Exercício 1. Mostre que os axiomas de produto interno (a)-(d) implicam em:

(a') $\langle \alpha x + \beta y \, , \, z \rangle = \alpha \langle x \, , \, z \rangle + \beta \langle y \, , \, z \rangle$;

(b') $\langle x \, , \, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x \, , \, y \rangle$;

(c') $\langle x \, , \, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x \, , \, y \rangle + \bar{\beta} \langle x \, , \, z \rangle$,

(d') $\langle 0 \, , \, x \rangle = \langle x \, , \, 0 \rangle = 0$,

para todo $x, y \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Exercício 2. Seja U um espaço vetorial com produto interno. Mostre que, para quaisquer $x, y \in U$, a norma induzida pelo produto interno deve satisfazer:

(a) (Regra do Paralelogramo)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(b) (Caso real da Fórmula de Polarização)

$$\langle x \, , \, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

(c) (Caso complexo da Fórmula de Polarização)

$$\langle x \, , \, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)].$$

Exercício 3. Dados dois espaços U e V com produto interno, mostre que o operador linear bijetor $T : U \to V$ é uma isometria se, e somente se

$$\langle T(x) \, , \, T(y) \rangle = \langle x \, , \, y \rangle,$$

para todo $x, y \in U$.

Exercício 4. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então $L^p(X)$ não pode ser munido de um produto interno se $p \neq 2$.

Exercício 5. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão finita é um espaço de Hilbert.

Exercício 6. Verifique que:

(a) No caso real, o conjunto formado pelas funções

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \quad n \in \mathbb{N},$$

é um conjunto ortonormal em $L^2([0, 2\pi])$.

(b) No caso complexo, o conjunto formado pelas funções $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, é um conjunto ortonormal em $L^2([0, 2\pi])$.

Exercício 7. (a) Sejam U um espaço vetorial real com produto interno. Prove que o operador

$$T : U \to U^*, \quad T(x)(y) = \langle x\, ,\, y \rangle$$

está bem definido, é linear, contínuo e isometria.

(b) O mesmo vale no caso complexo? E se definirmos $T(x)(y) = \langle y\, ,\, x \rangle$?

Exercício 8. (a) Sejam U um espaço vetorial complexo com produto interno e $T : U \to U$ um operador linear. Prove que se $\langle T(x)\, ,\, x \rangle = 0$ para todo $x \in U$, então $T = 0$.

(b) Vale o mesmo no caso real?

Exercício 9. Sejam (x_n) e (y_n) sequências na bola unitária fechada de um espaço de Hilbert. Prove que se $\langle x_n\, ,\, y_n \rangle \to 1$, então $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Exercício 10. (Teorema de Hellinger-Toeplitz) Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear tal que $\langle T(x)\, ,\, y \rangle = \langle x\, ,\, T(y) \rangle$ para todo $x, y \in H$. Prove que T é contínuo.

Exercício 11. Prove que se M é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, então $M = (M^\perp)^\perp$.