Exercício 1. Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert, $S : H_1 \to H_2$, $T : H_1 \to H_2$ operadores lineares limitados e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

(a) $\langle T^*(y)\,,\, x\rangle = \langle y\,,\, T(x)\rangle$, para todo $y \in H_2$ e $x \in H_1$.

(b) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

(c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

(d) $(T^*)^* = T$.

(e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

(f) $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

(g) $(ST)^* = T^*S^*$, se $H_1 = H_2$.

Exercício 2. Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear limitado e bijetivo cujo operador inverso é limitado. Mostre que $(T^*)^{-1}$ existe e

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Exercício 3. Se (T_n) é uma sequência de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert e $T_n \to T$, mostre que $T_n^* \to T^*$.

Exercício 4. Seja $S = Id + T^*T : H \to H$, no qual $T : H \to H$ é um operador linear e limitado. Mostre que $S^{-1} : S(H) \to H$ existe.

Exercício 5. Sejam $S, T : H \to H$ operadores unitário definidos num espaço de Hilbert H. Mostre que

(a) T é isométrico, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

(b) $\|T\| = 1$ se $H \neq \{0\}$.

(c) $T^{-1} = T^*$ é unitário.

(d) ST é unitário.

(e) T é normal.

Exercício 6. Dê um exemplo de operador normal que não é auto-adjunto ou unitário.

Exercício 7. Mostre que se $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto, então T^n também é auto-adjunto, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 8. Se T e S se dois operadores lineares, limitados e auto-adjuntos definidos num espaço de Hilbert H e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostre que $\alpha S + \beta T$ é auto-adjunto.

Exercício 9. Mostre que, para qualquer operador linear limitado $T : H \to H$, os operadores

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

são auto-adjuntos. Mostre que

$$T = T_1 + iT_2, \quad T^* = T_1 - iT_2$$

são escritos de maneira única.

Exercício 10. No Exercício 9, mostre que T é normal se, e somente se, T_1 e T_2 comutam.

Exercício 11. Se $T_n : H \to H$ são operadores lineares normais e $T_n \to T$, mostre que T é normal.

Exercício 12. Se S e T são operadores lineares normais satisfazendo $ST^* = T^*S$ e $TS^* = S^*T$, mostre que $S + T$ e ST são normais.