Exercício 1. Mostre que para todo espaço normado de dimensão infinita U e todo espaço normado $V \neq \{0\}$, existe um operador linear descontínuo $T : U \to V$.

Exercício 2. Seja U um espaço normado sobre $\mathbb{C}$. Se φ é um funcional linear descontínuo em U, mostre que $\{\varphi(x); x \in U \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}$.

Exercício 3. (a) Prove que se um espaço normado U é isomorfo a um espaço de Banach, então E é espaço de Banach.

(b) Mostre que existem espaços métricos homeomorfos M e N, com M completo e N não-completo.

(b) Como você explica a discrepância entre os itens (a) e (b)?

Exercício 4. Seja $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\varphi((a_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},$$

com $c_0 = \{(a_k); a_k \in \mathbb{C} \text{ e } a_k \to 0\} \subset \ell^\infty$. Prove que:

(a) O funcional φ está bem definido.

(b) $\varphi \in (c_0)^*$.

(c) $\|\varphi\| = 1$.

(d) Não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Exercício 5. Sejam U e V espaços normados e $T : U \to V$ um operador linear contínuo.

(a) Prove que o núcleo de T é um subespaço fechado de U.

(b) Prove que a imagem de T é um subespaço de V. A imagem de T é fechada em V?

Exercício 6. (a) Sejam U e V espaços normados e $T : U \to V$ linear e contínuo. Mostre que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = \inf\{C; \|T(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in U\}.$$

(b) Prove que $T \mapsto \|T\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(U, V)$.