Lista 2 - Bases Matemáticas (Última versão: 14/6/2017 - 21:00)

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

Parte I

1 — Atribua valores verdades as seguintes proposições:

a) 5 é primo ***e*** 4 é ímpar.

b) 5 é primo ***ou*** 4 é ímpar.

c) (Não é verdade que 5 é primo) ***e*** 4 é par.

d) Não é verdade que (5 é primo ***ou*** 4 é ímpar).

2 — Atribua um valor verdade as seguintes proposições:

a) ***Se*** 2 é par, ***então*** 3 não é par.

b) ***Se*** 2 não é par, ***então*** 3 não é par.

c) ***Se*** 3 não é par, ***então*** 3 não é ímpar.

d) ***Se*** minha mãe é um trator ***então*** eu sou uma moto-serra.

3 — Negue as seguintes proposições:

a) $3 > 4$ ***e*** 2 é par.

b) Não é verdade que (3 é par ***ou*** 5 é impar).

c) 2 é número par ***e*** não é verdade que 3 é um número ímpar.

d) ***Se*** $3 > 4$, ***então*** 2 é par.

e) ***Se*** 2 é par ***então***($\pi = 3$ ***ou*** $\pi = 4$).

f) ***Se*** 2 é par ***então*** não é verdade que 3 é par.

4 — Em um planeta distante, a população local se divide em dois grupos distintos, por eles chamados de HI e HO (não há nenhum indivíduo que pertença a ambos os grupos). Nessa população, há indivíduos com antenas e indivíduos sem antenas. Os indivíduos são coloridos, podendo ser verdes, brancos ou vermelhos (não há indivíduos bicolores ou tricolores). Sabemos que:

(i) Se um indivíduo é do grupo HI, então ele possui antena.

(ii) Se um indivíduo é verde ou branco, então ele não possui antena.

Pergunta-se:

a) Se um indivíduo possui antena, podemos saber a que grupo pertence?

b) Se um indivíduo não possui antena, podemos saber a que grupo pertence?

c) Se um indivíduo é do grupo HI, o que podemos afirmar sobre sua cor?

d) Se um indivíduo é do grupo HO, o que podemos afirmar sobre sua cor?

e) Se um indivíduo é verde, podemos saber a que grupo pertence?

f) Se um indivíduo é branco, podemos saber a que grupo pertence?

g) Se um indivíduo é vermelho, podemos saber a que grupo pertence?

5 — Sejam $p(n)$ e $q(n)$ proposições sobre números naturais. Assuma que a implicação $p(n) \Rightarrow q(n)$ é verdadeira, para todo n natural. Sabe-se que as proposições $p(2)$ e $q(3)$ são verdadeiras e que as proposições $p(5)$ e $q(7)$ são falsas. Podemos então afirmar que (pode haver múltiplas alternativas corretas ou mesmo nenhuma):

a) $q(2)$ é verdadeira
b) $p(3)$ é verdadeira
c) $q(5)$ é falsa
d) $p(7)$ é falsa

6 — Observe o diagrama genérico abaixo:

$$\begin{array}{l} \text{premissa 1} \\ \text{premissa 2} \\ \hline \text{conclusão} \end{array}$$

Ele representa o seguinte **argumento**: assumindo como verdadeiras a **premissa 1** e a **premissa 2**, pretendemos deduzir que também é verdadeira a **conclusão**. Um argumento desse tipo será considerado um *argumento válido*, se a **conclusão** seguir necessariamente das premissas, isto é, *se não for possível termos as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.* Com esse significado, propõe-se o seguinte problema: dadas duas proposições simples p e q, determine quais dos argumentos abaixo são válidos:

a)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \text{não } p \\ \hline \text{não } q \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \text{não } q \\ \hline \text{não } p \end{array}$$

7 — Escreva cada uma das proposições compostas abaixo usando somente os conectivos indicados

a) $p \Rightarrow q$, usando $\vee$ e $\neg$
b) $p \veebar q$ (*ou exclusivo*), usando $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
c) $p \wedge q$, usando $\vee$ e $\neg$
d) $p \wedge q$, usando $\Rightarrow$ e $\neg$
e) $p \vee q$, usando $\wedge$ e $\neg$
f) $p \vee q$, usando $\Rightarrow$ e $\neg$

8 — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes frases:

a) $\neg p \Rightarrow q$
b) $\neg p \Rightarrow \neg q$
c) $p \Rightarrow \neg q$
d) Se chove, então eu não vou trabalhar.
e) Se x é par, então $x + 1$ é ímpar.
f) Se minha mãe é um trator, então eu sou uma moto-serra.
g) Se $2^k + 1$ é primo, então k é uma potência de 2.
h) Se $x^2 + y^2 = 0$, então x e y são iguais a 0.

9 — Para os pares de proposições p e q, diga se p é condição necessária ou suficiente para q. Em todos os itens em que é mencionado, x denota um número natural.

a) $p : x > 2$
$q : x > 3$
b) $p : x > 2$
$q : x \geq 2$
c) $p : x > 0$ e $x < 2$
$q : x < 2$
d) $p : x > 0$ e $x < 2$
$q : x = 1$
e) $p : \Delta$ é um triângulo isósceles
$q : \Delta$ é um triângulo equilátero
f) $p : M$ é uma matriz com determinante diferente de 0
$q :$ "M é uma matriz inversível

Parte II

10 — Determine o conjunto-verdade das seguintes proposições abertas, para as quais o domínio de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $n^2 < 12$

b) $3n + 1 < 25$

c) $3n + 1 < 25 \; e \; n + 1 > 4$

d) $n < 5$ ou $n > 3$

e) n é primo e não é verdade que $n > 17$

f) $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

11 — Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos números reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.

a) $x > 2$ e $x < 4$

b) $x > 2$ ou $x < 3$

c) $x < 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$)

d) não é verdade que ($x > 2$ e $x < 4$)

12 — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$.

b) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$.

d) $x < 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$)

e) Todos os números naturais são primos.

f) Nenhum número natural é primo.

g) Qualquer numero inteiro possui inverso multiplicativo.

13 — Interprete cada proposição abaixo (isto é, escreva em linguagem natural) e determine seu valor-verdade. O universo de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $\forall n \, (n + 1 > 2)$

b) $\forall n \, (n < 2 \lor (n < 5 \land n > 3))$

c) $\exists n \, (n + 1 > 2)$

d) $\exists n \, (n < 2 \lor (n < 5 \land n > 3))$

e) $\forall n \, (n \text{ par } \Rightarrow n + 1 \text{ ímpar})$

f) $\forall n \, (n \text{ primo } \Rightarrow n + 1 \text{ par})$

g) $\exists n \, (n \text{ primo } \land n + 1 \text{ ímpar})$

14 — Determine o valor-verdade das seguintes proposições

a) $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $2x^2 - 5x - 1 < 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 - 3x + 5 < 0$

c) $\exists x \in \mathbb{N}$, tal que $x^2 - 13x + 42 < 0$

15 — Identifique a variável livre e determine o conjunto-verdade das seguintes proposições abertas (o domínio de discurso é o conjunto dos números naturais)

a) Para todo n, $n^2 \geq m$

b) $m = 2n + 1$ para algum n

c) Para todo m par, nm é par

d) Para todo n ímpar, nm é ímpar

16 — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações

a) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 \geq m$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

b) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 \geq m$

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$

d) Existem $m, n \in \mathbb{N}$ distintos tais que $m + n = 0$

e) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n$ é par.

f) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ pares, $m + n$ é par.

g) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, se $m + n$ é par, então m e n são ambos pares.

17 — Interprete cada proposição abaixo (isto é, escreva em linguagem natural) e determine seu valor-verdade. O universo de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $\forall n\, \forall m\, (n + 1 > m)$
b) $\forall n\, \exists m\, (n + 1 > m)$
c) $\exists n\, \forall m\, (n + 1 > m)$
d) $\forall n\, \forall m\, (n, m \text{ pares } \Rightarrow n + m \text{ par})$
e) $\forall n\, \forall m\, (n + m \text{ par } \Rightarrow n, m \text{ pares})$
f) $\forall m\, \exists n\, (nm \text{ é ímpar})$
g) $\forall m\, \exists n\, (nm \text{ é par})$
h) $\forall m\, \exists n\, (m^2 = n)$
i) $\forall m\, \exists n\, (n^2 = m)$

18 — Para cada proposição abaixo, diga se é universal ou particular e determine o valor-verdade. O universo de discurso é co conjunto dos números naturais

a) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$
b) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$
c) $\exists x\, \forall y\, (x < y)$
d) $\forall y\, \exists x\, (x < y)$
e) $\exists x\, \exists y\, (x < y)$
f) $\forall x\, \forall y\, (x < y)$

19 — Determine o valor-verdade das seguintes proposições. O universo de discurso é o conjunto dos números reais.

a) $\forall x\, \exists y\, (2x - y = 0)$
b) $\exists y\, \forall x\, (2x - y = 0)$
c) $\exists y\, \exists z\, (y + z = 100)$
d) $\forall y\, \exists x\, (x^2 - 4x + y = 0)$
e) $\exists y\, \exists x\, (x^2 - 4x + y = 0)$
f) $\exists y\, \forall x\, (x^2 - 4x + y > 0)$

20 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica

a) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.
b) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.
c) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par e divisível por 3.
d) Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo.
e) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.
f) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.
g) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.
h) Todo número natural é divisível por 2, 3, 5 ou 7.
i) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$.
j) Existem dois números inteiros cuja soma é 1000.
k) Não existe número racional cujo quadrado é 2.
l) Para todos números a e b reais, há um número c que é menor que b e maior que a.

21 — Para cada uma das proposições do exercício anterior, escreva a sua negação em linguagem simbólica e em linguagem natural

22 — Reescreva cada afirmação a seguir em linguagem natural, sem usar notação simbólica

a) $\forall n \in \mathbb{R},\quad n < n^2$.
b) $\exists n \in \mathbb{R},\quad n^2 = n$.
c) $\exists! n \in \mathbb{R},\quad n^2 = n$.
d) $\exists n \in \mathbb{R},\quad n^2 = n^3$.
e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k < n$.
f) $\forall a, b \in \mathbb{R},\quad \exists c, d \in \mathbb{R} : a < c + d < b$.
g) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists c \in \mathbb{Z} \,|\, (a/b)c \in \mathbb{Z}$.
h) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \,|\, \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$
i) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \,|\, ab = c$

23 — A Fórmula de Bhaskara é uma proposição universal. Identifique as suas variáveis (e seus universos) e descreva-a em linguagem simbólica.

Parte III

Nos exercícios de 24 a 28, diga que tipo de técnica de demonstração foi usada para provar a proposição e explique como a técnica foi aplicada.

24 — *Proposição*[1]*:* $a \mid b$ *e* $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$*.* *Prova:* como $a \mid b, \exists k_1 : ak_1 = b$; e como $a \mid c$, $\exists k_2 : ak_2 = c$. Assim, $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$, o que significa que existe k $(k = k_1 + k_2)$ tal que $b + c = ak$, ou seja, $a \mid (b + c)$. □

25 — *Proposição:* $\log_2 3$ ***é irracional.*** *Prova:* suponha que existam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\log_2 3 = a/b$. Assim, $2^{a/b} = 3$ e $(2^{a/b})^b = 3^b$. Como $(2^{a/b})^b = 2$, teríamos $2^a = 3^b$. Mas 2 elevado a qualquer inteiro deve ser par, e 3 elevado a qualquer inteiro deve ser ímpar. Como um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, temos que concluir que $\log_2 3$ é irracional. □

26 — *Proposição: Se* a ***e*** b ***são números reais tais que*** ab ***é irracional, então pelo menos um dentre*** a ***e*** b ***deve ser irracional.*** *Prova:* se tanto a como b fossem racionais, então existiriam $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1/k_2$ e $b = k_3/k_4$. Então, $ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{(k_1k_3)}{(k_2k_4)}$ – o que significa que ab poderia ser escrito como quociente de dois inteiros, sendo assim racional. Portanto, se ab é irracional, ou a ou b deve ser irracional. □

27 — *Proposição: Se* a ***é irracional, então*** $\sqrt{a}$ ***também é irracional.*** *Prova:* Se $\sqrt{a}$ for racional, então existem inteiros m e n tais que $\sqrt{a} = m/n$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $a = m^2/n^2$. Como m^2 e n^2 são inteiros, a é racional. □

28 — *Proposição: A soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo é maior do que a medida da hipotenusa.* *Prova:* dado um triângulo retângulo qualquer, sejam a e b os comprimentos de seus catetos e c o comprimento de sua hipotenusa. Suponha que $a + b \le c$. Elevando ambos os lados ao quadrado temos $(a + b)^2 \le c^2$, ou ainda, $a^2 + 2ab + b^2 \le c^2$. Como as medidas dos lados são todas positivas, resulta $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 \le c^2$, e portanto $a^2 + b^2 < c^2$. No entanto, o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, e a prova está completa. □

Nos exercícios de 29 a 32, as demonstrações apresentadas estão incorretas. Aponte o erro em cada uma delas.

29 — $1 < 0$.
Prova: Seja um número real $x < 1$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos $\log x < \log 1$. Como sabemos que $\log 1 = 0$, então $\log x < 0$. Agora dividimos ambos os lados por $\log x$ e obtemos $1 < 0$.

30 — *Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira.*
Prova: Provemos a contrapositiva de "$\forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$". Seja $a = \sqrt{n}$. Temos que $a^2 = n$, e como o quadrado de um inteiro é sempre outro inteiro, n também é inteiro.

31 — *Se* $5|ab$ *então* $5|a$ *ou* $5|b$*.*
Prova: Se $5|ab$ então ab é da forma $5k$ para algum k. Portanto, ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m. Assim, concluímos que $5|a$ ou $5|b$.

[1] A notação $a \mid b$ significa que a divide b, isto é, que existe um inteiro k tal que $b = ka$.

32 — $1 = 2$.
Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de "$a = b$" por a obtemos $a^2 = ab$. Subtraindo b^2 dos dois lados, $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Fatorando, $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. Cancelando $(a-b)$ temos $a+b = b$. Quando a e b valem 1, temos que $1+1 = 1$, e está concluída a prova. ☠

33 — Demonstre que se p, q são números racionais, então $p+q$ é um número racional.

34 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

a) A raiz cúbica de 2 é irracional.

b) Dados a, b, c inteiros, se a não divide bc, então a não divide b.

35 — Prove pelo método contra-positivo: Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser impares.

36 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é irracional.

37 — Dados a, b, c números inteiros com $c \neq 0$, mostre que a divide b se e somente se ac divide bc.

Exercícios Complementares

38 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições

a) Não há soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$

b) Não há solução racional para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$

Respostas dos Exercícios

1 a.) F
b.) V
c.) F
d.) F

2 a.) V
b.) V
c.) F
d.) V

3 a.) $3 \leq 4$ *ou* 2 é impar.
d.) $3 > 4$ *e* 2 é ímpar.
e.) 2 é par *e* $\pi \neq 3$ *e* $\pi \neq 4$.

4 a.) Não, pode ser HI ou HO
c.) Certamente é vermelho
d.) Nada
f.) Sim, é HO

5 a.) Sim, $q(2)$ é verdadeira
c.) Não podemos concluir nada sobre $q(5)$

6 a.) válido
b.) inválido

7 a.) $\neg p \vee q$
b.) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
d.) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$

8 [contrapositiva / recíproca / inversa]
a.) $\neg q \Rightarrow p$ / $q \Rightarrow \neg p$ / $p \Rightarrow \neg q$
b.) $q \Rightarrow p$ / *não* $q \Rightarrow$ *não* p / $p \Rightarrow q$
d.) Se vou trabalhar, então não chove. / Se não vou trabalhar, então chove. / Se não chove, então vou trabalhar.
e.) Se $x + 1$ é par, então x é ímpar. / Se $x + 1$ é ímpar, então x é par. / Se x é ímpar, então $x + 1$ é par.
h.) Se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$ / Se $x = 0 = y$, então $x^2 + y^2 = 0$ / Se $x^2 + y^2 \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$

9 a.) Condição necessária, mas não suficiente.
d.) Condição necessária e suficiente.
e.) Condição necessária, mas não suficiente.
f.) Condição necessária e suficiente.

10 a.) $\{0, 1, 2, 3\}$ **c.)** $\{4, 5, 6, 7\}$ **e.)** $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

12 a.) Exemplo: $x = 7$ (poderia ser qualquer número real maior que 1). Contra-exemplo: $x = -5$ (poderia ser qualquer número real menor ou igual a 1).
b.) Exemplo: letra "a"(não há outro). Contra-exemplo: letra "b"(poderia ser a letra "n").
d.) Exemplo: $x = \pi$ (poderia ser qualquer número real menor que 2 ou entre 3 e 5). Contra-exemplo: $x = \sqrt{7}$ (poderia ser qualquer número real $2 \leq x \leq 3$ ou $x \geq 5$).
e.) Exemplo: 11 (poderia ser qualquer número primo). Contra-exemplo: 18 (poderia ser qualquer número composto ou 0 ou 1).

13 a.) (F) Para todo número natural n, $n+1 > 2$ (ou, de forma mais clara: o sucessor de qualquer número natural é sempre maior do que 2).
d.) (V) Existe (pelo menos) um número natural que satisfaça $n < 2$ ou $3 < n < 5$.
e.) (V) Para todo número natural, se tal número é par, seu sucessor é ímpar (ou, de forma mais clara: o sucessor de qualquer número par é um número ímpar).
g.) (V) Existe um número primo cujo sucessor é ímpar.

14 b.) F
c.) F

15 a.) Variável livre: m. Conjunto-verdade: $\{0\}$
b.) Variável livre: m. Conjunto-verdade: é o conjunto dos números naturais ímpares.
c.) Variável livre: n. Conjunto-verdade: $\mathbb{N}$.
d.) Variável livre: m. Conjunto-verdade: é o conjunto dos números naturais ímpares.

16 a.) Exemplo: $m = 0$ (é o único exemplo para a variável m). Contra-exemplo: $m = 4$ e $n = 1$ ($n^2 < m$).
b.) Exemplo: $n = -5$ e $m = 3$. Contra-exemplo: não há, pois a proposição é verdadeira.
c.) Exemplo: $x = \sqrt{3}$, $n = 2$. Contra-exemplo: não há, pois a proposição é verdadeira.
d.) Exemplo: não há, pois a proposição é falsa. Contra-exemplo: qualquer par de números distintos.
e.) Exemplo: qualquer par de números naturais com mesma paridade. COntra-exemplos: qualquer par de números naturais com paridades distintas.
f.) Exemplo: $m = 2$ e $n = 4$ ou $m = 6$ e $n = 8$. Contra-exemplos: não há, pois a proposição é verdadeira.
g.) Exemplo: $m = 2, n = 18$, tem-se $m + n = 20$ (a soma é par e cada uma das parcelas também é par). Contra-exemplo: $m = 3$ e $n = 5$, tem-se $m + n = 8$ (a soma é par, mas as parcelas não são pares).

17 a.) (F) Para todo par de números naturais n e m, $n+1 > m$ (ou, de forma um pouco mais clara: dados dois números naturais, o sucessor de um deles é maior do que o outro).
b.) (V) Para todo número natural n, existe um número natural m que seja menor do que o sucessor de n.
c.) (F) Existe (pelo menos) um número natural n cujo sucessor é maior do que qualquer outro número natural.
d.) (V) A soma de dois números naturais pares é par.
e.) (F) Se a soma de dois números naturais é par, então esses números são pares.
f.) (F) Dado qualquer número natural m, existe um número natural n que, multiplicado por m, resulta em um número ímpar.
g.) (V) Dado qualquer número natural m, existe um número natural n que, multiplicado por m, resulta em um número par.
h.) (V) O quadrado de todo número natural é um número natural.
i.) (F) Todo número natural é o quadrado de um número natural.

18 a.) Universal. Verdadeira.
c.) Particular. Falsa.
d.) Universal. Falsa.
e.) Particular. Verdadeira.

19 a.) V
b.) F
c.) V
d.) F
e.) V
f.) V

20 b.) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2)$
c.) $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, (\exists k, h \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2k \wedge x^2 = 3h)$
* simplificado: $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é par e divisível por 3
d.) $\neg\,(\exists x \in \mathbb{Z} \,|$
$\Big[\forall d \in \mathbb{N}, d \mid x^2 \Rightarrow (d = 1 \vee d = x^2)\Big] \vee x^2 < 0\Big)$
* simplificado: $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é primo $\vee\, x^2$ é ímpar)
e.) $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, (\exists k \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2k) \vee (\exists h \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2h + 1)$
* simplificado: $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é par ou x^2 é ímpar.
g.) $\forall x \in A, x \in B$
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(l))| < \varepsilon$
h.) $\forall x \in \mathbb{N}, (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 2k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 3k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 5k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 7k)$
k.) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2$
* alternativa: $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$
l.) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} \,|\, c < b \wedge c > a$

21 a.) $\forall n \in \mathbb{R} n^2 \neq 2$.
Para todo número real n, $n^2 \neq 2$.
b.) $\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2$.
Existe um número racional cujo quadrado é igual a 2.
c.) $\forall x \in \mathbb{Z} \neg(\exists k, h \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2k \wedge x^2 = 3h)$
(* simplificado: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ é ímpar ou não é divisível por 3)
Para todo número inteiro, seu quadrado é ímpar ou não é divisível por 3.
e.) $\forall x \in \mathbb{Z}(x^2 \neq 2k \forall k \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 \neq 2h + 1 \forall h \in \mathbb{Z})$
(* simplificado: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ é ímpar e x^2 é par.)
Existe um número inteiro cujo quadrado é ao mesmo tempo par e ímpar.
f.) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, \forall y \in \mathbb{R} \,|\, x + y \neq 0$.
Existe um número real x que não tem oposto.
g.) $\exists x \in A \,|\, x \notin B$
Existe um elemento de A que não está em B.
h.) $\exists n \in \mathbb{N} \,|\, 2 \nmid n \wedge 3 \nmid n \wedge 5 \nmid n \wedge 7 \nmid n$
Existe um número natural que não é divisível por 2, 3 5 e 7.
Existe um número racional que é maior ou igual ao seu inverso.
j.) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \neq 1000$
A soma de quaisquer dois inteiros é sempre diferente de 1000.
Existe um número racional cujo quadrado é igual a 2.

l.) $\exists a, b \in \mathbb{R} \mid \forall c \in \mathbb{R} c \geq b \vee c \leq a$
Existe um par de números reais a e b para os quais qualquer número real c é menor ou igual a a ou é maior ou igual a b.

22 a.) Todo número real é menor que seu quadrado.
b.) Existe um número real que é igual a seu próprio quadrado.
c.) Existe um único número real que é igual a seu próprio quadrado.
d.) Existe um número real cujo quadrado é igual a seu cubo.
e.) Todo número natural é maior do que algum número natural.
g.) Para todo par de inteiros a e b, existe um inteiro que multiplicado pelo quociente de a por b o torna inteiro.
h.) Para todo número real a existe algum outro real b tal que para qualquer c real, ab é igual a c.
i.) Para todo número real a e para todo número real c existe um número real b tal que $ab = c$.

23 A fórmula diz: dada uma (qualquer) equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac \geq 0$, suas soluções são dadas por $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. Assim, as variáveis são $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. A proposição universal que expressa a Fórmula de Bhaskara pode ser escrita, em linguagem simbólica,
$\forall a, b, c, x,$
$(ax^2 + bx + c = 0) \wedge (b^2 - 4ac \geq 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)$

24 Prova direta. Assume-se que a hipótese é verdadeira e prova-se, manipulando algebricamente os dados, que a tese é verdadeira.

25 Redução ao absurdo. A prova consiste em demonstrar que a negação da tese (isto é, supor que $\log_2 3$ é racional) leva a uma contradição.

26 Contrapositiva. A prova consiste em assumir que o consequente é falso (isto é, supor que a e b são racionais) e demonstrar que o antecedente também é falso (isto é, que ab é racional).

27 Contrapositiva. Assume-se que o consequente é falso ($\sqrt{a}$ racional) e prova-se que o antecedente é falso (a racional).

28 Redução ao absurdo. A tese da proposição diz, na notação que usamos, que $a + b > c$, e a prova consiste em demonstrar que a negação da tese ($a + b \leq c$) leva a uma contradição.

29 A própria demonstração diz que $\log x < \log 1$, isto é $\log x < 0$. No entanto, ao multiplicar ou dividir uma inequação $a < b$ por algum número negativo k, tem-se que $ak > bk$ ou $a/k > b/k$ (isto é, o sinal de ordem deveria ter sido invertido).

30 A proposição provada não é a contrapositiva do que se queria provar, e sim a recíproca.

31 A proposição é "Se $5|ab$ então $5|a$ ou $5|b$", e foi usada para provar a si mesma: "ab é da forma $5k$ ... Portanto ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m". *Em tempo:* a proposição em si é verdadeira, é a demonstração que está errada.

32 Se $a = b$, então $a - b = 0$. Nesse caso, não podemos cancelar o fator $(a - b)$ como fizemos.