

Lista de exercícios 2: Física Quântica 2014.3

Princípio de incerteza.

1. Considere um elétron livre com energia 0,5 keV que terá sua posição e momento determinados no mesmo instante. Se a posição for determinada com uma precisão de 2 Å, qual será a porcentagem de incerteza em seu momento? $1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, $m \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$. **Resposta:** 2,2 %
2. No interior de um núcleo atômico, um próton está sujeito aos efeitos da interação nuclear forte e não pode se afastar mais do que 2 fm (1 fm = 10^{-15} m), aproximadamente, das outras partículas que compõem o núcleo (outros prótons e nêutrons). Considere o modelo, para o sistema físico do núcleo, em que o próton está confinado em um cubo de aresta 2 fm. Qual é a ordem de grandeza da energia cinética mínima de um próton confinado em um volume com estas dimensões? **Resposta:** 3,9 MeV.
3. A energia de um certo estado nuclear pode ser medida com indeterminação $\Delta E = 0,03 \text{ eV}$. Qual é o tempo de vida mínimo desse estado? **Resposta:** $1,1 \times 10^{-14} \text{ s}$.
4. Os núcleos atômicos são também sistemas quânticos com níveis de energia discretos. Um estado excitado de um certo núcleo tem uma meia vida de $0,5 \times 10^{-9} \text{ s}$, aproximadamente. Considerando que este tempo é a incerteza Δt para a emissão de um fóton, use a relação $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ para calcular a menor incerteza na frequência, $\Delta \nu$, do fóton emitido. Calcule a incerteza relativa, $\Delta \nu/\nu$, quando o comprimento de onda dos fótons emitidos é $\lambda = 0,01 \text{ nm}$. **Respostas:** $1,6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, e $5,3 \times 10^{-12}$.

Função de onda, equação de Schrödinger, valores médios.

5. Verifique que a função

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & x < -a/2 \text{ ou } x > a/2 \end{cases}$$

é uma solução da equação de Schrödinger na região $-a/2 \leq x \leq a/2$ para uma partícula que se move livremente, mas esta confinada nessa região. Determine a energia associada ao estado cuja a função de onda é $\Psi(x, t)$ acima. Encontre a constante de normalização A . **Respostas:** $E = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m a^2}$; $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$

6. Resolva a equação de Schrödinger para o sistema idealizado de uma partícula confinada ao espaço unidimensional entre duas barreiras de potencial infinito. A distância entre as barreiras, isto é, o comprimento da região de confinamento da partícula, é L . Suponha que a energia potencial da partícula é nula na região entre as barreiras, de modo que sua energia total é igual à energia cinética, $\frac{p^2}{2m}$. (a) Mostre que as energias permitidas são dadas por $E_n = n^2 E_1$, com $E_1 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$ e n um número inteiro. (b) Determine E_n para o caso da partícula ser um elétron, com o comprimento da região de confinamento $L = 0,2 \text{ nm}$. (c) Qual seria a energia liberada por esse sistema com o elétron numa transição do estado $n = 3$ para o estado $n = 2$? **Respostas:** b) $E_n = n^2 9,4 \text{ eV}$; c) $47,0 \text{ eV}$.
7. Um elétron está confinado dentro de uma camada delgada num semiconductor. Tratando-a como uma lâmina de espessura a entre paredes impenetráveis, estime a , sabendo que a diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é de $0,05 \text{ eV}$. **Resposta:** $a = 4,8 \times 10^{-9} \text{ m}$.
8. Em uma região do espaço, uma partícula possui uma função de onda dada por $\psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$ e energia $E = \hbar^2/2mL^2$, onde L é um comprimento. (a) Determine a energia potencial em função de x . (b) Qual tipo de potencial clássico tem essa forma? (c) Determine a energia cinética em função de x . (d) Mostre que $x = L$ é o ponto de retorno clássico. (e) Seja $V(x) = mw^2x^2/2$ a energia potencial de um oscilador harmônico unidimensional, onde w é a frequência angular. Compare $V(x)$ com o resultado obtido no item (a) e mostre que a energia total do estado com a função de onda $\psi(x)$ acima pode ser escrita na forma $E = \hbar w/2$. **Respostas:** a) $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{x^2}{L^4}$; c) $K = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$

9. Considere um sistema no qual um elétron está confinado numa região unidimensional entre duas barreiras de potencial. Tais barreiras são altas o suficiente, em comparação com a energia cinética do elétron, de modo que podem ser tomadas como infinitas. Com as barreiras localizadas em $x = 0$ e $x = L$, sendo que entre elas a energia potencial é nula, determine: (a) a probabilidade de encontrar o elétron no intervalo $0, 1L \leq x \leq 0, 2L$, quando o estado é o de número quântico $n = 5$; (b) e, nesse mesmo estado, a probabilidade de encontrar o elétron no intervalo $0, 49L \leq x \leq 0, 51L$. **Respostas:** a) 0, 1; b) 0, 04

10. Para o seguinte estado estacionário de uma partícula com energia E

$$\psi_E(x, t) = \left[C_+ e^{i \frac{px}{\hbar}} + C_- e^{-i \frac{px}{\hbar}} \right] e^{-i \frac{Et}{\hbar}},$$

calcule $\rho_E = |\psi_E|^2$ e $j_E = -i \frac{\hbar}{2m} (\psi_E^* \frac{d}{dx} \psi_E - \psi_E \frac{d}{dx} \psi_E^*)$. Verifique que $\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \frac{\partial j_E}{\partial x} = 0$.

11. Mostre, diretamente a partir da equação de Schrödinger dependente do tempo, que $\langle p^2 \rangle = \langle 2m[E - V(x)] \rangle$ para qualquer potencial $V(x)$, e que $\langle p^2 \rangle = \langle 2mE \rangle$ para o poço quadrado infinito. Use este resultado para calcular $\langle p^2 \rangle$ para o estado fundamental, $n = 1$, e para o primeiro estado excitado, $n = 2$, do poço quadrado infinito. **Respostas:** $\langle p^2 \rangle_{n=1} = \frac{\hbar^2}{4L^2}$; $\langle p^2 \rangle_{n=2} = \frac{\hbar^2}{L^2}$;

12. Calcule $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ e $\sigma_x \sigma_p$ para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito. O resultado do produto $\sigma_x \sigma_p$ é consistente com o princípio de incerteza? Explique.

Respostas: $\sigma_x = \sqrt{-\frac{L^2}{2\pi^2} + \frac{L^2}{12}}$; $\sigma_p = \frac{\hbar}{2L}$; $\sigma_x \sigma_p = \sqrt{-\frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{12}} \frac{\hbar}{2}$

13. No tempo $t = 0$ uma partícula é representada pela função de onda

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ A \frac{b-x}{b-a} & \text{se } a < x \leq b \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > b, \end{cases}$$

(a) Normalize $\Psi(x, 0)$, isto é, calcule o fator de normalização A como função de a e b . (b) Faça um esboço do gráfico de $\Psi(x, 0)$. (c) Qual a probabilidade de encontrar a partícula do lado esquerdo de a ? (d) Calcule o valor médio de x . **Respostas:** a) $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$; c) $\frac{a}{b}$; d) $\frac{2a+b}{4}$.

14. A solução mais geral da equação de Schrödinger dependente do tempo para um potencial da forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < a \\ \infty & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq a \end{cases}$$

(poço quadrado infinito) é dada por

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i(E_n/\hbar)t}$$

em que

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right)$$

e

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

Os coeficientes c_n são determinados de acordo com a condição inicial do sistema, $\Psi(x, 0)$. As funções $\psi_n(x)$ são soluções da equação de Schrödinger independente do tempo e os valores E_n são as energias quantizadas do sistema. (a) Mostre que as funções $\psi_n(x)$ são ortonormais, ou seja, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1)$$

em que

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

(b) Usando a relação (1), mostre que

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx. \quad (2)$$

(c) Supondo que a função de onda inicial é tal que

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax & \text{se } 0 < x \leq \frac{a}{2} \\ A(a-x) & \text{se } \frac{a}{2} < x < a \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq a, \end{cases}$$

com $A = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^3}}$, calcule $\Psi(x, t)$. (d) Supondo que a função de onda inicial é tal que $\Psi(x, 0) = \psi_2(x)$, calcule a probabilidade da partícula ser encontrada entre $x = \frac{a}{3}$ e $x = \frac{2a}{3}$. **Resposta:** c) $\Psi(x, t) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i[(\hbar\pi^2 n^2)/(2ma^2)]t}$; d) 0,1955.

Barreiras de potencial.

15. Uma partícula está sujeita a potencial degrau de altura maior do que a energia cinética dessa partícula. Faça o esboço do módulo quadrado da função de onda da partícula (dica: Tente chegar na fórmula geral de solução primeiro. O esboço deve qualitativamente mostrar todas as interferências de ondas!).
16. Uma partícula está sujeita a potencial degrau de altura menor do que a energia cinética da partícula. (a) Faça o esboço do módulo quadrado da função de onda da partícula. (b) Considere agora que a partícula está sujeita a um potencial na forma de barreira retangular, com altura maior do que a energia cinética da partícula. Faça o esboço do módulo quadrado da função de onda da partícula nessa situação.
17. Considere o potencial degrau

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ (região I)} \\ V_0 & \text{se } x > 0 \text{ (região II)}, \end{cases}$$

em que V_0 é uma constante positiva. (a) Sendo $E = V_0/2$, calcule o coeficiente de reflexão R . Nesse caso qual é o comportamento da função de onda na região onde $x > 0$? É possível observar alguma partícula nesta região? (b) Sendo $E = 2V_0$, calcule o coeficiente de reflexão R e o coeficiente de transmissão T . Mostre que $R + T = 1$. **Resposta:** a) $R = 1$. Na região onde $x > 0$ (região II), a função de onda cai exponencialmente, $\psi_{II}(x) \propto e^{-\frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}x}$; b) $R = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})^2}$ e $T = \frac{8\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$.

18. Um feixe de elétrons de 1 eV incide sobre uma barreira retangular de 4 eV de altura e 10 \AA de espessura. (a) determine as probabilidades de transmissão e de reflexão para os elétrons no feixe. (b) se os elétrons tivessem energia de 3,5 eV quais seriam os valores dessas probabilidades? **Respostas:** (a) $T = 5,88 \times 10^{-8}$; (b) $T = 1,25 \times 10^{-3}$

19. Um feixe de prótons com energia cinética média de 50 MeV incide sobre um degrau de potencial de 30 MeV. (a) Qual a fração do feixe que é refletida? (b) Qual a fração do feixe que é transmitida? (c) Como se modificam os resultados encontrados em (a) e (b), se a energia dos prótons for de 20 MeV? **Respostas:** (a) $\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{5}}}{1+\sqrt{\frac{2}{5}}}\right)^2$; (b) $1 - \left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{5}}}{1+\sqrt{\frac{2}{5}}}\right)^2$

Sistema bidimensional, átomo de hidrogênio.

20. Considere uma partícula movendo-se em um espaço bidimensional definido por $V = 0$ para $0 < x < L$, $0 < y < L$ e $V = \infty$ para quaisquer outros valores de x e y . (a) Determine os autoestados da partícula neste poço de potencial. (b) Determine o espectro de energia da partícula. (c) Quais são os conjuntos de números quânticos do estado degenerado de menor energia? **Respostas:** (a) $\psi_{n_1, n_2}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right)$; (b) $E_{n_1, n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2)$; (c) $(n_1, n_2) \equiv \{(1, 2), (2, 1)\}$
21. Para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, determine a probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo $\Delta r = 0.02a_0$ (a) com centro em $r = a_0$; (b) com centro em $r = 2a_0$. **Respostas:** (a) 0,0107; (b) 0,0059
22. Mostre que no estado fundamental do hidrogênio o valor médio da distância elétron-núcleo vale $\langle r \rangle = \frac{3}{2}a_0$.
23. Mostre que no átomo de hidrogênio no estado $n = 2$ e $l = 1$ a distância mais provável entre o elétron e o núcleo é $r = 4a_0$.