Aqui abordaremos conceitos básicos de medida que nos levaram a definir os espaços L^p e provar o teorema de completude. As definições aqui apresentadas foram retiradas de **[G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, 1ª Edição, Textos Universitários, SBM, 2012]** e podem ser encontradas no Apêndice C de tal livro.

Definição 1. *Uma σ-álgebra no conjunto X é uma família de subconjuntos Σ de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\emptyset, X \in \Sigma$.

(b) Se $A \in \Sigma$, então $X \setminus A \in \Sigma$.

(c) Se $A_n \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Neste caso, (X, Σ) é chamado de espaço mensurável. Cada elemento da σ-álgebra é chamado de conjunto mensurável.

Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, a intersecção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{F}$ é ainda uma σ-álgebra, chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Tal σ-álgebra é a menor σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$.

Quando (X, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra gerada pelos abertos de X é chamada de σ-álgebra de Borel e denotada por $\mathcal{B}(X)$.

Definição 2. *Seja $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. A topologia usual de $\mathbb{R}$ induz uma topologia em $\bar{\mathbb{R}}$ considerando como abertos os subconjuntos $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ da forma:*

(a) $A \subset \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$; ou

(b) $A = [-\infty, a)$, para algum $a \in \mathbb{R}$; ou

(c) $A = (a, \infty]$, para algum $a \in \mathbb{R}$; ou

(d) A é uma união de conjuntos como os de (a), (b) ou (c).

Consideraremos $\bar{\mathbb{R}}$ como espaço mensurável com a σ-álgebra de borel $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ relativa à topologia acima.

Definição 3. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ é mensurável se $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. O conjunto formado por tais funções será denotado por $M(X, \Sigma)$. Consideraremos ainda o subconjunto $M^+(X, \Sigma) := \{f \in M(X, \Sigma); f(x) \geq 0, \forall x \in X\}$.*

Definição 4. *Uma medida no espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ de $X \in \Sigma$ é dita finita se $\mu(X) < \infty$, e o terno (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Definição 5. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f, g, f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que*

(a) $f = g$ em quase todo ponto (qtp) sempre que se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo x em $X \setminus A$.

(b) (f_n) converge para f em quase todo ponto (qtp), e escrevemos $f_n \to f$ qtp, se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X \setminus A$.

Teorema 1 (Lema de Fatou em $\bar{\mathbb{R}}$)**.** *Se (f_n) é uma sequência em $M^+(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, então*

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\bar{\mathbb{R}}} f_n(x)dx.$$

Definição 6. *Um conjunto $E \subset \bar{\mathbb{R}}$ pertence à σ-álgebra de Lebesgue se existem $A, B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ tais que*

$$A \subset E \subset B \quad e \quad \mu(B \setminus A).$$

Teorema 2 (Teorema da Convergência Dominada em $\bar{\mathbb{R}}$)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{L}(\bar{\mathbb{R}}, \Sigma, \mu)$ que converge qtp para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Se existe $g \in \mathcal{L}(\bar{\mathbb{R}}, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in \mathcal{L}(\bar{\mathbb{R}}, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\bar{\mathbb{R}}} f_n(x)dx.$$