

Formalismo no Espaço-Tempo

Intervalo entre 2 eventos: $s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$

Quadrivector evento: $r_\alpha = (x, y, z, \tau = ict)$

módulo (invariante de Lorentz): $r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha = \sum_{\alpha=1}^4 r_\alpha r_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$

Divergente quadridimensional: $\square \cdot := \sum \frac{\partial}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot + \frac{\partial}{ic\partial t}$

Operador d'alembertiano (laplaciano 4D): $\square^2 := \sum \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Transformação de Lorentz (R' se movimentando com $\vec{u} = (u, 0, 0)$ em relação a R):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{pmatrix}, \text{ ou } r'_\alpha = \mathbf{A} r_\alpha$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo u por $-u$ (β por $-\beta$) $\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Quadrivector velocidade: $v_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_0} = \gamma \frac{dr_\alpha}{dt} = \gamma(\vec{v}, ic)$

$$v_\alpha^2 = -c^2$$

Quadrivector momento(-energia): $p_\alpha = mv_\alpha = (\gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z, ic\gamma m) = (\vec{p}, \frac{i}{c} E)$

$$p_\alpha^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

Invariante momento-energia: $I := P^2 c^2 - E^2 = -M^2 c^4$

Quadrivector força, “Força de Minkowskij”: $F_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{mdv_\alpha}{dt_0} = \frac{md^2r_\alpha}{dt_0^2} = \gamma(\vec{F}, \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v})$,

$$\text{onde } \vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \frac{dE}{dt}$$

Leis de Maxwell (formas diferenciais)

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Lei de Gauss para o campo magnético: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Lei de Indução de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Lei de Ampére-Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Equação de continuidade: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Potencial escalar do campo eletromagnético: $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Potencial vetorial do campo eletromagnético: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Equações equivalentes às Leis de Maxwell usando os potenciais escalar e vetorial e

a condição de calibre (gauge) de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$:

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Forma covariante da Eletrodinâmica

Quadrivetor densidade de corrente: $j_\alpha = (\vec{j}, ic\rho) = (\rho\vec{u}, ic\rho)$

Equação de continuidade: $\square \cdot j_\alpha = \frac{\partial j_\alpha}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial ic\rho}{\partial \tau} = 0$

Quadrivetor potencial eletromagnético: $A_\alpha = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$

Condição de Lorentz: $\square \cdot A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\alpha} = 0$

Equações equivalentes às Leis de Maxwell: $\square^2 A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha$

$$\text{Tensor campo eletromagnético: } F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial r_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial r_\nu}, \text{ ou } \overset{\leftrightarrow}{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Leis de Maxwell: $\square \cdot \overset{\leftrightarrow}{F} = \mu_0 j_\mu$

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial r_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial r_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial r_\mu} = 0$$

Transformação de Lorentz do campo eletromagnético:

$$E'_\parallel = E_\parallel, \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{u} \times \vec{B}),$$

$$B'_\parallel = B_\parallel, \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{u} \times \vec{E}),$$

$$\text{ou } \overset{\leftrightarrow}{F}' = \mathbf{A} \overset{\leftrightarrow}{F} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \overset{\leftrightarrow}{F} \mathbf{A}^T$$

$$\text{Invariantes: } I_1 := E^2 - c^2 B^2$$

$$I_2 := (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$$

Campo de uma carga q com velocidade \vec{v} na distância \vec{r} (θ é o ângulo entre \vec{v} e \vec{r}):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\hat{r}}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Relatividade Geral

Constante gravitacional: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Conservação de energia para a luz: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{h\nu} = -\frac{\Delta V_{pot}}{c^2}$

Dilatação gravitacional do tempo: $\frac{t_{\text{em cima}}}{t_{\text{em baixo}}} = 1 + \frac{\Delta V_{pot}}{c^2}$

Raio de Schwarzschild de uma massa M : $R_S = \frac{2GM}{c^2}$