Revisão de Geometria Analítica

Priscila Leal da Silva

27 de junho de 2024

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o vetor $\vec{v} = (a, b)$ é a flecha que une o ponto $(0, 0)$ a (a, b).

Observe que $\vec{v}$ tem um **sentido**: sai de $(0, 0)$ e chega em (a, b), sendo que a flecha representada na Figura 1 indica exatamente este sentido.

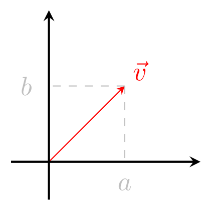


Figura 1: O vetor $\vec{v} = (a, b)$ é a flecha que sai do ponto $(0, 0)$ e chega no ponto (a, b).

A **norma** do vetor $\vec{v} = (a, b)$ é o tamanho da seta representada por $\vec{v}$, é denotado por $\|v\|$ e é calculado por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dizemos que o vetor $\vec{v} = (a, b)$ é unitário se sua norma é igual a 1, ou seja,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

No caso em que $\vec{v}$ não é unitário, o vetor unitário associado a ele é o vetor $\vec{u}$ dado por

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|v\|} = \frac{(a, b)}{\|v\|} = \left(\frac{a}{\|v\|}, \frac{b}{\|v\|} \right).$$

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, a **distância** entre os pontos A e B é denotada por $d(A, B)$ e é definida como a norma do vetor

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

ou seja,

$$d(A, B) = \|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observe que ao definirmos os conceitos de vetor, sentido e distância, até agora consideramos objetos no **plano**, ou seja, os pontos em questão estão em $\mathbb{R}^2$. Porém, ao considerarmos pontos no espaço tri-dimensional (ou seja, em $\mathbb{R}^3$), os conceitos são equivalentes:

1. Norma do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

2. Distância entre $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

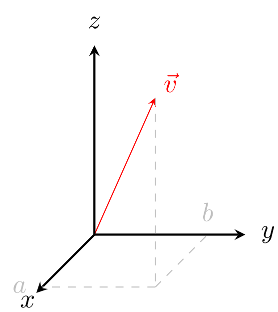
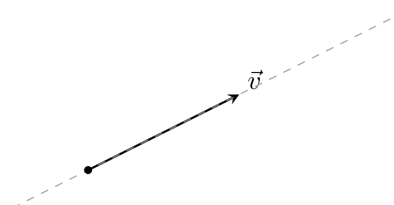


Figura 2: O vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ é a flecha que sai do ponto $(0, 0, 0)$ e chega no ponto (a, b, c). O valor c representa a altura, podendo ser negativa, do vetor $\vec{v}$.

Uma **reta** é um conjunto *infinito* de pontos que podem ser unidos por uma única linha. Um ponto $S \in \mathbb{R}^3$ em uma reta dada deve satisfazer a equação

$$S = A + t\vec{v}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$, no qual A representa um ponto qualquer da reta e $\vec{v}$ é um vetor, chamado de vetor diretor, que dá *direção* para a reta.



Um **plano** é um conjunto *infinito* de pontos que satisfazem a equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é chamado de **vetor normal** ao plano e d é uma constante determinada em função do vetor normal $\vec{n}$ e um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ qualquer do plano por meio da seguinte fórmula:

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

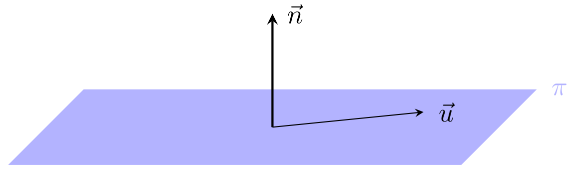


Figura 3: O vetor normal $\vec{n}$ forma um ângulo de $\pi/2$ com qualquer vetor $\vec{u}$ em π.

Observemos que pela definição de vetor normal, ele obrigatoriamente deve formar um ângulo de $\pi/2$ com *todo e qualquer* vetor no plano.

Uma **elipse** é o conjunto de pontos (x, y) tais que

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde $C = (x_0, y_0)$ é chamado de **centro** da elipse. Em termos de gráfico da elipse, temos dois casos que dependem da magnitude dos valores a e b na equação da elipse. Mais explicitamente, a Figura 4 representa o caso em que $a > b$, enquanto a Figura 5 graficamente exibe o comportamento quando $a < b$.

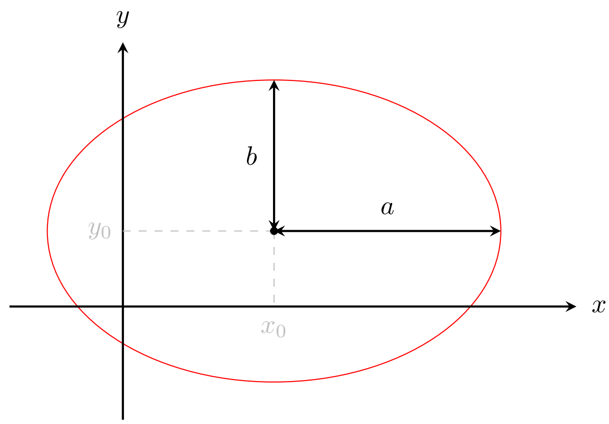


Figura 4: Esboço da elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ com $a > b$. O centro da elipse sempre será (x_0, y_0) e, como $a > b$, o maior eixo da elipse se encontra em x.

No caso em que $a = b$, temos $a^2 = b^2$ e escrevemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{1}$$

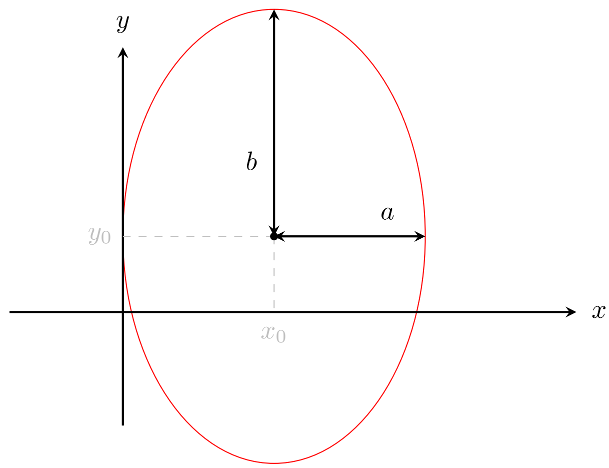


Figura 5: Esboço da elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ com $a < b$. O centro da elipse sempre será (x_0, y_0) e, como $a < b$, o maior eixo da elipse se encontra em y.

onde $r = a = b$. O conjunto de pontos (x, y) que satisfazem (1) é chamado de **circunferência** de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r. Concluímos então que *toda* circunferência é uma elipse com $a = b$, veja a Figura 6.

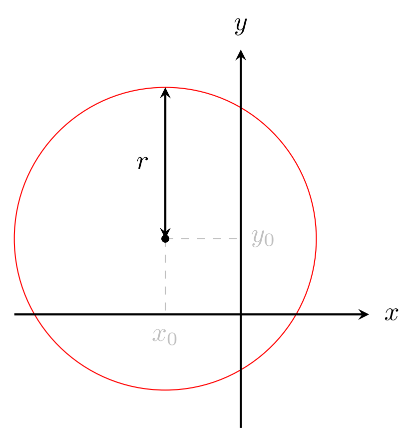


Figura 6: Esboço da circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r.

Uma **hipérbole** é o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem uma das equações abaixo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Na Figura 7 e Figura 8, esboçamos as hipérboles $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$, respectivamente, para demonstrarmos o comporamento dessa curva. Em ambos os casos, são tomados $a = b = 1$ em (2).

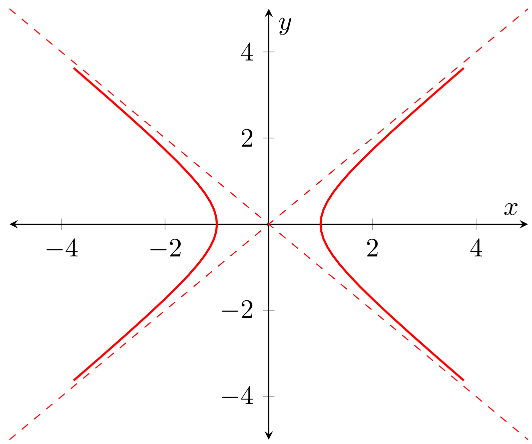


Figura 7: Esboço da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Observe que, neste caso, temos $x_0 = 0$ e $y = 0$, de tal forma que a intersecção entre as duas linhas tracejadas, chamadas de assíntotas da hipérbole, é justamente o ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. De maneira geral, isso valerá para qualquer hipérbole, seja ela de qualquer um dos dois tipos.

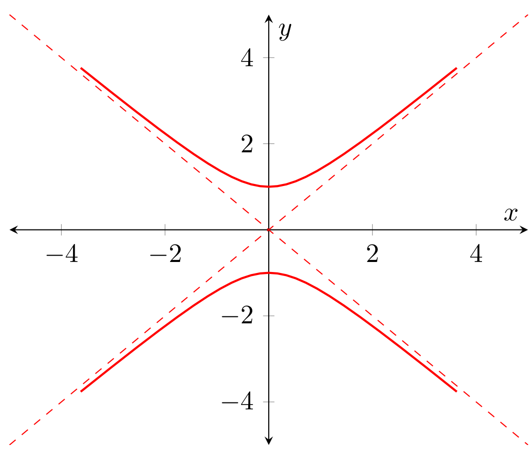


Figura 8: Esboço da hipérbole $y^2 - x^2 = 1$. Observe que diferentemente da hipérbole anterior, o sinal $-$ acompanha x, de forma que os menores valores positivo e negativo da hipérbole estão no eixo y, ou seja, possuem $x = 0$. Na Figura 7, o comportamento é reverso: como o sinal $-$ acompanha y, os menores valores positivo e negativo da hipérbole possuem $y = 0$.