Exercício 1. Se (X, d) é qualquer espaço métrico, mostre que

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

define uma nova métrica para X.

Exercício 2. Seja X um conjunto não-vazio e defina $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Mostre que d é uma métrica. O espaço métrico (X, d) é chamado de espaço discreto.

Exercício 3. O produto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dois espaços métricos (X_1, d_1) e (X_2, d_2) pode ser transformado em um espaço métrico de várias maneiras. Por exemplo, mostre que uma métrica em X é definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_1(x_2, y_2),$$

na qual $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Exercício 4. Um subespaço Y de um espaço métrico (X, d) é dito ser aberto se para cada $x_0 \in Y$ é possível construir uma bola

$$B(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$$

de tal forma que $B(x_0, r) \subset Y$.

- Mostre que um conjunto $K \subset Y$ é fechado se, e somente se, $X \setminus K$ é aberto.
- Mostre que os conjuntos vazio e X são abertos e fechados em X.
- Mostre que num espaço métrico discreto, todo subconjunto é aberto e fechado.

Exercício 5. Mostre que toda seqüência de Cauchy em um espaço métrico (X, d) é limitada.

Exercício 6. Sejam X o conjunto das n-uplas ordenadas $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de números reais e

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|,$$

com $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Mostre que (X, d) é completo.

Exercício 7. Mostre que o subespaço $Y \subset C([a, b]; \mathbb{R})$ consistindo de todas as funções $x \in C([a, b]; \mathbb{R})$ tais que $x(a) = x(b)$ é completo quando munido da métrica do máximo.