

## Lista de exercícios 2: Física Quântica

1. Verifique que a função

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & x < -a/2 \text{ ou } x > a/2 \end{cases}$$

é uma solução da equação de Schrödinger na região  $-a/2 \leq x \leq a/2$  para uma partícula que se move livremente, mas esta confinada nessa região. Determine a energia associada ao estado cuja a função de onda é  $\Psi(x, t)$  acima. Encontre a constante de normalização  $A$ .

2. Uma partícula de massa  $m$  é confinada ao espaço unidimensional entre duas barreiras de potencial infinito e que distam  $L$  uma da outra. (Suponha que a energia potencial da partícula é nula na região de confinamento). A energia da partícula é quantizada pela condição de onda estacionária  $n\lambda/2 = L$ , onde  $n$  é um número inteiro e  $\lambda$  o comprimento de onda da partícula. (a) Mostre que as energias permitidas são dadas por  $E_n = n^2 E_1$ , onde  $E_1 = \hbar^2/8mL^2$ . (b) Determine  $E_1$  para um elétron confinado na região de  $L = 0.1$  nm de comprimento e faça um diagrama de níveis de energia para os estados de  $n = 1$  até  $n = 5$ . (c) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido por esse sistema quando o elétron sofre uma transição do estado  $n = 3$  para o estado  $n = 1$ ; e do estado  $n = 5$  para o estado  $n = 2$ .
3. (a) Mostre que a função de onda  $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo. (b) Mostre que a função de onda  $\psi(x, t) = Ae^{k(x - \omega t)}$  não satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo. (c) Mostre que a função de onda  $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  não satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo.
4. Em uma região do espaço, uma partícula possui uma função de onda dada por  $\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2L^2}}$  e energia  $E = \hbar^2/2mL^2$ , onde  $L$  é um comprimento. (a) Determine a energia potencial em função de  $x$ . (b) Qual tipo de potencial clássico tem essa forma? (c) Determine a energia cinética em função de  $x$ . (d) Mostre que  $x = L$  é o ponto de retorno clássico. (e) Seja  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$  a energia potencial de um oscilador harmônico unidimensional, onde  $\omega$  é a frequência angular. Compare  $V(x)$  com o resultado obtido no item (a) e mostre que a energia total do estado com a função de onda  $\psi(x)$  acima pode ser escrita na forma  $E = \hbar\omega/2$ .
5. O comprimento de onda da luz emitida por um laser de rubi é 694.3 nm. Se a emissão de um fóton com este comprimento de onda estivesse associada à transição de um elétron do nível  $n = 2$  para o nível  $n = 1$  de um poço quadrado infinito, qual seria a largura  $L$  do poço?
6. Um elétron se encontra no estado  $n = 5$  de um poço unidimensional quadrado infinito. (a) Mostre que a probabilidade de encontrar o elétron entre os pontos  $x = 0.2L$  e  $x = 0.4L$  é  $1/5$ . (b) Calcule a probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo  $\Delta x = 0.02L$  em torno do ponto  $x = L/2$ .
7. (a) Mostre que, no caso estacionário em uma dimensão, a corrente de densidade de probabilidade é nula para um estado ligado, em qualquer ponto do espaço. (b) Usando o resultado do item anterior, mostre que  $\langle p \rangle = 0$  para um estado ligado em uma dimensão. Dica: Use integração por partes.
8. A energia do oscilador harmônico é dada por  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , onde o primeiro termo é a energia cinética e o segundo é a energia potencial. Sabendo que o estado fundamental é um estado ligado, usando o resultado do exercício 10 (b) escreva uma expressão para o valor esperado da energia em termos das incertezas  $\Delta p$  e  $\Delta x$  (use definição dessas grandezas e também que, por simetria,  $\langle x \rangle = 0$ ).
9. Mostre, diretamente a partir da equação de Schrödinger dependente do tempo, que  $\langle p^2 \rangle = \langle 2m[E - V(x)] \rangle$  para qualquer potencial  $V(x)$ , e que  $\langle p^2 \rangle = \langle 2mE \rangle$  para o poço quadrado infinito. Use este resultado para calcular  $\langle p^2 \rangle$  para o estado fundamental do poço quadrado infinito.
10. Calcule  $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ ,  $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$  e  $\sigma_x \sigma_p$  para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito. O resultado do produto  $\sigma_x \sigma_p$  é consistente com o princípio de incerteza? Explique.
11. Discuta qualitativamente os fenômenos de reflexão e transmissão de ondas quando na barreira de potencial e no potencial de poço quadrado.

12. Uma partícula quântica esta sujeita a potencial degrau de altura maior do que a energia cinética dessa partícula. Faça o esboço do modulo quadrado da função de onda da partícula (dica: Tente chegar na fórmula geral de solução primeiro. O esboço deve qualitativamente mostrar todas as interferências de ondas!).
13. Uma partícula quântica esta sujeita a potencial degrau de altura menor do que a energia cinética da partícula. (a) Faça o esboço do modulo quadrado da função de onda da partícula. (b) Considere agora que a partícula esta sujeita a um potencial na forma de barreira retangular, com altura maior do que a energia cinética da partícula. Faça o esboço do modulo quadrado da função de onda da partícula nessa situação.
14. Uma partícula livre de massa  $m$  e número de onda  $k_1$  está movendo-se para a direita. No ponto  $x = 0$ , o potencial muda bruscamente de 0 para  $V_0$  e permanece com este valor para todos os valores positivos de  $x$ . Se a energia inicial da partícula é  $E = 2V_0$ : (a) Calcule o número de onda  $k_2$  na região  $x > 0$  como função de  $k_1$ . (b) Calcule o coeficiente de reflexão  $R$  do degrau de potencial. (c) Qual é o valor do coeficiente de transmissão  $T$ ? (d) Para cada milhão de partículas com número de onda  $k_1$  que incidem no degrau de potencial, quantas continuam a viajar no sentido positivo do eixo  $x$ ? Como se compara este valor com a previsão clássica?
15. Repita o exercício anterior, mas agora com o degrau de potencial definido por  $V = 0$  para  $x < 0$  e  $V = -V_0$  para  $x > 0$ , fazendo a velocidade da partícula aumentar em vez de diminuir. O número de onda da partícula incidente continua a ser  $k_1$ , e a energia inicial continua a ser  $E = 2V_0$ . Responda às questões (a), (b), (c) e (d) do exercício anterior, discutindo os resultados obtidos.
16. Em um dispositivo semiconductor, uma camada de óxido forma uma barreira com 0.5 nm de largura e 10 V de altura entre os dois fios condutores. Elétrons chegam a barreira depois de serem acelerados por uma tensão de 5 V, partindo aproximadamente do repouso. (a) Qual fração dos elétrons incidentes consegue atravessar a barreira por tunelamento? (b) Qual deve ser a tensão de aceleração para que a fração dos elétrons incidentes que consegue atravessar a barreira por tunelamento seja o dobro do valor encontrado no item (a)?
17. Mostre que o coeficiente de transmissão é nulo para o caso de partículas incidentes em um degrau potencial de altura  $V_0 > E$ , onde  $E$  é a energia cinética inicial das partículas.
18. Um feixe de prótons com uma energia cinética de 50 MeV incide sobre um degrau de potencial de 30 MeV. (a) Que fração do feixe é refletida? (b) Que fração do feixe é transmitida? (c) Como se modificam os resultados encontrados em (a) e (b), se a energia dos prótons for de 20 MeV?
19. Use a equação de Schrödinger para mostrar que o valor esperado da energia cinética de uma partícula é dado por

$$\langle E_{cin.} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \right] dx$$

20. Considere uma partícula movendo-se em um espaço bidimensional definido por  $V = 0$  para  $0 < x < L$ ,  $0 < y < L$  e  $V = \infty$  para quaisquer outros valores de  $x$  e  $y$ . (a) Escreva as funções de onda da partícula neste poço de potencial. (b) Escreva uma expressão para as energias correspondentes. (c) Quais são os conjuntos de números quânticos do estado degenerado de menor energia?
21. Considere o átomo de hidrogênio no estado  $n = 4$ . (a) Quais são os valores possíveis de  $l$ ? (b) Quais são os valores possíveis de  $m$  para cada valor de  $l$ ? (c) Levando em conta o fato de que existem dois estados quânticos para cada combinação de valores de  $l$  e  $m$  por causa do spin do elétron, determine o número total de estados na camada  $n = 4$ . (d) O que significa esse número?
22. Para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, determine a probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo  $\Delta r = 0.02a_0$  (a) com centro em  $r = a_0$ ; (b) com centro em  $r = 2a_0$ .
23. Mostre que no átomo de hidrogênio no estado  $n = 2$  e  $l = 1$  a distância mais provável entre o elétron e o núcleo é  $r = 4a_0$ .