Exercício 1. (2.5 pontos) Mostre que um espaço normado U é Banach se, e somente se, toda sequência $(x_n) \subset U$ que satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica em $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente.

Solução: Suponha que U seja um espaço de Banach e que $(x_n) \subset U$ satisfaça $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon$$

sempre que $N \geq N_0$.

Considere agora a soma parcial $y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Para $M \geq N \geq N_0$, temos

$$\|y_M - y_N\| = \left\| \sum_{n=N}^{M} x_n \right\| \leq \sum_{n=N}^{M} \|x_n\| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon,$$

de forma que (y_N) é sequência de Cauchy. Como U é Banach, segue que (y_N) possui limite.

Por outro lado, tome uma sequência de Cauchy $(x_n) \subset U$. Escolha uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k},$$

de forma que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Por hipótese, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x \in U.$$

Agora, observe que

$$\sum_{k=1}^{N} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_{n_1},$$

de forma que $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy que possui subsequência convergente. Portanto, ela é convergente e U é Banach. □

Exercício 2*. (3.5 pontos) Sejam U um espaço de Banach e $M \subset U$ um subespaço fechado. Mostre que:

(a) U/M é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, M) := \inf\{\|x - y\|; y \in M\}.$$

Solução: A ideia é utilizar o Exercício 1. Para isso, escreva $\tilde{x} = [x]$ e considere uma sequência $(\tilde{x}_n) \subset U/M$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{x}_n\|$ converge. Basta mostrar então que $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n$ converge para $\tilde{x} \in U/M$.

Da definição da norma no espaço quociente, dado $\epsilon > 0$ existe $x_n \in \tilde{x}_n$ tal que

$$\|x_n\| \leq \|\tilde{x}_n\| + \epsilon,$$

de forma que tomando $\epsilon = \|\tilde{x}_n\|$, temos $\|x_n\| \leq 2\|\tilde{x}_n\|$ para algum $x_n \in \tilde{x}_n$.

Essa última igualdade garante que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente e, da completude de X, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para $x \in X$.

Portanto, do item (b) concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + M) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + M = x + M = \tilde{x}.$$

□

(b) Dado $x \in U$, mostre que $[x] = x + M = \{x + m; m \in M\}$.

Solução: Dado $x \in U$, temos

$$y \in [x] \Leftrightarrow x - y \in M \Leftrightarrow -z = x - y \in M \Leftrightarrow y = x + z \in x + M.$$

□

(c) Se $\pi : U \to U/M$ é dada por $\pi(x) = [x]$, então $\pi \in \mathcal{L}(U, U/M)$, $\ker \pi = M$ e π é uma aplicação aberta.

Solução: A projeção π é claramente linear por conta da definição das operações no espaço quociente. Além disso, para $x \neq 0$ temos

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - y\|; y \in M\} \leq \|x\|$$

e π é limitada com $\|\pi\| \leq 1$, de forma que $\pi \in \mathcal{L}(U, U/M)$.

Para encontrar o kernel de π, observe que

$$x \in \ker \pi \Leftrightarrow \|\pi(x)\| = 0 \Leftrightarrow \inf\{\|x - y\|; y \in M\} = 0 \Leftrightarrow x \in M,$$

em que na última passagem utilizamos que M é fechado.

Finalmente, dado $[x] \in U/M$, temos que $\pi(x) = [x]$ e π é sobrejetora. Como U é Banach, do item (a) temos que U/M é Banach e pelo Teorema da Aplicação Aberta concluímos que π é aberta. □

(d) Se $M \neq U$, então $\|\pi\| = 1$. O que acontece se $M = U$?

Solução: Se $M = U$, temos que $x \sim 0$ para todo $x \in U$. Logo, $\|\pi(x)\| = 0$ e $\|\pi\| = 0$.

Se $M \neq U$, tome $x \in U \setminus M$ de forma que $\|\pi(x)\| > 0$. Para $f \in M$, temos

$$\|[x]\| = \|\pi(x)\| = \|\pi(x + f)\| \leq \|\pi\|\|x + f\| \leq \|\pi\|\|[x]\|.$$

Portanto, $\|\pi\| \geq 1$ e do item (c) concluímos que $\|\pi\| = 1$. □

(e) A imagem da bola unitária aberta de U por π é a bola unitária aberta de U/M.

Solução: Sejam $B_U(0,1)$ e $B_{U/M}(0,1)$ as respectivas bolas unitárias em U e U/M.

Por um lado, dado $x \in U$ com $\|x\| < 1$, temos

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - y\|; y \in M\} \leq \|x\| < 1,$$

ou seja, $B_U(0,1) \subset B_{U/M}(0,1)$.

Por outro lado, dado $[x] \in B_{U/M}(0,1)$, pelo item (b) podemos escrever $[x] = x + M$. Se $\|x + M\| < 1$, então existe $\epsilon \in (0,1]$ tal que $\|x + M\| = 1 - \epsilon$.

Desta forma, existe $z \in M$ tal que

$$\|x + z\| \leq \|x + M\| + \frac{\epsilon}{2} < 1.$$

Como $\pi(x) = \pi(x - z)$, concluímos que $B_{U/M}(0,1) \subset B_U(0,1)$. □

(f) Para todo espaço normado V e todo operador linear contínuo $T : U \to V$, existe um único operador linear contínuo $\tilde{T} : U/\ker(T) \to V$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Mais ainda, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Solução: Defina $\tilde{T} : U/\ker(T)$ por $\tilde{T}([x]) = T(x)$. Temos então $\tilde{T} \circ \pi(x) = \tilde{T}([x]) = T(x)$ de forma que $T = \tilde{T} \circ \pi$.

Mostremos que $\tilde{T}$ está bem definida. Dados $x_1, x_2 \in [x]$, então temos que $x_1 - x_2 \in \ker(T)$, de forma que $T(x_1) = T(x_2)$ e, portanto,

$$\tilde{T}([x_1]) = \tilde{T}([x_2]).$$

Pelo item (e), temos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}\| &= \sup\{\|\tilde{T}([x])\|; x \in B_{U/\ker T}(0,1)\} \\
&= \sup\{\|\tilde{T}([x])\|; x \in \pi(B_U(0,1))\} \\
&= \sup\{\|\tilde{T}(\pi(x))\|; x \in B_{U/\ker T}(0,1)\} \\
&= \sup\{\|T(x)\|; x \in B_{U/\ker T}(0,1)\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

□

Exercício 3. (2.0 pontos) Seja $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\varphi((a_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},$$

com $c_0 = \{(a_k) \in \ell^\infty; a_k \in \mathbb{C} \,\mathrm{e}\, a_k \to 0\}$ munido da norma de ℓ^∞. Prove que:

(a) O funcional φ está bem definido.

Solução: Mostrar que φ está bem definido significa mostrar que a série é convergente. Para isso utilizaremos a completude de $\mathbb{C}$ e o Exercício 1, de forma que, dado $a = (a_j) \in c_0$, temos

$$\sum_{j-1}^{\infty} \frac{|a_j|}{2^j} \leq \|a\|_\infty \sum_{j-1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|a\|_\infty < \infty.$$

Como a série é absolutamente convergente, ela é convergente e φ está bem definida. □

(b) $\varphi \in (c_0)^*$.

Solução: A linearidade de φ é imediata das propriedades de soma de sequências em ℓ^∞ e multiplicação por escalares. Para mostrar que o funcional é limitado, utilizamos os cálculos do item anterior para mostrar que

$$|\varphi(a)| = \left|\sum_{j-1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}\right| \leq \sum_{j-1}^{\infty} \frac{|a_j|}{2^j} \leq \|a\|_\infty,$$

de forma que $\|\varphi\| \leq 1$ e φ é um funcional limitado. □

(c) $\|\varphi\| = 1$.

Solução: Dado $\epsilon > 0$, tome N suficientemente grande tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} > 1 - \epsilon.$$

Para $a = (a_n) = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, temos que

$$\varphi(a) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} > 1 - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Como ϵ é arbitrário, isso mostra que a norma de φ não pode ser menor do que 1. Pelo item (b) concluímos que $\|\varphi\| = 1$. □

(d) Não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Solução: Se $\|x\|_\infty \leq 1$, então $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $|x_n| < 1$ para n suficientemente grande, pois $x_n \to 0$.

Então temos que

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{j-1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j}\right| \leq \sum_{j-1}^{\infty} \frac{|x_j|}{2^j} < \sum_{j-1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1,$$

ou seja, $|\varphi(x)| < \|\varphi\|$ para $\|x\|_\infty \leq 1$. □

Exercício 4*. (2.5 pontos) Enuncie e demonstre o Teorema do Gráfico Fechado.

Solução: Veja as referências bibliográficas. De maneira geral, a ida não necessita de resultados preliminares, enquanto para a volta utilizamos o Teorema da Aplicação Aberta. □

Exercício 6. (1.5 pontos) Prove ou dê um contra-exemplo: se X é um espaço métrico limitado, então uma contração $T : X \to X$ não pode ser sobrejetora.

Solução: A fim de mostrar que T não é sobrejetora, basta mostrar que $T(X) \neq X$.

Por um lado, da limitação de X temos que o número

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}$$

é finito. Por outro lado, como $T(X) \subset X$, então $\operatorname{diam}(T(X)) \leq \operatorname{diam}(X)$.

Mas T é contração, de forma que existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$, para todo $x, y \in Y$, ou seja,

$$\operatorname{diam}(T(X)) \leq \lambda \operatorname{diam}(X) < \operatorname{diam}(X).$$

Com isso temos que $T(x) \neq X$ e T não pode ser sobrejetora, pois caso contrário teríamos $T(X) \subset X$ e $X \subset T(X)$, de forma que, respectivamente, $\operatorname{diam}(T(X)) \leq \operatorname{diam}(X)$ e $\operatorname{diam}(T(X)) \geq \operatorname{diam}(X)$, ou seja, $\operatorname{diam}(T(X)) = \operatorname{diam}(X)$, o que é um absurdo. □