Formalismo no Espaço-Tempo

Evento: $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{r})$
Quadrivetor deslocamento: $\Delta x^\alpha = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = (\Delta t, \Delta \vec{r})$
Produto escalar: $A^\alpha \cdot B^\alpha = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = A_\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}$,
onde $\eta_{\alpha\beta} = diag\{-1, 1, 1, 1\}$ = tensor métrico
magnitude do vetor deslocamento (= intervalo): $(\Delta x^\alpha)^2 = \Delta x^\alpha \cdot \Delta x^\alpha$
$= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$
Divergente quadridimensional: $\Box\cdot := \frac{\partial^\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot$
Gradiente quadridimensional: $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot$
Operador d'alembertiano (laplaciano 4D): $\Box^2 := \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x_\alpha}\right)^2 = (\Box\cdot)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Box\cdot = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$
Transformação de Lorentz ($\bar{R}$ se movimentando com $\vec{u} = (u, 0, 0)$ em relação a R):

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -u\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ ou } x^{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha} x^\alpha$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo u por $-u$
Quadrivetor velocidade: $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} = (\gamma, \gamma\vec{v})$, τ = tempo próprio
$(v^\alpha)^2 = -1$
Quadrivetor momento(-energia): $p^\alpha := m v^\alpha = (\gamma m, \gamma m \vec{v}) = (E, \vec{p})$
Invariante momento-energia: $I := (p^\alpha)^2 = p^2 - E^2 = -m^2$
Quadrivetor aceleração: $a^\alpha := \frac{dv^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \gamma \frac{dv^\alpha}{dt} = (\gamma \vec{a}\vec{v}, \gamma \vec{a})$
Quadrivetor força, "Força de Minkowskij": $F^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = m a^\alpha = \gamma \frac{dp^\alpha}{dt} = (\gamma \vec{v}\vec{F}, \gamma \vec{F})$,
onde $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(\gamma m) = \frac{dE}{dt}$

Potenciais do Eletromagnetismo

Potencial escalar do campo eletromagnético: $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
Potencial vetorial do campo eletromagnético: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equações equivalentes às Leis de Maxwell usando os potenciais escalar e vetorial e a condição de calibre (gauge) de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$:
$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$
$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi\vec{j}$

Forma covariante da Eletrodinâmica

Quadrivetor densidade de corrente: $J^\alpha = (\rho, \vec{j}) = (\rho, \rho\vec{v}) = \frac{\rho}{\gamma} v^\alpha = \rho_0 v^\alpha$

$(J^\alpha)^2 = -\rho_0^2$

Equação de continuidade: $\Box \cdot J^\alpha = 0$

Quadrivetor potencial eletromagnético: $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$

Condição de Lorentz: $\Box \cdot A^\alpha = 0$

Equações equivalentes às Leis de Maxwell: $\Box^2 A^\alpha = -4\pi J^\alpha$

Tensor campo eletromagnético: $F^{\mu\nu} := \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$

Leis de Maxwell: $\Box \cdot F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu$,

$\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0$

Transformação de Lorentz do campo eletromagnético:

$\bar{E}_\parallel = E_\parallel$, $\bar{\vec{E}}_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{u} \times \vec{B})$,

$\bar{B}_\parallel = B_\parallel$, $\bar{\vec{B}}_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{u} \times \vec{E})$,

ou $F^{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \Lambda_\alpha^{\bar{\lambda}} F^{\alpha\beta} \Lambda_\beta^{\bar{\mu}}$, onde $\Lambda_\beta^{\bar{\mu}} = \left(\Lambda_\alpha^{\bar{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}}$

Invariantes: $I_1 := E^2 - B^2$ (em unidades tradicionais: $I_1 := E^2 - c^2 B^2$)

$I_2 := (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$

Campo de uma carga q com velocidade $\vec{v}$ na distância $\vec{r}$ (θ é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{r}$):

$\vec{E} = \frac{q \cdot \hat{r}}{r^2} \frac{1-v^2}{(1-\mathrm{sen}^2\theta \cdot v^2)^{3/2}} = \frac{q \cdot \vec{r}}{r^3} \frac{1-v^2}{(1-\mathrm{sen}^2\theta \cdot v^2)^{3/2}}$

$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E} = \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \frac{1-v^2}{(1-\mathrm{sen}^2\theta \cdot v^2)^{3/2}}$

Relatividade Geral

Mudança de frequência na variação de altura: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{gh}{c^2}$

Entre a superfície de uma massa esférica e um ponto “longe”: $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_o c^2}}$

Dilatação gravitacional do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_o c^2}}$

Para um campo fraco: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} \simeq 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$

Ângulo de defleção de luz por uma massa: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R}$

Raio de Schwarzschild: $R_S = \frac{2GM}{c^2}$

Momento angular máximo de um buraco negro: $L_{\max} = \frac{GM^2}{c}$

Radiação de Hawking: $\frac{dM}{dt} \propto M^{-2}$

$t_{\mathrm{evap}} = 2560\pi^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{h}\right) \approx 2 \cdot 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$ anos

Lentes gravitacionais, raio de Einstein: $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{L}}}}$

Cosmologia

redshift: $\lambda = (1+z)\lambda_0$
para $z \ll 1$: $v = cz$
Lei de Hubble: $v = H_0 d$, $H_0 \simeq 71\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\cdot Mpc}}$, para $z \leq 0.13$
  até $z \sim 2$: $d \simeq \frac{c}{H_0}\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}$
tempo hoje: t_0; Lookback time: $t_L(z) = t_0 - t(z)$
Dilatação cosmológica do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = 1+z$
Fator de escala: $R = (1+z)^{-1}$, hoje: $R(t_0) = 1$
Distância entre dois pontos: $r(t) = \varpi \cdot R(t)$, ϖ é a coordenada comovente
Distância própria entre um objeto e a Terra: $d_\mathrm{p}(t) = R(t)\cdot d_{\mathrm{p},0} = \frac{d_{\mathrm{p},0}}{1+z}$,
  hoje: $d_{\mathrm{p},0} = d_\mathrm{p}(t_0)$ distância comovente
Distância de luminosidade: $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = (1+z)\cdot d_{\mathrm{p},0}$
Distância de diâmetro angular: $d_A \equiv \frac{D}{\theta} = \frac{d_{\mathrm{p},0}}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$
Parâmetro de Hubble: $H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$, hoje H_0
Lei de Hubble dependente do tempo: $v(t) = H(t)\cdot r(t) = H(t)R(t)\cdot d_{\mathrm{p},0}$,
Curvatura do Universo: $K(t) \equiv \frac{k}{R^2(t)}$, hoje $K(t_0) = k$:
  $k = 0$: plano; $k > 0$: fechado, $k < 0$: aberto
ρ_m = densidade de matéria,
$\rho_\mathrm{rel} = u_\mathrm{rel}/c^2$ = densidade de componentes relativísticos,
$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ = densidade de energia escura.
$\rho_\mathrm{c} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ densidade crítica, hoje $\rho_{\mathrm{c},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$
Parâmetro de densidade (componente X): $\Omega_X(t) = \rho_X(t)/\rho_\mathrm{c}(t)$,
  hoje $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{\mathrm{c},0}$
Parâmetro de densidade total: $\Omega(t) \equiv \Omega_\mathrm{m}(t) + \Omega_\mathrm{rel}(t) + \Omega_\Lambda(t)$,
  hoje $\Omega_0 = \Omega_{\mathrm{m},0} + \Omega_{\mathrm{rel},0} + \Omega_{\Lambda,0}$
Parâmetro de desaceleração: $q(t) \equiv -\frac{R(t)[d^2R(t)/dt^2]}{[dR(t)/dt]^2} = 0.5\cdot\Omega_\mathrm{m}(t) + \Omega_\mathrm{rel}(t) - \Omega_\Lambda(t)$
  hoje $q_0 = 0.5\cdot\Omega_{\mathrm{m},0} + \Omega_{\mathrm{rel},0} - \Omega_{\Lambda,0}$
Evolução com z:
  $\rho_\mathrm{m}(z) = (1+z)^3\rho_{\mathrm{m},0} = R^{-3}\rho_{\mathrm{m},0}$,
  $\rho_\mathrm{rel}(z) = (1+z)^4\rho_{\mathrm{rel},0} = R^{-4}\rho_{\mathrm{rel},0}$
  $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G = const.$
  temperatura: $T = R^{-1}T_0 = (1+z)\cdot T_0$
Universo plano ($k=0$) só de matéria ($\rho_\mathrm{m}(t) = \rho_\mathrm{c}(t)$, $\rho_\mathrm{rel}(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):
  $R_\mathrm{plano} = (6\pi G\rho_{\mathrm{c},0})^{1/3}t^{2/3} = (3/2)^{2/3}(t/t_\mathrm{H})^{2/3}$,
  $\rho_\mathrm{m}(t) \propto t^{-2}$
  idade do Universo: $t_{plano,0} = 2/3\cdot t_\mathrm{H}$
Universo só de componentes relativísticos ($\rho_\mathrm{m}(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):
  $R(t) \propto t^{1/2}$,
  $\rho_\mathrm{rel}(t) \propto t^{-2}$,
  $T(t) \propto t^{-1/2}$
Universo de energia escura ($\rho_\mathrm{m}(t) = \rho_\mathrm{rel}(t) = 0$):
  $R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{4\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} e^{H_0 t\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$