Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional
CMAC Sudeste

ISSN 2317-3300

Álgebras de Lie e aplicações

Igor L. Freire, **Priscila L. da Silva**,
Centro de Matemática, Computação e Cognição, CMCC, UFABC
09210-170, Santo André, SP
E-mail: igor.freire@ufabc.edu.br, priscila.silva@ufabc.edu.br

Palavras-chave: *Álgebras de Lie, física-matemática*

Resumo: *Neste trabalho classificaremos as álgebras de Lie de dimensão* 2 *e* 3 *e mostraremos algumas aplicações em Física-Matemática.*

1 Introdução

O que hoje chamamos de álgebras de Lie surgiu na segunda metade do século XIX, quando Lie estendia, às equações diferenciais, a teoria de Galois para equações algébricas. Elas apareceram como objetos infinitesimais associados aos grupos de transformações com o colchete da álgebra correspondendo ao comutador do grupo.

Um exemplo bem simples é o seguinte: considere a equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1}$$

É fácil ver que as transformações $(x, y, u) \mapsto (x+\varepsilon, y, u)$, $(x, y, u) \mapsto (x, y+\varepsilon, u)$ e $(x, y, u) \mapsto (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, u)$ deixam invariantes as soluções de (1) e que

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(x+\varepsilon, y, u) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(x, y+\varepsilon, u) = \frac{\partial}{\partial y}, \\ R &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, u) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

são seus respectivos geradores infinitesimais de simetrias, o qual forma uma álgebra de Lie tridimensional. Isso mostra que a equação (1) admite os geradores (2) como geradores infinitesimais de simetrias.

Rigorosamente falando, uma álgebra de Lie é um espaço vetorial V munido de um produto, também chamado colchete de Lie, $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, que é bilinear, antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$$

para todos os elementos X, Y, $Z \in V$.

Um exemplo simples de álgebra de Lie é o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do bem conhecido produto vetorial entre vetores, que age nos elementos da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ da seguinte forma: $[e_1, e_2] := e_1 \times e_2 = e_3$, $[e_2, e_3] := e_2 \times e_3 = e_1$ e $[e_3, e_1] := e_3 \times e_1 = e_2$.

ISSN 2317-3300

2 Classificação de Bianchi

Bianchi classificou as álgebras de Lie de dimensão 3, a menos de isomorfismos, em 9 tipos (ou 11, dependendo de como fazemos algumas considerações). Várias dessas álgebras possuem aplicações em física-matemática. Por exemplo, temos a álgebra de Lie de Heisenberg, que possui esse nome devido às relações de comutação entre operadores momento e posição da Mecânica Quântica, a álgebra de Lie do grupo de translações no espaço, a álgebra de Lie $so(3)$, que corresponde ao grupo de rotações do espaço.

Neste trabalho apresentaremos a classificação das álgebras de Lie de dimensão 2 e 3 (classificação de Bianchi), como feita em [1, 2], e mostraremos algumas aplicações delas em Física-Matemática.

3 Agradecimentos

Priscila L. da Silva agradece à FAPESP pelo suporte financeiro (projeto 2010/10259-3).

Referências

[1] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenki and S. P. Novikov, "Modern Geometry - Methods and Applications", vol. I, Springer, 1992.

[2] J. Patera and P. Winternitz, Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.*, 18, (1977) 1449-1455.