

Física Quântica

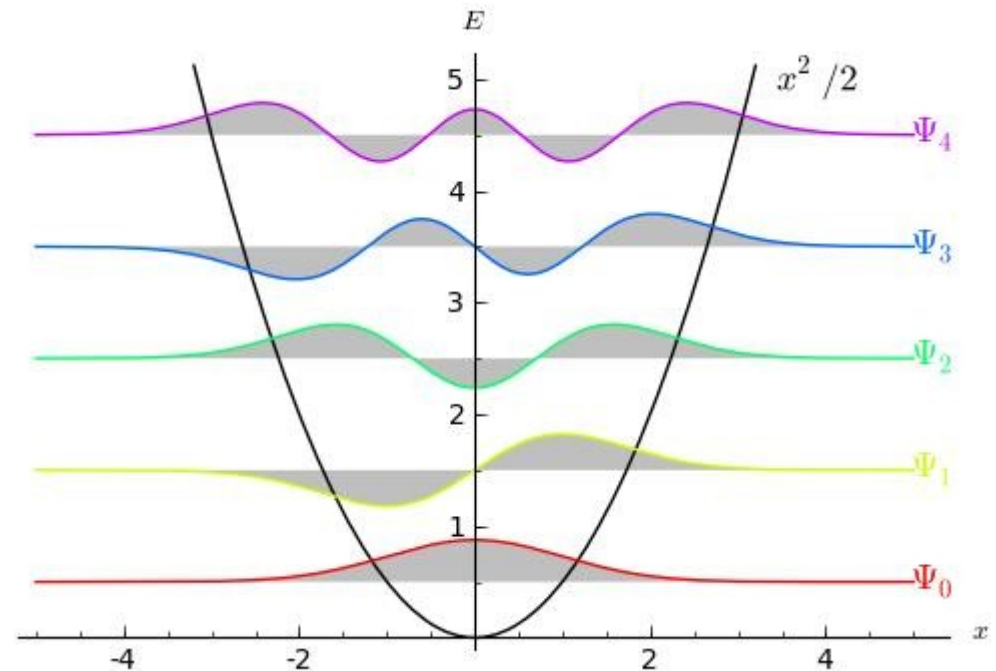
Aula 11: Spin do Elétron, Princípio de Exclusão de Pauli

Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br



Universidade Federal do ABC



<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Quantica.html>

Quantização do Momento Angular

O Experimento de Stern-Gerlach (1922)

A **quantização** d(a componente z d) o **momento angular** foi **corroborada** neste **experimento**:

Stern e Gerlach passaram um **feixe** de **átomos** de prata por um **campo magnético não-uniforme**, aqui vertical (eixo z).

Se os **elétrons** nos átomos têm um **momento angular** (orbital), eles devem ter um **momento magnético** também, na direção oposta do momento angular (cargas negativas em movimento).

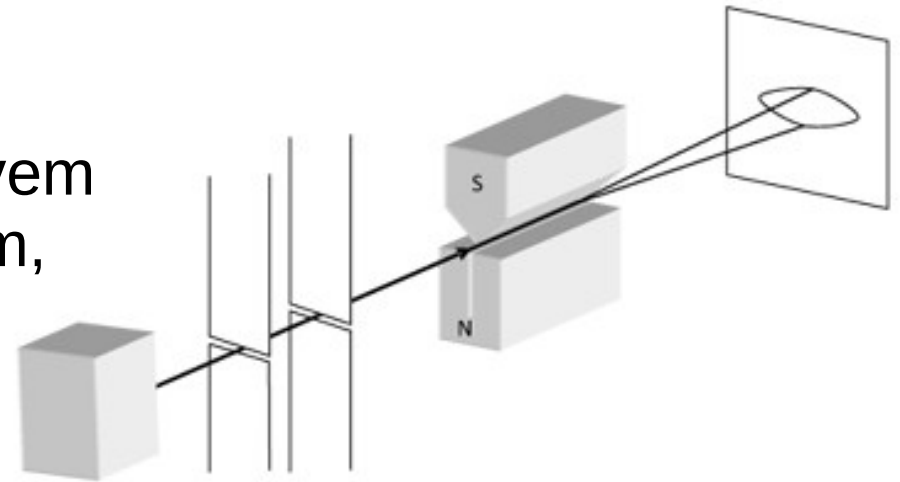
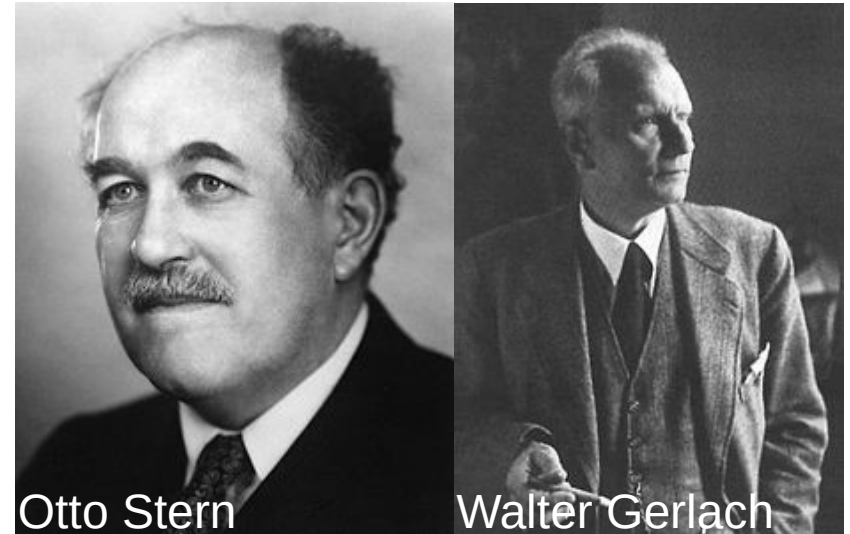


Figura 1 - Representação esquemática do experimento de Stern-Gerlach.

Quantização do Momento Angular

O Experimento de Stern-Gerlach

Os átomos devem ser **defletidos** na direção da variação do campo, a deflexão sendo proporcional à **componente** do **momento** na **direção** desta **variação**, neste caso também na direção do eixo z.

Classicamente, espera-se, que o feixe seja alargado na direção z, refletindo o espectro contínuo de valores da componente z do momento magnético e, então, do momento angular total dos elétrons.

Porém, eles observaram, que o **feixe** se **subdividiu** em um número (pequeno) de feixes, correspondendo a um número pequeno de **valores discretos** da **componente z** do **momento**.

=> A **orientação** do **momento angular** realmente é **quantizado**!

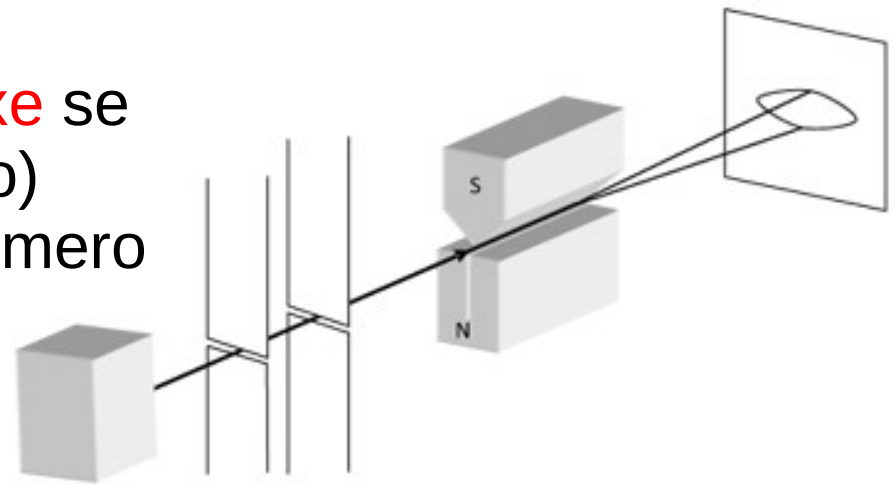


Figura 1 - Representação esquemática do experimento de Stern-Gerlach.

O Spin do Elétron

O Experimento de Stern-Gerlach

O mesmo experimento pode ser feito com um feixe de **elétrons**. (É preciso aplicar um campo elétrico horizontal para cancelar a força magnética que os elétrons sofrem por serem partículas carregadas, ao contrário de átomos de prata.)

Neste caso, os elétrons **não** estão em órbita(l) em torno de um núcleo atômico e **não** têm **momento angular orbital**.

Mesmo assim, o feixe se **divide** em **dois**!

Isto, por que os elétrons têm um tipo de **momento angular intrínseco** (ao contrário do momento angular orbital), chamado **spin**, cuja **componente z** pode assumir **dois valores**.

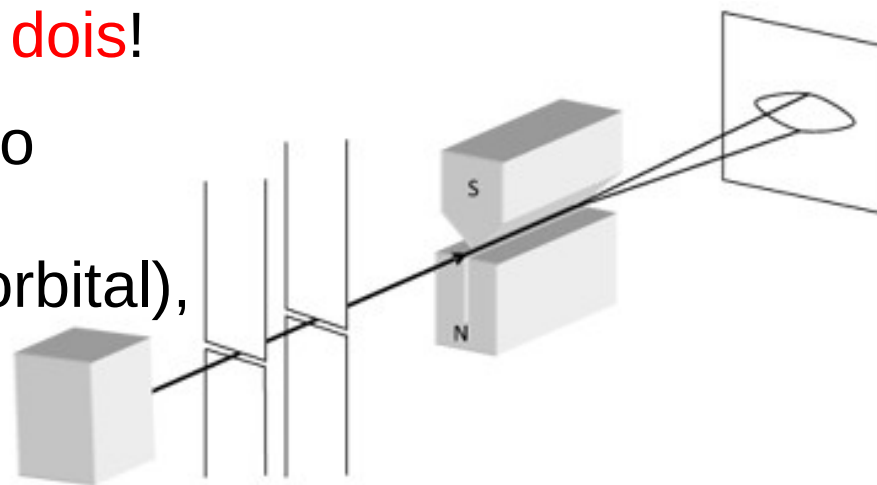


Figura 1 - Representação esquemática do experimento de Stern-Gerlach.

O Spin do Elétron

Formalmente, o spin pode ser tratado como o momento angular orbital, mas com o número quântico do módulo $s = 1/2$ em lugar de um número inteiro:

$$s = 1/2 \Rightarrow S = |\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar = \sqrt{3}/2 \cdot \hbar,$$

$$m_s = \pm 1/2 \Rightarrow S_z = m_s \cdot \hbar = \pm 1/2 \cdot \hbar$$

Os estados $m_s = +1/2$ e $m_s = -1/2$ são frequentemente chamados “spin pra cima”, \uparrow , e “spin pra baixo”, \downarrow .

Para um elétron num átomo pode-se definir o **momento angular total \mathbf{J}** , **composto** pelo **momento orbital** e o **spin**, usando regras bastante similares às regras para o módulo e a componente z na adição de vetores:

$$j = |l-1/2| \text{ ou } l+1/2, J = \sqrt{j(j+1)} \cdot \hbar, m_j = m_l + m_s = -j, \dots, j, J_z = m_j \cdot \hbar = L_z + S_z$$

Spin

Outras partículas elementares também têm spin. Exemplos:

- outros leptons e quarks: $s = \frac{1}{2}$

- fótons, glúons, ...: $s = 1$

e partículas compostas também:

- prótons e nêutrons (3 quarks): $s = \frac{1}{2}$

- núcleos: depende do alinhamento dos spins dos núcleons

- átomos: depende do alinhamento dos spins e momentos orbitais das componentes

Partículas com **spins inteiros** são chamados **bósons**, e com spins **semi-inteiros**, **férmions**.

O Spin do Elétron

Voltando a **elétrons** em **átomos**:

Então, para um elétron num átomo, agora temos além de n , l e m (que vamos chamar de m_l a partir de agora) um quarto número quântico, m_s , a **componente z** do **spin** que pode assumir os valores $+1/2$ ou $-1/2$:

=> **Função de onda** agora realmente **completa** de um **elétron** em um **átomo**:

$$\Psi_{nlm_l m_s} \quad 4 \text{ números quânticos}$$

Exemplo: existem dois estados fundamentais:

$$\Psi_{100-1/2} \text{ e } \Psi_{100+1/2}$$

Efeito Zeeman

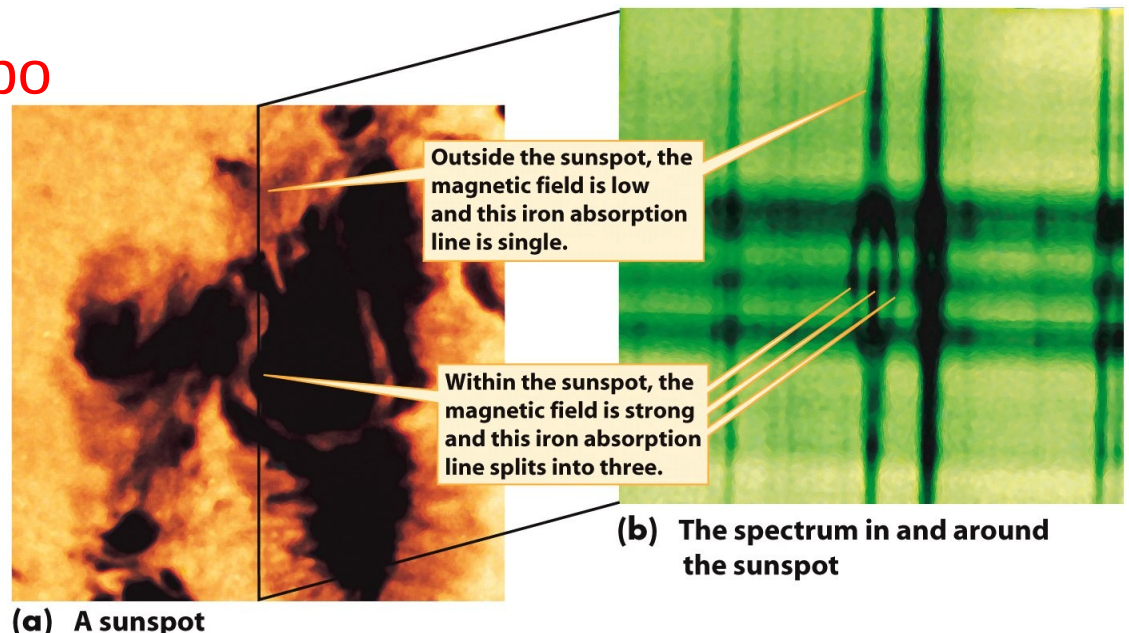
Fenômenos Eletromagnéticos:

A **energia potencial** de um **dipolo magnético** μ num **campo magnético** \mathbf{B} depende do seu grau de **alinhamento** com o campo ($U = -\mu \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B$ para \mathbf{B} na direção $+z$).

=> Aplicando um **campo magnético** a um conjunto de **átomos**, os **níveis de energia** destes são **desdobrados** nos diferentes valores da **componente** do **spin paralela** ao **campo**.

=> As **linhas espectrais** de átomos são **desdobrados** em **campos magnéticos**, fenômeno chamado **efeito Zeeman**.

Este efeito pode evidenciar campos magnéticos. Desta maneira descobriram, por exemplo, que manchas solares são associadas com campos magnéticos.



(a) A sunspot

Figure 16-20
Universe, Eighth Edition
© 2008 W.H. Freeman and Company

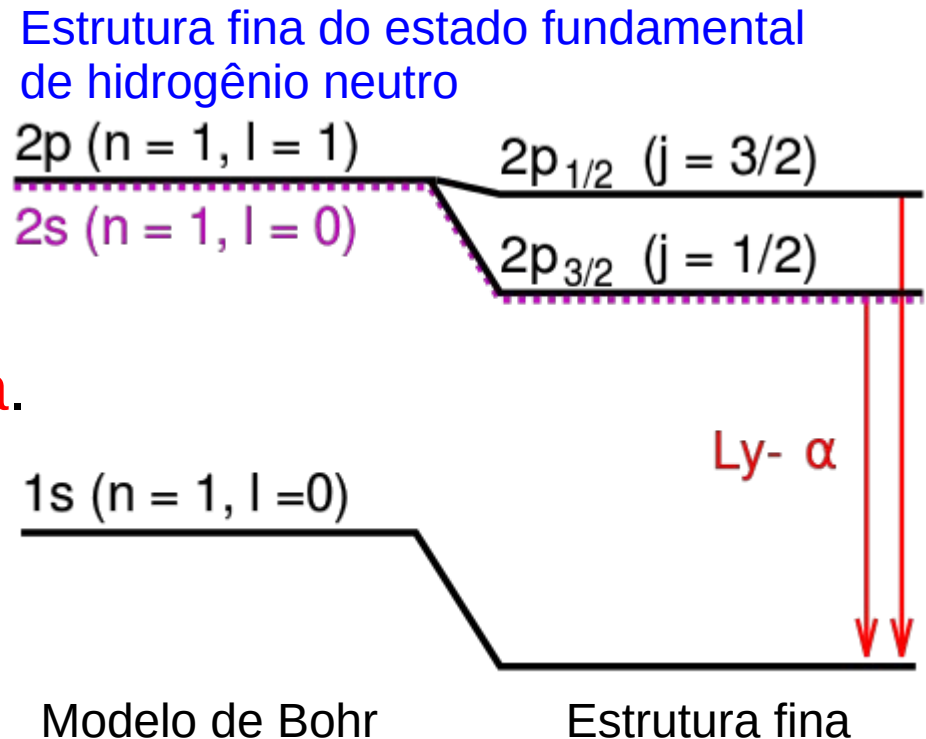
(b) The spectrum in and around the sunspot

Acoplamento Spin-Órbita

Este **desdobramento** também ocorre com os dois **estados** de **spin** do **elétron** no **campo** gerado pelo seu próprio **momento orbital**, fenômeno chamado **efeito** - ou **acoplamento spin-órbita**.

Em termos de **níveis** de **energia** chamamos este **desdobramento** de **estrutura fina**, e é da ordem de 10^{-5} eV (H) a 10^{-3} eV (Na).

O **desdobramento** de **linhas espectrais** envolvendo estes níveis é **detectável** através de um espectroscópio de boa resolução.



Estrutura Hiperfina

Já que o **núcleo** e o(s) **elétron**(s) de um átomo têm **spin** (de $\pm 1/2$), eles também têm **momentos magnéticos**.

Se os dois spins são **alinhados**, os dois **momentos magnéticos** são **anti-alinhados**, e a **energia** do átomo é ligeiramente **mais alta** (\Rightarrow Fen. EM).

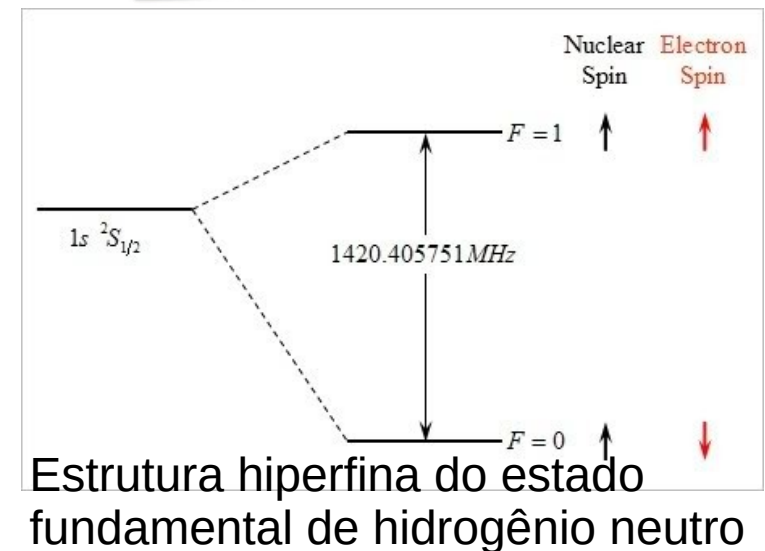
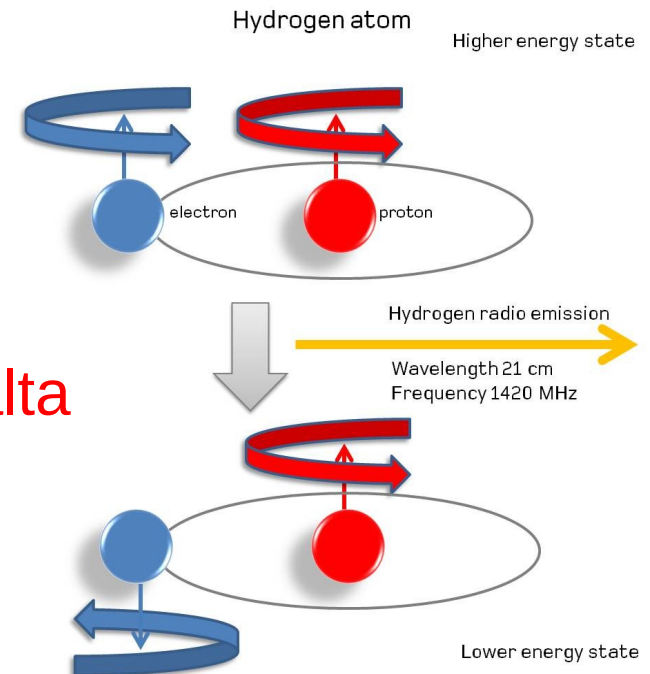
Este desdobramento de níveis de energia se chama **estrutura hiperfina**.

No caso de hidrogênio atômico, quando os spins se **desalinham**, o átomo **emite** um **fóton** de

$$h\nu = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 9.45 \cdot 10^{-25} \text{ J},$$

$$\text{ou } \nu = 1420 \text{ MHz, ou } \lambda = 21 \text{ cm.}$$

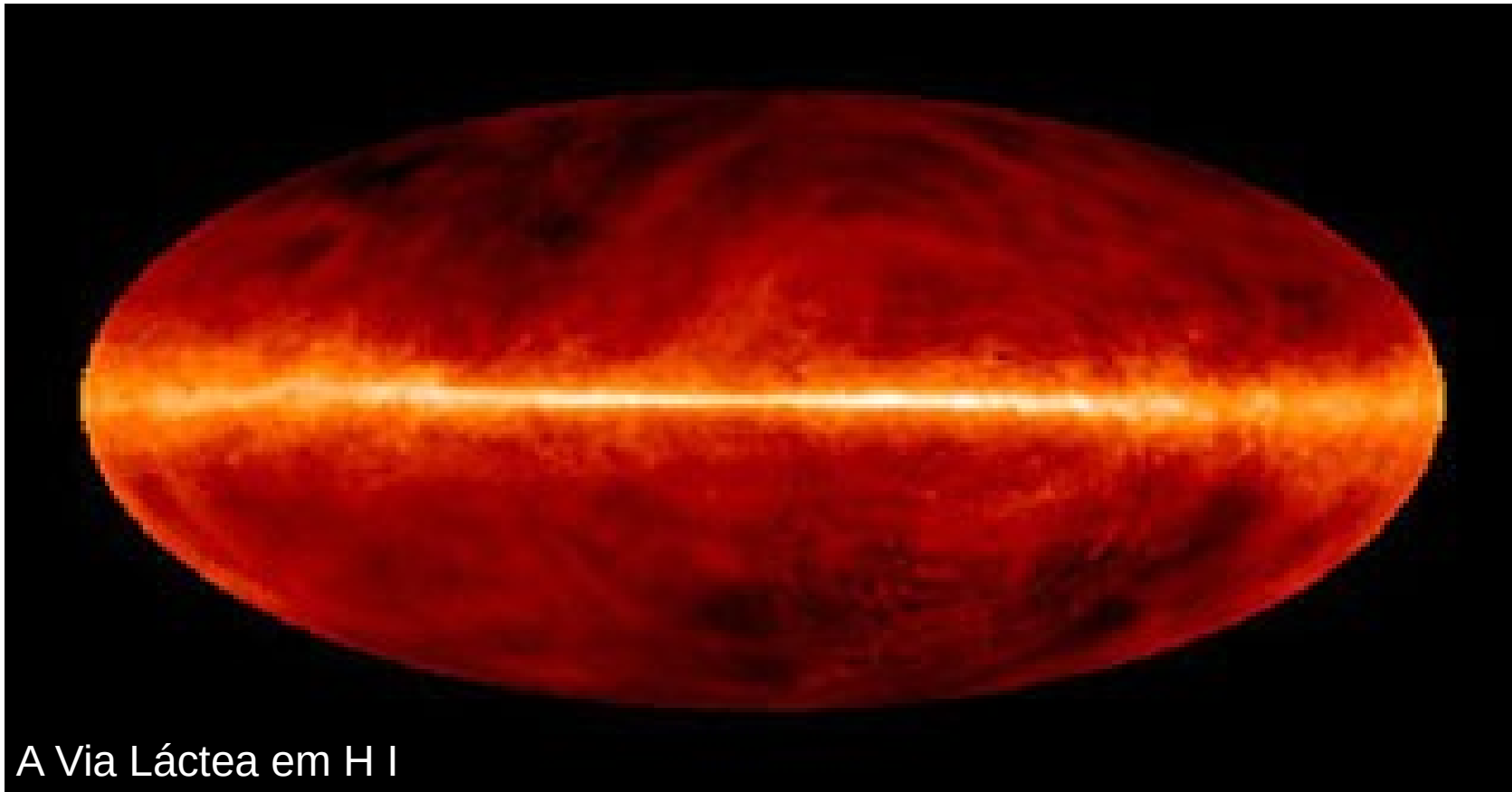
gerando uma **linha espectral** que astrônomos chamam de linha de 21 cm.



Estrutura Hiperfina

A linha de 21 cm é usada na astronomia para detectar e mapear **hidrogênio atômico** no meio interestelar.

Mais detalhes sobre isto, e sobre manchas solares, são dados na disciplina Noções de Astronomia e Cosmologia.



A Via Láctea em H I

A Função de Onda para Duas (ou mais) Partículas

Para um sistema de **duas partículas**, a **função de onda** vai ser uma função das **posições** das **duas partículas**:

$$\psi(x_1, x_2), \quad \text{tal que } \psi(x_1, x_2)\psi^*(x_1, x_2)dx_1dx_2 = P(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

é a **probabilidade** de encontrar, ao **mesmo tempo**, a partícula 1 entre as posições x_1 e x_1+dx_1 , e a partícula 2, entre x_2 e x_2+dx_2 .

A condição de **normalização** vira:

$$\int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

Analogicamente, no caso 3D temos

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \text{ e}$$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2 = P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2,$$

e a condição de normalização é uma integral sextupla.

A Equação de Schrödinger para Duas Partículas

A **Equação de Schrödinger** vira:

$$\underbrace{-\hbar^2/2m \cdot \partial^2 \psi(x_1, x_2) / \partial x_1^2}_{E_{\text{cin},1} \psi} \underbrace{-\hbar^2/2m \cdot \partial^2 \psi(x_1, x_2) / \partial x_2^2}_{E_{\text{cin},2} \psi} + V(x_1, x_2) \cdot \psi(x_1, x_2) = E \cdot \psi(x_1, x_2),$$

onde $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_{1 \leftrightarrow 2}(x_1, x_2)$,

$V_1(x_1)$ = o **potencial externo** que a **partícula 1** “sente”,

$V_2(x_2)$ = o **potencial externo** que a **partícula 2** “sente”, e

$V_{1 \leftrightarrow 2}(x_1, x_2)$ = a **energia potencial** da **interação** entre as 2 partículas.

No caso, que as partículas não interagem,

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

Partículas Intercambiáveis

Um caso interessante é, se as duas **partículas** são **iguais** (por exemplo dois elétrons).

Ao contrário do caso clássico, no caso quântico duas partículas “iguais” são **idênticas mesmo, indistinguíveis** de uma **maneira fundamental**.

Isto implica na **intercambiabilidade** delas, o fato de que “**nada muda**”, se elas **trocam de papel**.

A **função de onda** tem que refletir isto:

$$|\psi(x_2, x_1)|^2 = |\psi(x_1, x_2)|^2$$

$\Rightarrow \psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$ função **simétrica***,

ou $\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$ função **antissimétrica***

*Se trata da simetria em relação à operação “trocar as partículas”, não alguma simetria geométrica.

Partículas Intercambiáveis

Sejam $V_{1\leftrightarrow 2}(x_1, x_2) = 0$ (**sem interação** entre as partículas) e $V_1(x) = V_2(x) = V(x)$ (as duas partículas são submetidas ao **mesmo potencial externo**), e sejam $\psi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ duas **soluções** do problema de **uma partícula** neste potencial $V(x)$, então as combinações que seriam **soluções clássicas** “partícula 1 no estado n e partícula 2 no estado m ” e “partícula 1 no estado m e partícula 2 no estado n ”, $\psi_{nm}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \cdot \psi_m(x_2)$ e $\psi_{mn}(x_1, x_2) = \psi_m(x_1) \cdot \psi_n(x_2)$ **não** satisfazem a **intercambiabilidade**:

$$\begin{aligned} |\psi_{nm}(x_2, x_1)|^2 &= |\psi_n(x_2) \cdot \psi_m(x_1)|^2 = |\psi_n(x_2)|^2 \cdot |\psi_m(x_1)|^2 = |\psi_m(x_1)|^2 \cdot |\psi_n(x_2)|^2 \\ &\neq |\psi_{nm}(x_1, x_2)|^2 = |\psi_n(x_1)|^2 \cdot |\psi_m(x_2)|^2 \text{ e} \\ |\psi_{mn}(x_2, x_1)|^2 &= |\psi_m(x_2) \cdot \psi_n(x_1)|^2 = |\psi_m(x_2)|^2 \cdot |\psi_n(x_1)|^2 = |\psi_n(x_1)|^2 \cdot |\psi_m(x_2)|^2 \\ &\neq |\psi_{mn}(x_1, x_2)|^2 = |\psi_m(x_1)|^2 \cdot |\psi_n(x_2)|^2, \end{aligned}$$

isto é, elas são nem simétricas, nem antissimétricas.

Partículas Intercambiáveis

Mas as seguintes combinações **satisfazem** a **intercambiabilidade** e são **soluções** no caso **quântico**:

$$\psi_S(x_1, x_2) = C_S \cdot [\psi_n(x_1) \cdot \psi_m(x_2) + \psi_m(x_1) \cdot \psi_n(x_2)] \quad \text{solução simétrica}$$

$$\psi_A(x_1, x_2) = C_A \cdot [\psi_n(x_1) \cdot \psi_m(x_2) - \psi_m(x_1) \cdot \psi_n(x_2)] \quad \text{solução antissimétrica}$$

onde C_S e C_A são constantes de normalização.

Estas soluções podem ser interpretadas como “Metade do tempo, a partícula 1 está no estado n e partícula 2, no estado m , e na outra metade do tempo, a partícula 1 está no estado m e partícula 2, no estado n ”.

Partículas Intercambiáveis

Férmions (partículas com spins semi-inteiros) **idênticos** sempre fazem combinações **antissimétricas** e **bósons** (spins inteiros), **simétricas**.

O que isto significaria para dois **férmions idênticos** no **mesmo estado**, $n = m$?

$$\psi_A(x_1, x_2) = C_A \cdot [\psi_n(x_1) \cdot \psi_n(x_2) - \psi_n(x_1) \cdot \psi_n(x_2)] = 0$$

não pode ser!

=> **Princípio de Exclusão** de Pauli

O Princípio de Exclusão de Pauli

1925 (elétrons), 1940 (todos os férmions)

Duas (ou mais) **férmions idênticos** (exemplos: elétrons, prótons, nêutrons) **não** podem encontrar-se ao **mesmo tempo** no **mesmo estado quântico**, dado pela função de onda, respectivamente, pelos números quânticos.

Bósons (ex. fótons, partículas α , átomos de hélio), **não** são sujeitos ao princípio de exclusão.

Pelo contrário, bósons indênticos têm uma certa preferência por encontrar-se no mesmo estado, i. e. os fótons num raio de laser.



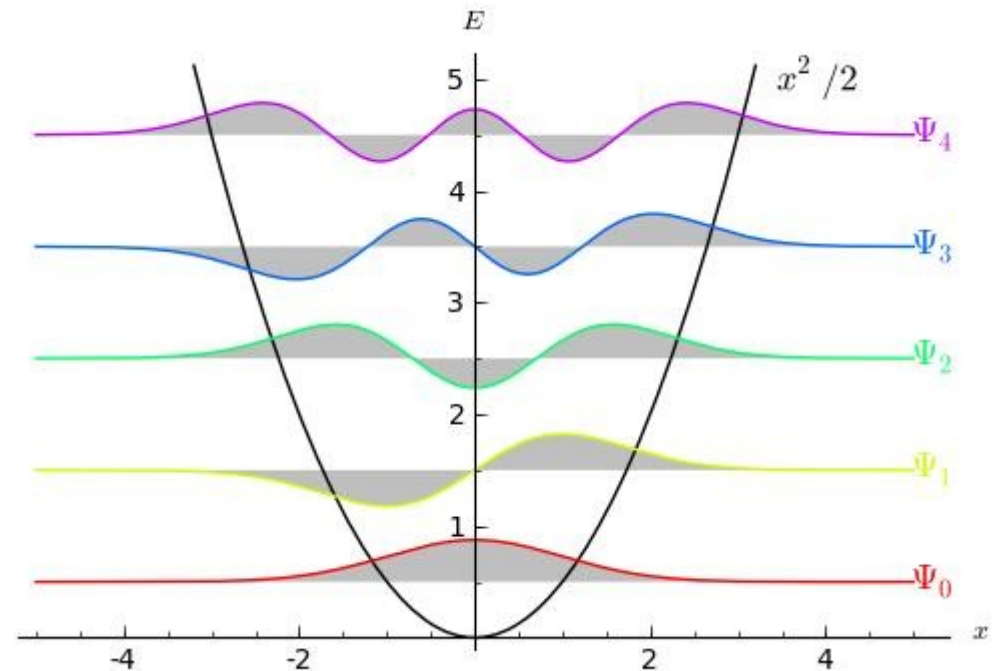
Wolfgang Pauli

Física Quântica

FIM PARA HOJE



Universidade Federal do ABC



<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Quantica.html>