Exercício 1. Considere o caso $f \neq 0$ na demonstração do Teorema da Representação de Riesz. A unicidade do vetor z pode parecer contraditória com a arbitrariedade da escolha de z_0. Prove que $M^\perp$ tem dimensão 1 e argumente a razão de tal fato ser condizente com a unicidade.

Exercício 2. Sejam H um espaço de Hilbert, $S \subset H$ um subespaço e $f \in S^*$. Mostre que T possui uma extensão linear limitada $\tilde{f} \in \bar{S}^*$ tal que $\|f\| = \|\tilde{f}\|$.

Exercício 3. (Teorema de Hahn-Banach para espaços de Hilbert) Sejam H um espaço de Hilbert, $S \subset H$ um subespaço e $f \in S^*$. Prove, sem utilizar o Teorema de Hahn-Banach, que existe um único funcional $\tilde{f} \in H^*$ que estende f e preserva a norma.

Exercício 4. Dado um espaço de Hilbert H, mostre que se $f, g \in H^*$ possuem o mesmo núcleo, então existe $a \neq 0$ de forma que $f = ag$.

Exercício 5. Se z é um elemento qualquer fixado em um espaço U com produto interno, mostre que $f(x) = \langle x\,,\, z\rangle$ define um funcional linear limitado em U^* de norma $\|z\|$.

Exercício 6. Mostre que o espaço dual H^* de um espaço de Hilbert H é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle f_z\,,\, f_v\rangle = \overline{\langle z\,,\, v\rangle} = \langle v\,,\, z\rangle,$$

com $f_z(x) = \langle x\,,\, z\rangle$.