Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma nova equação unificando quatro modelos físicos

Priscila Leal da Silva[1]
Igor Leite Freire[2]

Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo. Neste trabalho deduzimos uma equação que unifica diversos modelos físicos que de certa forma generaliza resultados recentemente encontrados em [1, 3].

Palavras-chave. Simetrias, transformação de scaling, equações integráveis.

1 Introdução

Neste trabalho classificamos a equação

$$\begin{aligned} F &= u_t + \varepsilon u_{txx} + f(u)u_x + g(u)u_x u_{xx} + h(u)u_x u_{xx}^2 + p(u)u_x^3 \\ &\quad + q(u)u_x^2 u_{xxx} + w(u)u_{xxx} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

de acordo com uma determinada simetria de scaling, veja [7] para detalhes em simetrias.

A equação (1) é uma maneira bastante genérica de escrever as equações de Qiao [8], Novikov [5, 6], Camassa-Holm [2] e Degasperis-Procesi [4]. Tais equações são dadas respectivamente por

$$u_t - u_{txx} + 3u^2 u_x - u_x^3 = (4u - 2u_{xx})u_x u_{xx} + (u^2 - u_x^2)u_{xxx},$$

$$u_t - u_{txx} + 4u^2 u_x = 3u u_x u_{xx} + u^2 u_{xxx},$$

$$u_t - u_{txx} + 3u u_x = 2u_x u_{xx} + u u_{xxx}, \quad u_t - u_{txx} + 4u u_x = 3u_x u_{xx} + u u_{xxx}.$$

Considere o grupo de scaling de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definido por $\psi_\lambda(x, t, u) = (x, \lambda^{-b}t, \lambda u)$, onde $b \in \mathbb{R}$ é uma constante e $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Para (x, t, u) fixado, o vetor tangente à curva ψ_λ em (x, t, u) é dado pelo campo vetorial

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} - bt\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2}$$

Dizemos que ψ_λ é uma simetria de Lie da equação diferencial (1) se a chamada condição de invariância $X^{(3)}F = \lambda F$, para alguma $\lambda = \lambda(x, t, u, u^{(1)}, \cdots)$, onde

$$X^{(3)} = u\frac{\partial}{\partial u} - bt\frac{\partial}{\partial t} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} + (b+1)u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + (b+1)u_{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}}.$$

[1]priscila.silva@ufabc.edu.br, pri.leal.silva@gmail.com
[2]igor.freire@ufabc.edu.br, igor.leite.freire@gmail.com

Quando consideramos a equação (1) e a condição de invariância, encontramos o seguinte sistema sobredeterminado de equações para as funções f, g, h, p, q e w:

$$uf'(u) = bf(u), \quad uw'(u) = bw(u), \quad ug'(u) = (b-1)g(u), \quad uh'(u) = (b-2)h(u),$$
$$up'(u) = (b-2)p(u), \quad uq'(u) = (b-2)q(u), \quad \lambda = b+1,$$

cuja solução nos dá

$$\begin{aligned} &u_t + \varepsilon u_{txx} + \alpha u^b u_x + \beta u^{b-1} u_x u_{xx} + \sigma u^{b-2} u_x u_{xx}^2 + \delta u^{b-2} u_x^3 + \\ &+ \gamma u^{b-2} u_x^2 u_{xxx} + \rho u^b u_{xxx} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\alpha, \beta, \sigma, \delta, \gamma$ e ρ são constantes de integração.

Nos próximos passos do trabalho estudaremos outras propriedades da equação (3), como critérios para que a equação seja estritamente auto-adjunta, leis de conservação, obtenção de soluções e uma análise de quais parâmetros da equação são realmente essenciais.

Agradecimentos

I. L. Freire agradece à FAPESP (projeto 2014/05024-8) e ao CNPQ (projeto 308940/2013-6). O doutorado de P. L. da Silva é financiado pela CAPES.

Referências

[1] S. C. Anco, P. L. da Silva and I. L. Freire, A family of wave breaking equations generalizing the Camassa-Holm and Novikov equations, arXiv:1412.4415, (2014).

[2] R. Camassa and D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett., vol. 71, 1661-1664, (1993).

[3] P. L. da Silva and I. L. Freire, An equation unifying both Camassa-Holm and Novikov equations, Proceedings of AIMS Conference, (2015), (to appear).

[4] A. Degasperis and M. Procesi, Asymptotic Integrability, Proceedings of the International Workshop on Symmetry and Perturbation Theory SPT98, vol. 1, 23-37, (1998).

[5] A. N. W. Hone and J. P, Wang, Integrable peakon equations with cubic nonlinearity, J. Phys. A: Math. Theor., vol. 41, 372002, (2008).

[6] V. S. Novikov, Generalizations of the Camassa-Holm equation, J. Phys. A: Math. Theor, vol. 42, 342002, (2009).

[7] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, New York, (1986).

[8] Z. Qiao, A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons, J. Math. Phys., vol. 47, paper 112701, (2006).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0015