**Exercício 1.** Mostre que se $T : X \to X$ é uma contração em $X$, então $T^n$ é uma contração para todo $n \in \mathbb{N}$. A recíproca é válida?

**Exercício 2. (Método de Newton)** Sejam $f$ uma função real de classe $C^2$ em um intervalo $[a, b]$ e $\hat{x}$ um zero simples de $f$ em $(a, b)$. Mostre que

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

é uma contração em algum intervalo de $\hat{x}$ (de forma que a iteração seja convergente a $\hat{x}$ para qualquer $x_0$ suficientemente próximo de $\hat{x}$).

**Exercício 3.** Seja $T : X \to X$ uma aplicação definida num espaço métrico completo $X$ e suponha que $T^m$ seja uma contração em $X$ para algum inteiro positivo $m$. Mostre que $T$ tem único ponto fixo.

**Exercício 4.** No Teorema de Picard, suponha que a função $f : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja contínua e Lipschitz na segunda variável, para algum $\epsilon > 0$. Mostre que o problema de valor inicial possui uma única solução $x : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \to \mathbb{R}^m$. Qual a diferença deste para o Teorema de Picard provado em aula?

Conclua que se $f : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é contínua e Lipschitz na segunda variável para todo $\epsilon > 0$, então a única solução é global.