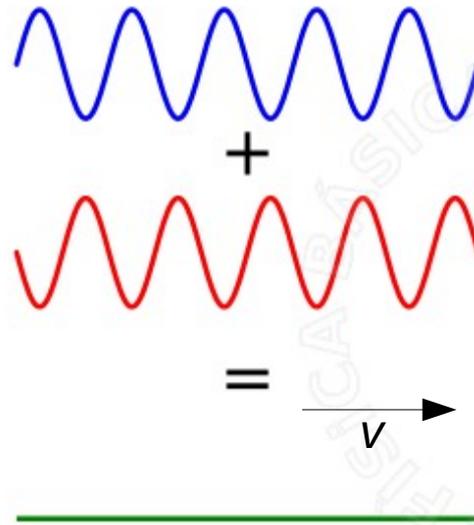
Ondas

Interferência: ondas com a mesma frequência

$$a = a_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2), \text{ onde } a_0 = 2 \cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2) a_{0,1}$$

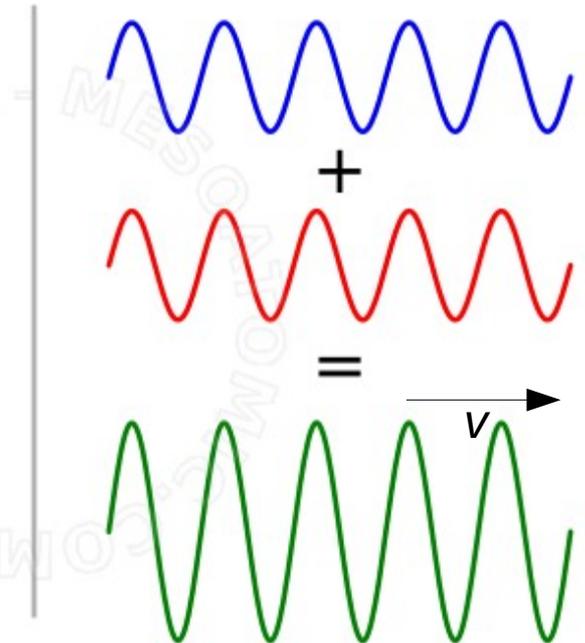
Dois
casos
especiais:

$\varphi_1 = \varphi_2 + (n + 1/2) \cdot 2\pi$,
exatamente **fora de fase**



$a_0 = 0$
interferência destrutiva

$\varphi_1 = \varphi_2 + n \cdot 2\pi$,
exatamente **em fase**



$a_0 = 2a_{0,1} = 2a_{0,2}$
interferência construtiva

Ondas

Interferência: ondas com a mesma frequência

$$a = a_0 \cos(kx - \omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2), \text{ onde } a_0 = 2 \cos((\varphi_1 - \varphi_2)/2) a_{0,1}$$

=> Dependendo da **diferença de fase**, as ondas se **amplificam** (interferência **construtiva**) ou **cancelam** (interferência **destrutiva**).

=> Pela **intensidade** da **onda resultante**, dá para determinar a **diferença de fase** entre as ondas a_1 e a_2 .

Na interferência de ondas com a mesma frequência e amplitudes diferentes, interferência construtiva e destrutiva também acontecem, mas no caso da destrutiva, o cancelamento não é total.

Ondas

Batimento

Ondas com **quase a mesma frequência**, $\nu_1 \approx \nu_2$

$$\Rightarrow \omega_1 \approx \omega_2, \lambda_1 \approx \lambda_2, k_1 \approx k_2$$

Para facilitar, tomamos $\nu_1 > \nu_2$, as duas amplitudes iguais, $a_{0,1} = a_{0,2}$, e as fases como zero, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$$a = a_0 \underbrace{\cos \left(\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right)}_{\text{onda com frequência } \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2), \text{ isto é, similar às ondas } a_1 \text{ e } a_2} \cdot \underbrace{\cos \left(\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right)}_{\text{onda com frequência muito baixa, isto é, com período/c.d.o. longo}},$$

$$\text{onde } a_0 := 2a_{0,1} = 2a_{0,2}$$

Ondas

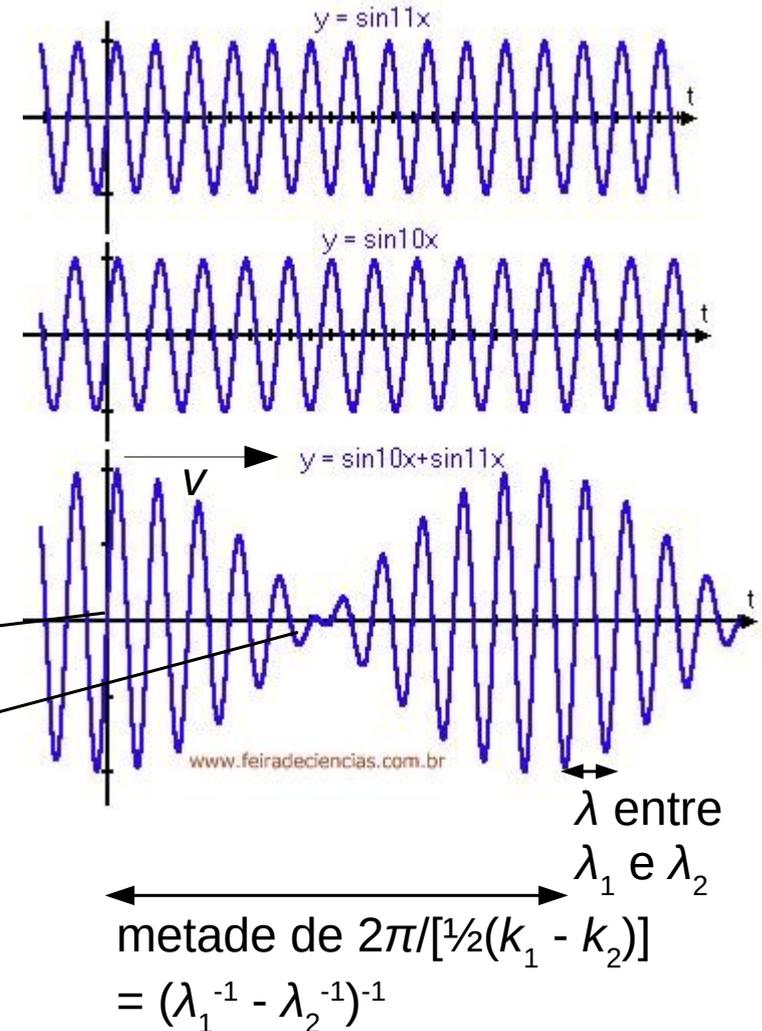
Batimento

=> O resultado é uma onda com **frequência/comprimento de onda** bem **similar** às duas **ondas originais**, cuja **amplitude oscila lentamente**, fenômeno chamado **batimento**.

aqui, as duas ondas fazem interferência construtiva,

e aqui, destrutiva

Se as duas ondas têm amplitudes diferentes, há batimento também, mas a amplitude não chega a zero entre dois máximos.



Ondas

Ondas Estacionárias

Ondas com quase as **mesmas frequência**, $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$,

e amplitude, $a_{0,1} = a_{0,2}$,

mas indo na **direção oposta**:

$$k_1 =: k \Rightarrow k_2 = -k$$

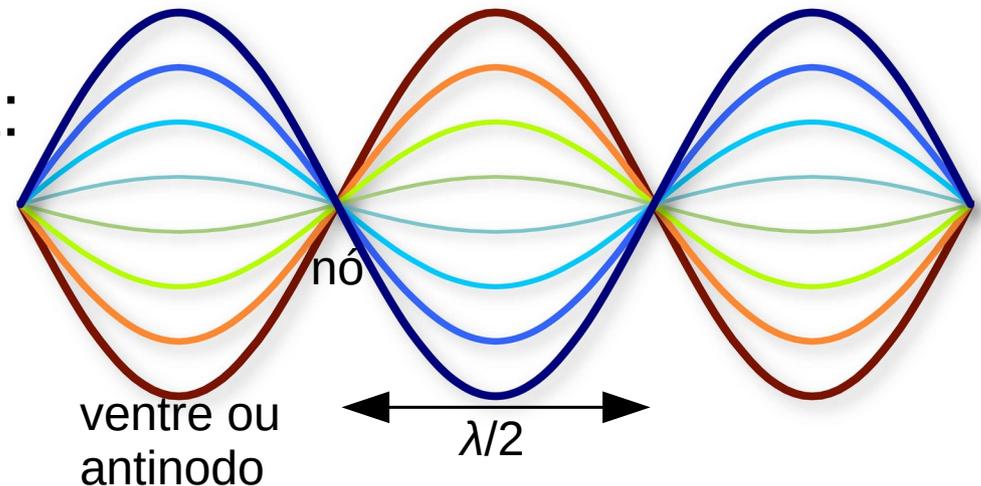
tomando $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$$\Rightarrow a = a_0 \cdot \cos(-\omega t) \cdot \cos(kx),$$

$$\text{onde } a_0 := 2a_{0,1} = 2a_{0,2}$$

oscila muito em **certas posições**, os **ventres** (onde $kx = n\pi$),
e **não** oscila em **outras posições**, os **nós** (onde $kx = (n+1/2)\pi$).

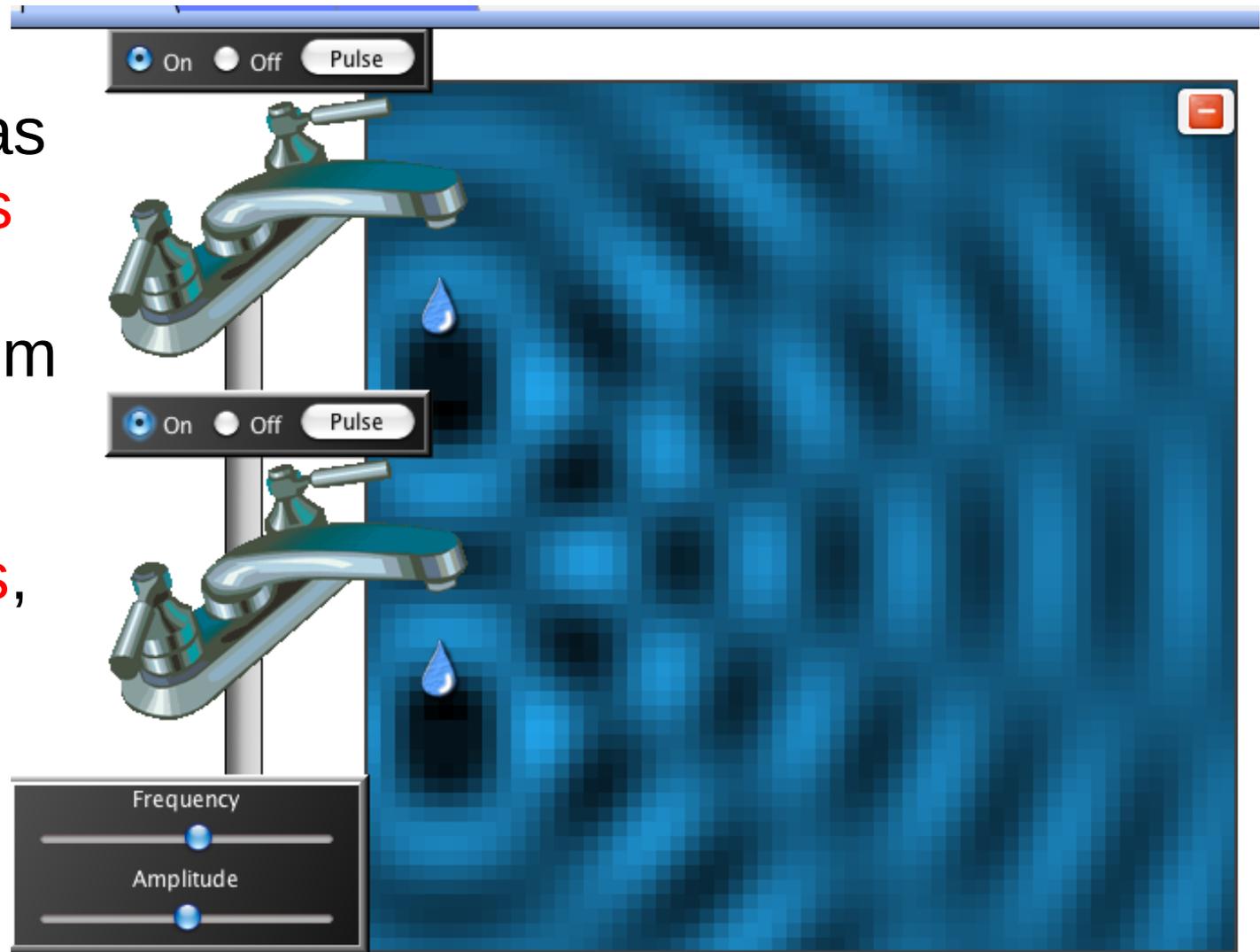
\Rightarrow **Onda estacionária**



Ondas

A Experiência da Fenda Dupla

No plano ou no espaço 3D, duas **ondas esféricas** com a mesma frequência fazem **interferência construtiva** em **certas posições**, e **destrutiva** em **outras**, assim produzindo um **padrão de interferência**.

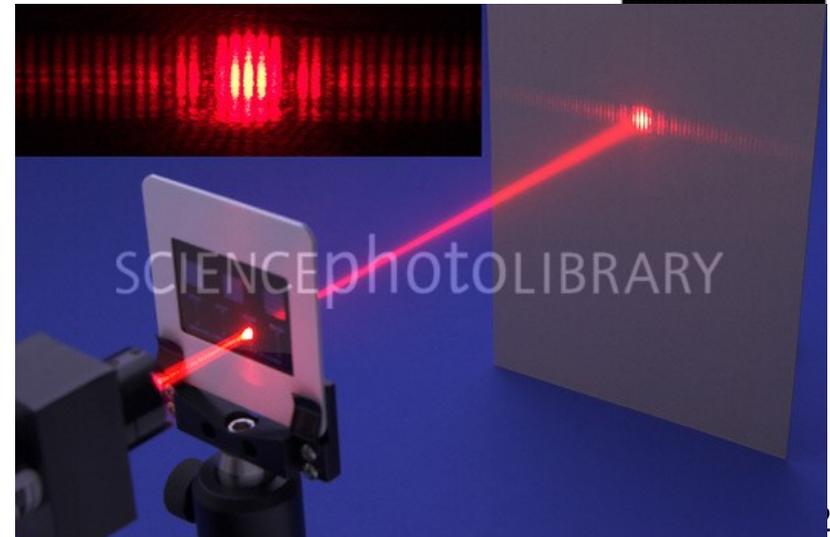
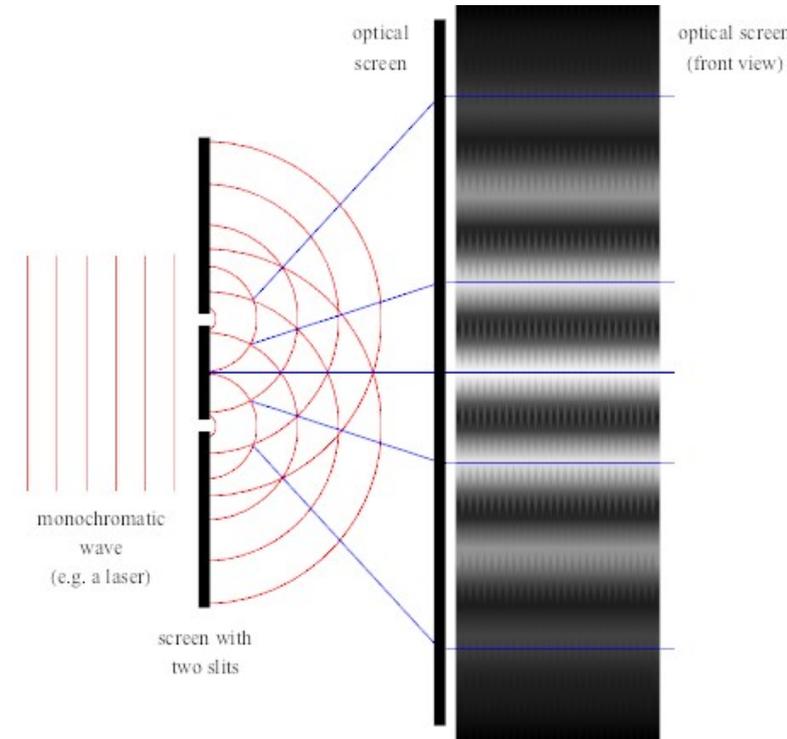


Ondas

A Experiência da Fenda Dupla

Esta situação pode ser gerada passando uma **luz monocromática** (i.e. um laser) por um **par de fendas** e colocando uma tela atrás.

Na tela aparece um **padrão de interferência** ou **difração**.



Pacotes de Ondas

Voltando ao Batimento

$$a = a_0 \cos \left(\frac{1}{2}(k_1+k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t \right) \cdot \cos \left(\frac{1}{2}(k_1-k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t \right),$$

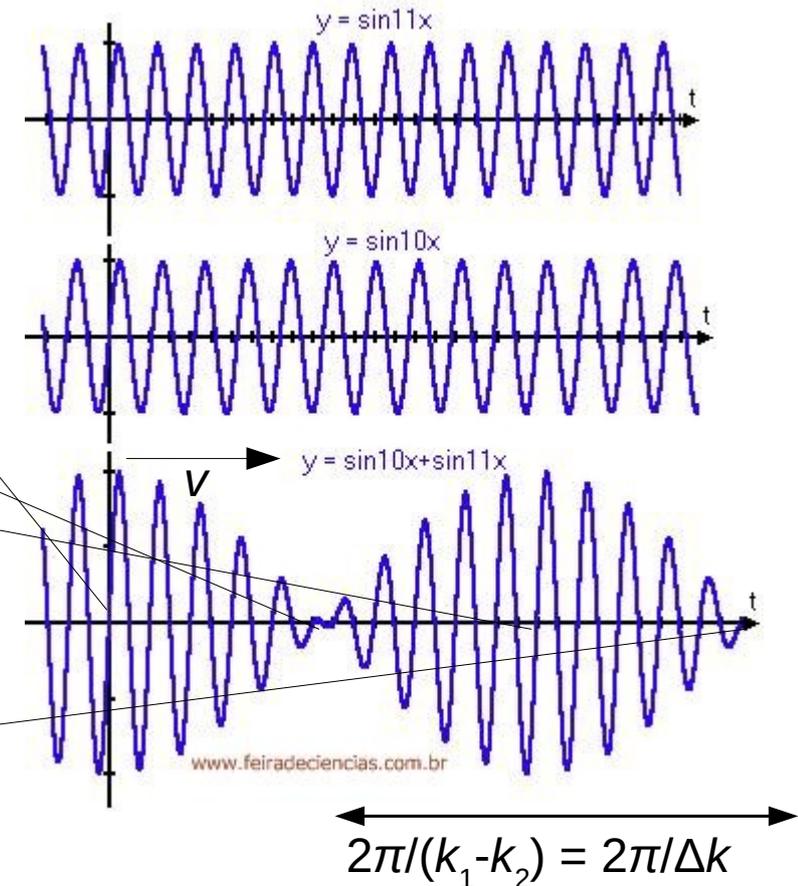
aqui, as duas ondas fazem interferência construtiva, por estarem em fase (diferença de fase 0)

e aqui, destrutiva, por estarem fora de fase (diferença de fase π)

aqui, elas fazem interferência construtiva **de novo**, por estarem em defasados por um comprimento de onda (diferença de fase 2π)

e aqui, destrutiva **de novo**, por estarem fora de fase de novo (diferença de fase 3π)

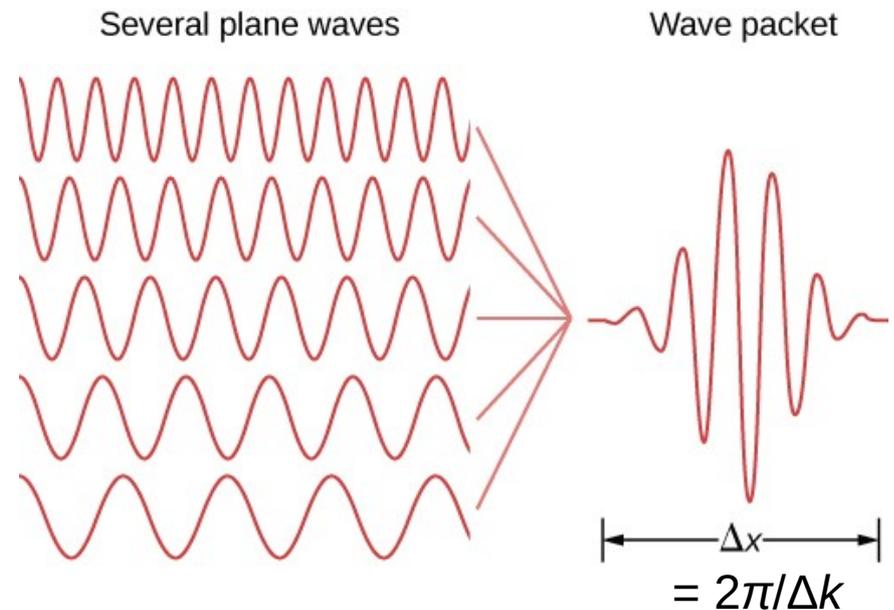
etc.



Pacotes de Ondas

Somamos agora, além de a_1 e a_2 , **todas** as **ondas** com número de onda entre k_1 e k_2 , isto é, todas as ondas numa **faixa** Δk (centrada em $k := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$) o que chamaremos de **pacote de ondas**.

Agora as ondas estarão **em fase** apenas **uma** vez. Lá, onde a_1 e a_2 estão em fase de novo (defasados por um comprimento de onda), as ondas intermediárias estão defasados por frações de um comprimento de onda e se cancelam com a_1 e a_2 e entre si.



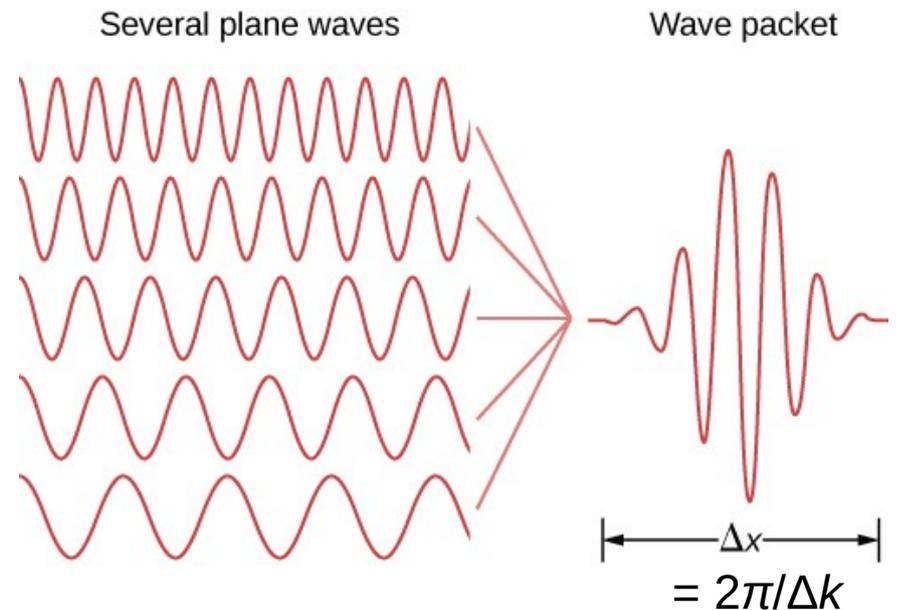
Pacotes de Ondas

=> Um **pacote de ondas** com **números de onda** numa **faixa de largura Δk** é **localizado** numa região de **largura $\Delta x = 2\pi/\Delta k$** .

Interpretando o pacote de ondas como uma

partícula/onda com uma **incerteza intrínseca** no **número de onda** de Δk e uma **incerteza** na **posição** de Δx , podemos dizer:

Quanto **melhor definido** é o **número de onda** da partícula/onda, tanto **menos bem definida** é a sua **posição**.



Pacotes de Ondas

Os dois casos extremos:

- $\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta k = \infty$:

A posição é bem definida, mas o número de onda totalmente indefinida, i. e. as propriedades ondulatórias são totalmente perdidas

\Rightarrow **partícula clássica**

- $\Delta k = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$:

O número de onda é bem definida, mas a posição é totalmente indefinida, i. e. as propriedades corpusculares são totalmente perdidas

\Rightarrow **onda clássica**

Podemos reformular a frase do slide anterior:

Quanto **mais** se manifesta a natureza **corpuscular** do pacote, tanto **menos** se manifesta a natureza **ondulatória**, e vice-versa.

\Rightarrow **Dualidade onda \Leftrightarrow partícula**

Pacotes de Ondas

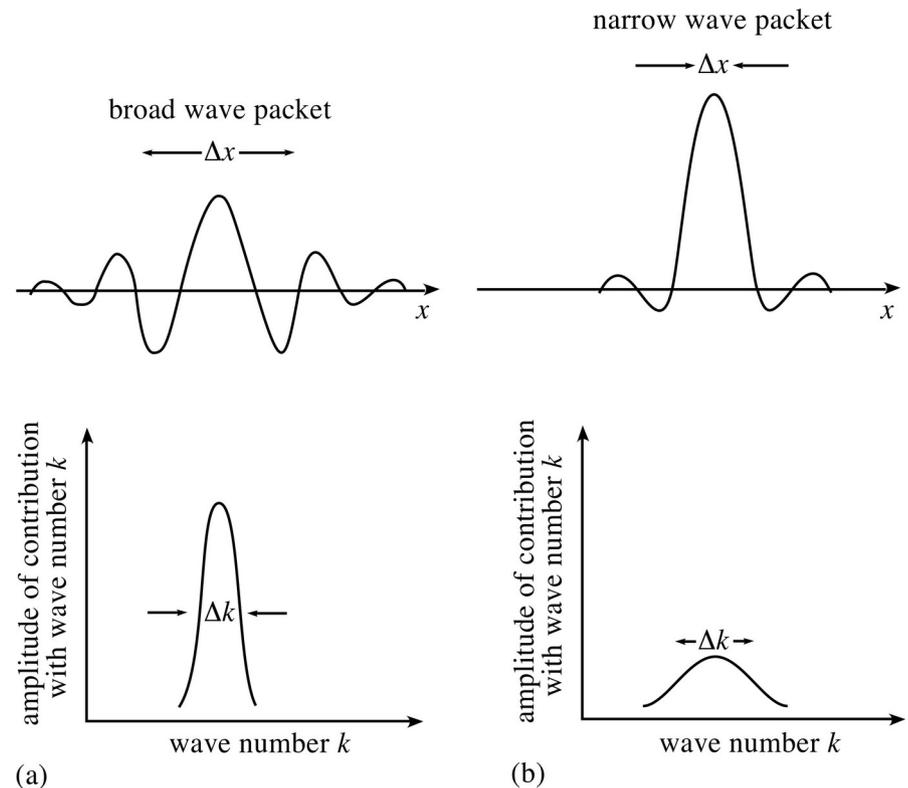
Na prática, a distribuição de números de onda de um pacote de ondas nunca é da forma “constante dentro de uma faixa Δk ”, mas é mais para “distribuição gaussiana com largura Δk ”.

No caso de uma gaussiana perfeita dá para calcular,

que a largura da distribuição de posições é $\Delta x = 1 / 2\Delta k$,

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1/2$$

Para distribuições gerais vale: $\Delta x \cdot \Delta k \geq 1/2$



Pacotes de Ondas

Em lugar de olhar pra onda em função da posição em um momento fixo, podemos olhar para ela em função do tempo numa posição fixa.

Em relação ao tempo, a frequência angular faz o papel que o número de onda faz em relação à posição, e podemos repetir todas as reflexões dos últimos slides, substituindo x por t e k por ω .

De maneira análoga achamos: $\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$

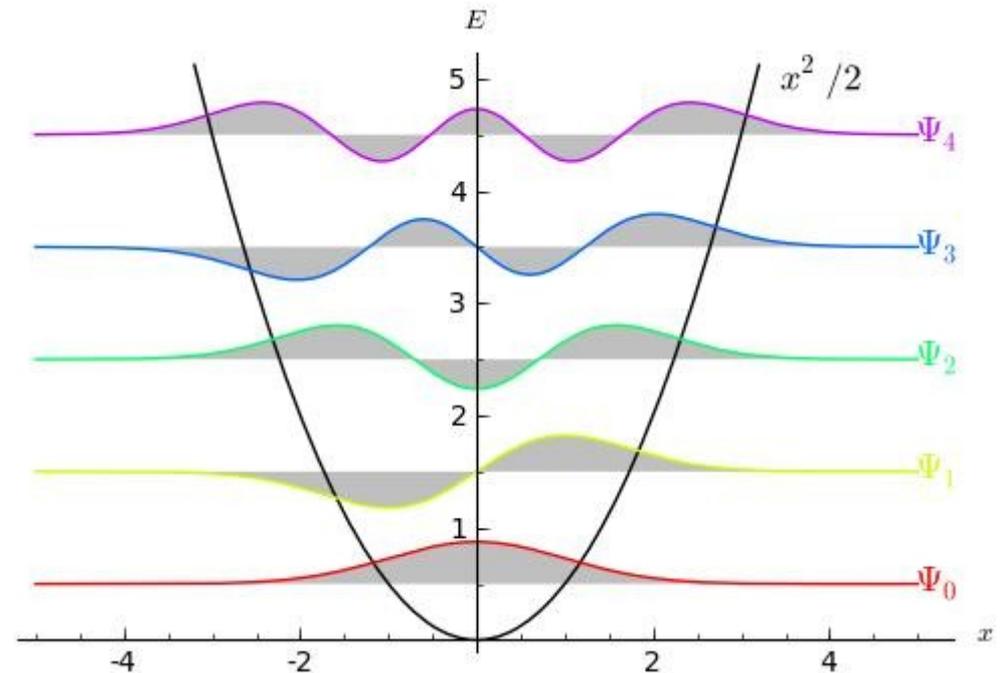
onde $\Delta \omega$ é a **largura** da faixa (a incerteza) de **frequências angulares** do pacote de ondas, e Δt , o **tempo** que o pacote leva para passar pela posição fixa (a incerteza no momento de passagem).

Física Quântica

FIM PARA HOJE



Universidade Federal do ABC



<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Quantica.html>