CNMAC2012
XXXIV CONGRESSO NACIONAL DE
MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
17 a 21 de setembro de 2012 - Águas de Lindóia/SP

ISSN 1984-8218

Simetrias de Lie e equações diferenciais ordinárias

Igor L. Freire **Priscila L. da Silva***
Centro de Matemática, Computação e Cognição, CMCC, UFABC
09210-170, Santo André, SP
E-mail: igor.freire@ufabc.edu.br, priscila.silva@ufabc.edu.br

RESUMO

Considere um conjunto de transformações invertíveis no plano

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y, \epsilon), \;\; \bar{y} = \bar{y}(x, y, \epsilon), \tag{1}$$

dependendo de um parâmetro real ϵ suficientemente próximo de 0 e sujeito à condição $(\bar{x}, \bar{y})|_{\epsilon=0} = (x, y)$. Se a composição de duas transformações do tipo (1) ainda é uma terceira transformação deste mesmo tipo dizemos que estas transformações formam um grupo local de transformação a um parâmetro G.

Exemplos simples de tais grupos são as translações ao longo do eixo x, $(\bar{x}, \bar{y}) = (x + \epsilon, y)$, ou dilatações $(\bar{x}, \bar{y}) = (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}y)$.

Transformações do tipo (1) são chamadas transformações de pontos (*point transformations*) e o grupo G é chamado grupo de transformações de pontos (*group of point transformations*).

Sejam $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, $y = y(x)$ e considere uma equação diferencial ordinária do tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{2}$$

Um grupo de simetrias de Lie de uma equação diferencial do tipo (2) é um grupo de tranformações agindo num subconjunto do plano (x, y) que transforma uma solução da equação (2) em outra solução da mesma equação.

Embora a definição acima valha para quaisquer equações diferenciais, focá-la-emos numa equação diferencial ordinária do tipo (2).

As simetrias de Lie justificam vários métodos de integração de equações diferenciais ordinarias usualmente ensinados, muitas vezes de forma artificial, nos cursos introdutórios de equações diferenciais. Entretanto tal teoria fornece um método poderoso para se obter soluções de equações diferenciais não-lineares, além de várias outras possibilidades, como por exemplo, obtenção de leis de conservação. Para uma visão mais geral, veja [1], Capítulo 1, ou [2].

Neste trabalho apresentaremos algumas aplicações de grupos de simetrias de equações diferenciais para encontrar soluções de equações diferenciais. Por exemplo, mostraremos como encontrar uma solução exata para a equação de Thomas-Fermi esfericamente simétrica

$$y''(x) = \sqrt{\frac{y(x)^3}{x}}, \tag{3}$$

a qual é utilizada em Física Nuclear, veja [3].

Palavras-chave: *Grupos de transformações, simetrias de Lie, soluções invariantes.*

*bolsista de Iniciação Científica FAPESP

ISSN 1984-8218

Referências

[1] N. H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, vol. 1, CRC Press, 1994.

[2] N. H. Ibragimov, Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians, *J. Math. Anal. Appl.*, 318, (2006) 742–757.

[3] R. Pucci and G. G. N. Angilella, *Found. Phys.*, 36, (2006) 1554–1572.