Exercício 1. Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

Exercício 2. Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados.

(a) Prove que as expressões

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \|x_1\| + \dots \|x_n\|,$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|^2 + \dots \|x_n\|^2)^{1/2},$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\| + \|x_n\|\},$$

definem normas equivalentes em $E_1 \times \dots \times E_n$.

(b) Prove que $E_1 \times \dots \times E_n$ munido de qualquer uma das normas acima é espaço de Banach se, e somente se, cada E_i é espaço de Banach.

Exercício 3. Mostre que uma métrica d induzida por uma norma num espaço normado deve satisfazer

(a) $d(x + a, y + a) = d(x, y)$,

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$,

para todo $x, y, a \in X$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercício 4. Mostre que duas normas equivalentes num espaço vetorial normado X definem as mesmas sequências de Cauchy

Exercício 5. Se duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes num espaço vetorial normado X, mostre que $(x_n) \subset X$ converge na norma $\|\cdot\|_1$ se, e somente se, ela converge na norma $\|\cdot\|_2$.

Exercício 6. Mostre que $\|\cdot\| : C([0,1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x) dx$$

define uma norma em $C([0,1]; \mathbb{R})$, mas esta norma não é equivalente a

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Exercício 7. Sejam X e Y espaços métricos, X compacto e $T : X \to Y$ bijetora e contínua. Mostre que T^{-1} é contínua e, portanto, T é um homeomorfismo.

Exercício 8. Prove o Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{C}$, ou seja, mostre que toda sequência limitada $(z_n) \subset \mathbb{C}$ possui uma subsequência convergente.

Exercício 9. Seja V um espaço vetorial normado. Mostre que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Exercício 10*. Dado $1 \leq p < \infty$, considere o espaço vetorial ℓ^p das sequências $(x_n) \subset \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Sem utilizar a relação $\ell^p = L^p(\mathbb{N})$, mostre que $\| \cdot \|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ define uma norma. Mostre que $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ é um espaço de Banach.

*** Segue a mesma linha da demonstração feita para os espaços $L^p(X)$, apenas trocando integrais por sequências.**