Exercício 1. Sejam U um espaço normado e $0 \neq x_0 \in U$. Então existe um funcional linear $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Exercício 2. Se $(U, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, se U^* denota o dual topológico de U temos

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in U^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \quad \forall x \in U^*.$$

Além disso, se $x_0 \in U$ é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in U^*$, então $x_0 = 0$.

Exercício 3. Sejam V um subespaço do espaço normado U e $T \in \mathcal{L}(V, \ell^\infty)$. Mostre que existe uma extensão $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U, \ell^\infty)$ de T tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 4. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ vetores linearmente independentes do espaço normado U e $a_1, \ldots, a_n$ escalares dados. Mostre que existe um funcional $\tilde{f} \in U^*$ tal que $\tilde{f}(x_j) = a_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Exercício 5. Mostre que, em geral, a extensão de Hahn-Banach não é única.

Exercício 6. Na generalização do Teorema de Hahn-Banach, se U é um espaço normado e existe $C > 0$ tal que $p(x) \leq C\|x\|$ para todo $x \in U$, prove que $\|\tilde{f}\| \leq C$.