Exercício 1. (Espaço quociente) Sejam M um subespaço fechado do espaço normado U. Prove que:

(a) Dados $x, y \in U$, $x \sim y$ se, e somente se $x - y \in M$ define uma relação de equivalência.

(b) As operações $[x] + [y] = [x + y]$ estão bem definidas e tornam $U/M = \{[x]; x \in U\}$ um espaço vetorial, com $[x] = \{y \in U; x \sim y\}$.

(c) A expressão

$$\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, M) := \inf\{\|x - y\|; y \in M\}$$

define uma norma em U/M.

(d) Se U é espaço de Banach, então U/M é espaço de Banach

(e) Se $\pi : U \to U/M$ é dada por $\pi(x) = [x]$, então $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in U$.

(f) Dados $x \in U$ e $\epsilon > 0$, existe $y \in U$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$ e $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \epsilon$.

(g) A imagem da bola unitária aberta de U por π é a bola unitária aberta de U/M.

(h) $\pi \in \mathcal{L}(U, U/M)$, $\ker \pi = M$ e π é uma aplicação aberta.

(i) Se $M \neq U$, então $\|\pi\| = 1$.

(j) Para todo espaço normado V e todo operador linear contínuo $T : U \to V$, existe um único operador linear contínuo $\tilde{T} : U/\ker(T) \to V$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Mais ainda, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Exercício 2. (Teorema do Isomorfismo) Sejam U e V espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. prove que se $T(U)$ é fechado em V então $T(U)$ é isomorfo a $U/\ker(T)$.

Exercício 3. Sejam U, V espaços de Banach e $T, T_1, T_2, \ldots,$ operadores em $\mathcal{L}(U, V)$ tais que $T_n(x) \to T(x)$ para todo $x \in U$. Mostre que para todo compacto $K \subset U$,

$$\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \to 0.$$

Exercício 4. Sejam U um espaço de Banach real e $T : U \to U^*$ um operador linear tal que $T(x)(x) \geq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que T é contínuo.

Exercício 5. Sejam U um espaço de Banach, V um espaço normado e $T : U \to V$ um operador linear de gráfico fechado. Mostre que se o operador inverso T^{-1} existe e é contínuo, então a imagem de T é um subespaço fechado de V.