1 Objetivos da atividade

O objetivo desta atividade é provar que todo espaço vetorial normado pode ser completado de forma única a menos de isometria. A motivação para este resultado é encontrar uma forma de completar o espaço de funções contínuas quando munido da métrica da integral.

Primeiramente, lembremos alguns conceitos topológicos e geométricos.

Sejam (X,d) um espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Um **ponto de acumulação** de Y é um elemento $y \in X$ tal que existe uma sequência $(y_n) \subset Y$ que converge para y. O conjunto dos pontos de acumulação de Y é chamado de fecho de Y e escrevemos $\bar{Y}$. Observe que $Y \subset \bar{Y}$.

Um conjunto $Y \subset X$ é dito ser **denso** em X se $\bar{Y} = X$. Observe que pela definição de fecho, para todo elemento $x \in X$, existe uma sequência $(y_n) \subset Y$ tal que $y_n \to x$.

Definição 1. *Sejam (X,d) e $(Y,\tilde{d})$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma bijeção. Se f e f' são funções contínuas, então f é dita ser um homeomorfismo. Se $d(x,y) = \tilde{d}(f(x),f(y))$, para todo $x,y \in X$, então f é dita ser uma isometria e X e Y são isométricos.*

Definição 2. *Seja (X,d) um espaço métrico arbitrário. O espaço métrico $(\tilde{X},\tilde{d})$ é dito ser um completamento de (X,d) se*

(a) (X,d) é isométrico a um subespaço $(\hat{X},\tilde{d}) \subset (\tilde{X},\tilde{d})$;

(b) $\hat{X}$ é denso em $\tilde{X}$, ou seja, o fecho que $\hat{X}$ coincide com $\tilde{X}$.

A atividade consiste de duas partes:

1. Mostrar que todo espaço métrico pode ser completado;
2. Estender o resultado para espaços vetoriais normados.

Desta forma, mostraremos dois resultados:

Teorema 1. *Dado um espaço métrico (X,d), existe um espaço métrico completo $(\tilde{X},\tilde{d})$ que possui um subespaço W isométrico a X e denso em $\tilde{X}$. O espaço é único a menos de isometria.*

Teorema 2. *Seja $(X,\|\cdot\|)$ um espaço normado. Existe um espaço de Banach $(\tilde{X},\tilde{d})$ que possui um subespaço W isométrico a X e denso em $\tilde{X}$. O espaço é único a menos de isometria.*

Nas próximas seções discutiremos os passos para provar os Teoremas 1 e 2.

2 Passos para demonstração do Teorema 1

Passo 1. Diremos que duas sequências de Cauchy (x_n) e (x'_n) em X são equivalentes, e escreveremos $(x_n) \sim (x'_n)$, se
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0.$$
Prove que $\sim$ define uma relação de equivalência.

Passo 2. Defina $\tilde{X} = X/\sim$ como o conjunto das classes de equivalência geradas por $\sim$ e $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

com $(x_n) \in \tilde{x}$ e $(y_n) \in \tilde{y}$.

1. Mostre que o limite existe de forma que $\tilde{d}$ esteja bem definida.
2. Mostre que $\tilde{d}$ não depende da escolha do representante.
3. Mostre que $\tilde{d}$ define uma métrica em $\tilde{X}$.

Agora construiremos o subespaço $W \subset \tilde{X}$ e a isometria desejada.

Passo 3. Para cada $b \in \tilde{X}$, seja $\tilde{b} \in \tilde{X}$ o elemento que contém a sequência contínua. Defina $T : X \to \tilde{X}$ como

$$T(x) = \tilde{x}$$

e $W = T(X)$.

1. Mostre que T é uma isometria.
2. Mostre que W é denso em $\tilde{X}$.

Passo 4. Tome uma sequência de Cauchy $(\tilde{x}_n) \subset \tilde{X}$.

1. Justifique a razão de existir uma sequência $(\tilde{z_n}) \subset W$ tal que

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{z}_n) < \frac{1}{n}.$$

2. Mostre que $(\tilde{z}_n)$ também é sequência de Cauchy.
3. Mostre que $(z_n) = (T^{-1}(\tilde{z}_n))$ é sequência de Cauchy.

Passo 5. Seja $\tilde{z} \in \tilde{X}$ a classe de equivalência à qual (z_n) pertence.

1. Utilize a desigualdade triangular para mostra que

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{z}) < \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} d(z_n, z_m).$$

2. Utilize o item anterior para concluir que $\tilde{x}_n \to \tilde{z}$.
3. Conclua que $\tilde{X}$ é completo.

Passo 6. Resta mostrar a unicidade do espaço. Tome outro espaço métrico completo $(\hat{X}, \hat{d})$ tal que existe uma isometria $\hat{T} : X \to \hat{W}$, com $\hat{W}$ denso em $\hat{X}$.

1. Mostre que $T^{-1} : W \to X$ é uma isometria.
2. Mostre que $\hat{T} \circ T : W \to \hat{W}$ é uma isometria.
3. Conclua que $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ são isométricos.

3 Passos para demonstração do Teorema 2

Passo 7. Justifique a razão da existência de um único espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$, a menos de isometria, que possui um subespaço W isométrico a X e denso em $\tilde{X}$.

Passo 8. Precisamos transformar $\tilde{X}$ em espaço vetorial. Para isso, defina uma soma e uma multiplicação por escalar da maneira mais natural possível.

1. Mostre que se $(x_n) \in \tilde{x}$ e $(y_n) \in \tilde{y}$ são sequências de Cauchy em X, então $z_n = x_n + y_n$ também define uma sequência de Cauchy em X.
2. Baseado no item 1, defina uma soma em $\tilde{X}$ e mostre que ela não depende da escolha do representante.
3. Mostre que se $(x_n) \in \tilde{x}$ é sequência de Cauchy, então $w_n = \alpha x_n$ define uma sequência de Cauchy para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
4. Baseado no item 3, defina uma multiplicação por escalar e mostre que ela não depende da escolha do representante.
5. Exiba o elemento neutro da soma definida acima.

Passo 9. Utilize a norma de X e a isometria $T : X \to W$ para induzir uma norma $\|\cdot\|_W$ em W.

Passo 10. A norma $\|\cdot\|_W$ em W induz uma métrica $\tilde{d}$ em W. Utilize a métrica induzida para mostrar que

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \tilde{d}(\tilde{0}, \tilde{x})$$

define uma norma em $\tilde{X}$.

4 Orientações

O objetivo da atividade é demonstrar os Teoremas 1 e 2. Os passos apresentados nas sessões anteriores servem para dar diretrizes de como a demonstração se dá.

Portanto, para a entrega da atividade, apenas apresentem as demonstrações completas dos Teoremas, não separem em passos.

Parte do processo é conseguir esquematizar e escrever uma demonstração completa sem que ela precise ser dividida em “Exercícios”.

O prazo para entrega da atividade é 18/03 (data da P1).

Qualquer problema ou dúvida a respeito de como prosseguir, não hesitem em me procurar.