Teoria da Medida e Integração

Lista 1 - Classes de Conjuntos

Obs: Alguns dos exercícios abaixo podem já ter sido feitos total ou parcialmente em sala de aula.

I. ***Álgebras***

1. Seja $\Omega = (0, 1)$. Alguma das seguintes familias de conjuntos é uma álgebra?
   a. $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$.
   b. $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$.
   c. $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{2}{3}], (\frac{2}{3}, 1)\}$.
   d. $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{2}{3}], (\frac{2}{3}, 1)\}$.
2. a. Seja $\Omega = [0, 1]$. Complete a familia $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, (0, \frac{1}{2}], 1\}$ de tal forma a obter uma álgebra.
   b. Seja $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Complete a familia $\mathcal{C}_2 = \{\{2\}, \{3\}\}$ de tal forma a obter uma álgebra.
3. Mostre que se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras de subconjuntos de Ω, então $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ é álgebra.
4. Considere $\Omega = (0, 1]$. Provar que

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], (a_i, b_i] \subseteq (0, 1] \text{ e a união é disjunta}\}$$

   é álgebra.
5. Provar que a coleção

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$$

   é álgebra sobre Ω.

II. $\sigma-$***Álgebras***

1. Suponha que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \ldots$, e que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ é uma σ-álgebra sobre Ω. Mostre que $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ é uma álgebra. Encontre um contra-exemplo para mostrar que $\mathcal{G}$ não é necessariamente uma σ-álgebra.
2. Mostre que a coleção

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$$

   não é uma σ-álgebra sobre Ω.
3. Considere Ω infinito, não enumerável e mostre que a coleção

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$$

   é uma σ-álgebra sobre Ω.
4. Sejam Ω um conjunto qualquer e $\mathcal{F}$ σ-álgebra sobre Ω. Considere $C \in \mathcal{F}$. Provar que $\mathcal{F}_C = \{C \cap A : A \in \mathcal{F}\}$ é σ-álgebra sobre C.
5. Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra em $\Omega = [0, 1]$ tal que $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, ...$ Mostre que:
   a. $\{\frac{1}{n} : n = 2, 3...\} \in \mathcal{F}$.
   b. $(\frac{1}{n}, 1] \in \mathcal{F}$ para todo $n \geq 2$.
   c. $\{0\} \in \mathcal{F}$.
   d. $(0, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ para todo $n \geq 2$.
6. Dado um conjunto de índices $\mathcal{I}$ qualquer, seja $\{\mathcal{F}_\alpha; \alpha \in \mathcal{I}\}$ uma família de σ-álgebras. Ou seja, para cada $\alpha \in \mathcal{I}$, $\mathcal{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra sobre Ω. Mostre que $\mathcal{G} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra.
7. Dada uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, mostre $\sigma(\mathcal{C})$ é a menor σ-álgebra que contêm $\mathcal{C}$. Ou seja, se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra, então $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ se, e só se, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$.
8. Dadas duas famílias $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de subconjuntos de Ω, mostre que se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, então $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$.
9. Mostre que a σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, é gerada por cada uma das seguintes famílias de conjuntos:
   a. $\mathcal{A}_1 = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

b. $\mathcal{A}_2 = \{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

c. $\mathcal{A}_3 = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

d. $\mathcal{A}_4 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

e. $\mathcal{A}_5 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

f. $\mathcal{A}_6 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

g. $\mathcal{A}_7 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

10. Dada uma função $f : \Omega \to \Omega'$ e $A \subseteq \Omega'$, defina a imagem inversa de A por f como o conjunto $f^{-1}(A) \subseteq \Omega$ dado por

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in \Omega'\}.$$

Do mesmo modo, dada uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω', defina

$$f^{-1}(\mathcal{C}') = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{C}'\}.$$

Deste modo, mostre que

a. se $\mathcal{F}'$ éuma σ-álgebra em Ω', então $f^{-1}(\mathcal{F}')$ é σ-álgebra em Ω. Em particular, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ éuma σ-álgebra.

b. $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$.

Dica: Mostre que $\mathcal{G}' = \{A \in \sigma(\mathcal{C}') : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω' e conclua que $\mathcal{G}' = \sigma(\mathcal{C}')$.

11. É possível que uma σ-álgebra infinita seja enumerável? O que podemos afirmar sobre a cardinalidade de uma σ-álgebra infinita?

III. *Outras Classes de Conjuntos*

1. Mostre que a família

$$\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{(\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

é um π-sistema.

2. Mostre que a família

$$\mathcal{J}_n = \{\emptyset\} \cup \{(\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n] \subset \mathbb{R}^n; \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

é um π-sistema.

3. O conjunto $\emptyset$ deve estar em todo π-sistema?

4. Mostre que se a família $\mathcal{J}$ formada por todos os subconjuntos que $\mathcal{R}^n$ que não são abertos e nem fechados, não é um π-sistema.

5. Dado um λ-sistema $\mathcal{L}$, mostre que

   i. se $A, B \in \mathcal{L}$ e $A \subseteq B$, então $B - A \in \mathcal{L}$;

   ii. se $A, B \in \mathcal{L}$ com $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B \in \mathcal{L}$;

   iii. $\mathcal{L}$ é uma classe monótona.

6. Mostre que $\mathcal{L}$ é um λ-sistema se, e somente se,

   (i) $\Omega \in \mathcal{L}$;

   (ii) Se $A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$, então $B - A \in \mathcal{L}$;

   (iii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{L}$ são tais que $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}.$$

7. Dada uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, mostre que $\lambda(\mathcal{A})$ (λ-sistema gerado por $\mathcal{C}$) está bem definido. Ou seja, prove que se $\{\mathcal{L}_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}\}$ são λ-sistemas de subconjuntos de Ω, então

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{L}_\alpha,$$

   é um λ-sistema.

8. Mostre que se $\mathcal{F}$ é, ao mesmo tempo, um π-sistema e um λ-sistema, então $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra.

9. (Teorema λ-π sistema de Dynkin) Seja $\mathcal{C}$ é um π-sistema em Ω e $\mathcal{L}$ um λ-sistema tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$. Para cada $A \subset \Omega$, defina $\mathcal{G}_A = \{C \subset \Omega : A \cap C \in \lambda(\mathcal{C})\}$. Mostre que:

   a) se $\lambda(\mathcal{C})$ for um π-sistema, então $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{L}$;

   b) para todo $A \in \lambda(\mathcal{C})$, $\mathcal{G}_A$ é um λ-sistema;

   c) se $A \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}_A$;

   d) para todo $A \in \mathcal{C}$, $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}_A$;

   e) para todo $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \lambda(\mathcal{C})$, vale que $A \in \mathcal{G}_B$;

   f) para todo $B \in \lambda(\mathcal{C})$, vale que $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}_B$;

   g) $\lambda(\mathcal{C})$ é um π-sistema, e portanto $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{L}$.

10. Dada uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, mostre que $\mathfrak{m}(\mathcal{A})$ (classe monótona gerada por $\mathcal{A}$) está bem definida. Ou seja, prove que se $\{\mathcal{C}_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}\}$ são classes monótonas de subconjuntos de Ω, então
$$\mathcal{C} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\alpha,$$
é uma classe monótona.

11. Prove que uma álgebra $\mathcal{A}$ é σ-álgebra, e somente se, $\mathcal{A}$ é uma classe monótona.

12. Mostre que se $\mathcal{A}$ é álgebra, então $\mathfrak{m}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

IV. ***Limite superior e inferior***

Seja $A_1, A_2, ...$ uma sequência de subconjuntos de Ω. Definimos o limite superior e inferior da sequência de conjuntos por

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

1. Seja $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é σ-álgebra. Mostrar que $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$ e $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2. a. Mostre que $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ se, e somente se, $\omega \in A_n$ para infinitos índices n.

   b. Mostre que $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ se, e somente se, $\omega \in A_n$ para todo n a não ser, tal vez, uma quantidade finita de índices n.

3. Mostre que:

   a. $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

   b. Se $A_n \uparrow A$ (ou $A_n \downarrow A$), então $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Definições

A seguir listamos algumas das definições necessárias para os exercícios desta lista.

1. Diremos que uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω é uma ***classe monótona*** se é fechada para uniões e interseções monótonas. Ou seja, se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \text{e} \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots ,$$

   então

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \cap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}.$$

2. Diremos que uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos de Ω é uma um π***-sistema*** se é fechado para interseções. Ou seja, se $A, B \in \mathcal{L}$, então $A \cap B \in \mathcal{L}$.

3. Diremos que uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos de Ω é um λ***-sistema*** se

   (i) $\Omega \in \mathcal{L}$;

   (ii) Se $A \in \mathcal{L}$, então $A^c \in \mathcal{L}$;

   (iii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{L}$, são disjuntos dois a dois, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}.$$

4. Dada uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, seja $\Xi(\mathcal{A})$ o conjunto de classes monótonas que contém a $\mathcal{A}$. Defina então

$$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \Xi(\mathcal{A})} \mathcal{M}$$

   como a classe monótona gerada por $\mathcal{A}$. Ou ainda, de maneira equivalente, a menor classe monótona que contém $\mathcal{A}$.

5. Dada uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, seja $\Xi(\mathcal{A})$ o conjunto de λ-sistemas que contém a $\mathcal{A}$. Defina então

$$\lambda(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{L} \in \Xi(\mathcal{A})} \mathcal{L}$$

   como o λ-sistema gerado por $\mathcal{A}$. Ou ainda, de maneira equivalente, o menor λ-sistema que contém $\mathcal{A}$.