Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional
CMAC Sudeste 2013
ISSN 2237-7166

Sobre uma classe de equações diferenciais ordinárias admitindo propriedades especiais

Igor Leite Freire e **Priscila Leal da Silva**
CMCC - Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC,
09210-170, Santo André, SP
E-mail: igor.freire@ufabc.edu.br,
E-mail: priscila.silva@ufabc.edu.br

Resumo: *Neste trabalho apresentaremos uma classe de equações diferenciais ordinárias admitindo estrutura variacional na qual todos os geradores de simetrias de Lie são simetrias de Noether*

Palavras-chave: *Simetrias de Lie, simetrias de Noether, primeiras integrais.*

1 Introdução

Nas décadas finais do século XIX Sophus Lie introduziu a noção de grupos contínuos de transformações, atualmente conhecidos por grupos de Lie, com o objetivo de unificar e estender vários métodos de se obter soluções de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, que culminou com o surgimento de uma nova vertente em Matemática: a Teoria de Lie. O resultado do trabalho de Lie em equações diferenciais é o que hoje chamamos de simetrias de Lie de equações diferenciais.

Um grupo de simetrias de uma equação diferencial, ou sistema de equações, é um grupo de transformações que aplica qualquer solução da equação, ou sistema, em outra solução. Do ponto de vista de Lie, tal grupo depende apenas de parâmetros contínuos e consiste de transformações de pontos agindo no espaço das variáveis independentes e dependentes.

Os grupos de transformações de Lie e seus geradores infinitesimais podem ser naturalmente estendidos, ou prolongados, de modo a agirem no espaço das variáveis independentes, dependentes e derivadas das variáveis dependentes, de qualquer ordem, gerando assim um sistema linear homogêneo sobre-determinando de equações diferenciais nos termos dos geradores infinitesimais, as chamadas equações determinantes (*determining equations*).

Se uma equação diferencial, ou sistema, é invariante sob a ação de um grupo de transformações de pontos de Lie, podemos encontrar, construtivamente, soluções especiais, chamadas soluções invariantes, que são invariantes sob a ação de algum subgrupo do grupo total de simetrias admitido pela equação. Maiores detalhes podem ser encontrados em Bluman e Kumei [1], Cantwell [3], Hydon [5], Ibragimov [6] e Olver [9].

No começo do século XX Emmy Noether mostrou a conexão entre as simetrias de uma integral de ação (simetrias variacionais ou de divergência) e as quantidades conservadas para as equações de Euler-Lagrange correspondentes. Tais simetrias deixam as equações de Euler-Lagrange invariantes, fazendo assim uma conexão direta entre a teoria desenvolvida por Lie e a Física.

Noether provou que toda lei de conservação de uma equação diferencial, ou sistema, advém de uma correspondente propriedade de simetria da mesma. Por exemplo, a invariância de um princípio variacional sob um grupo de translações temporais implica na conservação de energia das soluções das equações de Euler-Lagrange associadas. De modo dual, a invariância sob translações espaciais conduzem, fisicamente, à conservação do momento linear.

 ISSN 2237-7166

Para a aplicação do Teorema de Noether a uma equação diferencial, uma condição necessária é a existência de uma Lagrangeana, à qual a equação seja obtida via equações de Euler-Lagrange.

Considerando equações diferenciais com estrutura variacional, o Teorema de Noether só é aplicável, ou seja, só se pode construir a quantidade conservada, quando a simetria associada possui determinadas propriedades. Tais simetrias são chamadas simetrias de Noether.

2 Equações diferenciais ordinárias e Teorema de Noether

Considere uma equação diferencial (ordinária ou parcial), $F=0$, com estrutura variacional, ou seja,

$$F=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=0,$$

onde $\delta/\delta u$ é o operador de Euler-Lagrange e $\mathcal{L}$ é uma lagrangeana de ordem k. É fato conhecido que se X é um gerador de simetrias da equação $F=0$ satisfazendo a relação $X^{(k)}\mathcal{L}+LDiv(X)=Div(A)$, onde $X^{(k)}$ é a extensão de X de ordem k e A é um vetor, chamado potencial, então associado ao gerador de simetrias X pode-se construir uma quantidade conservada. Neste caso o gerador X é chamado gerador de simetria de Noether.

Decorre do Teorema de Noether que, no caso particular de equações diferenciais ordinárias, tal quantidade conservada, chamada *primeira integral*, é dada pela expressão

$$I=A-\xi\mathcal{L}-(\eta-y'\xi)\frac{\delta}{\delta y'}\mathcal{L}-D(\eta-y'\xi)\frac{\delta}{\delta y''}\mathcal{L}+\cdots$$

A solução de uma primeira integral também é solução da equação original. Por exemplo,

$$\frac{(y')^2}{2}+\frac{A}{2}y^{-2}=c \tag{1}$$

é uma primeira integral da Equação de Ermakov

$$y''=Ay^{-3}. \tag{2}$$

Fazendo $c=0$ e integrando, vemos que $y(x)=\sqrt{k+\sqrt{-A}x}$ é uma solução de (1), que também é uma solução para (2).

3 Equações diferenciais ordinárias cujos grupos de simetrias de Lie coincidem com as simetrias de Noether

É fato conhecido que o conjunto de simetrias de Lie de uma equação diferencial com estrutura variacional usualmente não coincide com o conjunto de simetrias de Noether, veja, por exemplo, [2, 4, 7, 8]. Entretanto há classes especiais de equações para as quais estes conjuntos coincidem. Por exemplo, é bem conhecido que a Equação de Ermakov (2) admite uma álgebra de Lie tridimensional, isomorfa à álgebra $sl(2,\mathbb{R})$, com geradores infinitesimais

$$\begin{aligned}X_1&=\frac{\partial}{\partial x},\\X_2&=2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},\\X_3&=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Em (2) e no que se segue, A é uma constante arbitrária, mas não-nula, e $y=y(x)$.

 ISSN 2237-7166

Particularmente para (2), o conjunto de simetrias de Lie coincide com o conjunto de simetrias de Noether e, então, podemos construir a partir de cada uma dessas simetrias suas correspondentes integrais, dadas por

$$I_1 = \frac{(y^{'})^2}{2} + \frac{A}{2}y^{-2},$$

$$I_2 = x(y^{'})^2 - yy^{'} + Axy^{-2},$$

$$I_3 = \frac{x^2}{2}(y^{'})^2 - xyy^{'} + \frac{A}{2}x^2y^{-2} + \frac{y^2}{2}.$$

Mais recentemente, em [2, 4] foi mostrado que os geradores simetrias de Lie

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ Y_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \\ Y_3 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

da equação

$$y'''' = Ay^{-5/3} \tag{3}$$

também são simetrias de Noether, com correspondentes primeira integrais

$$I_1 = \frac{(y'')^2}{2} + \frac{3}{2}ay^{-2/3} - y'y''',$$

$$I_2 = \frac{x(y'')^2}{2} + \frac{3}{2}axy^{-2/3} - xy'y''' + \frac{3}{2}yy''' + \frac{1}{2}y'y'',$$

$$I_3 = \frac{x^2(y'')^2}{2} + \frac{3}{2}ax^2y^{-2/3} - x^2y'y''' + 3xyy''' - xy'y'' - 3yy'' + 2(y')^2.$$

Tanto na equação (2) quanto para a equação (3), as álgebras de Lie de simetrias são isomorfas à álgebra $sl(2,\mathbb{R})$.

Neste trabalho discutiremos alguns resultados de nossa autoria relativos à equação

$$y^{(2n)} = Ay^{\frac{1+2n}{1-2n}}. \tag{4}$$

O principal resultado discutido é dado por

Teorema 1. *O conjunto de simetrias de Lie da equação* (4) *coincide com o conjunto de simetrias de Noether.*

Tal resultado estende para EDOs resultados bem conhecidos acerca de simetrias de Noether e determinadas potências, chamadas críticas, para equações diferenciais parciais semilineares com não-linearidade do tipo potência.

4 Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro através dos processos 2011/19089-6 e 2012/22725-4.

ISSN 2237-7166

Referências

[1] G. W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 81, Springer, New York, (1989).

[2] A. H. Bokhari, F. M. Mahomed and F. D. Zaman, Symmetries and integrability of a fourth-order Euler-Bernoulli beam equation, J. Math. Phys., vol. 51, 053517, (2010).

[3] B. J. Cantwell, Introduction to symmetry analysis, Cambridge University Press, (2002).

[4] I. L. Freire, P. L. Silva and M. Torrisi, Lie and Noether symmetries for a class of fourth-order Emden-Fowler equations, J. Phys. A: Math. Theor., (2013).

[5] P. E. Hydon, Symmetry methods for differential equations, Cambridge texts in applied mathematics, 2000.

[6] N. H. Ibragimov, Transformation groups applied to Mathematical Physics, (1985).

[7] P. L. Silva, Soluções invariantes e simetrias de Noether para uma classe de equações de Emden-Fowler de quarta ordem, Trabalho de Conclusão de Curso, UFABC, (2013).

[8] M. R. Silva, Simetrias e integrabilidade de equações do tipo Emden-Fowler, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UFABC, (2013).

[9] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, GMT 107, Springer, New York, (1986).