Teoria da Medida e Integração

Lista 2

I. ***Medida***

1. Seja Ω um conjunto finito ou enumerável, e dado $A \subseteq \Omega$ defina $\mu(A)$ como o número de elementos em A, se A é finito e $\mu(A) = +\infty$ se A é infinito. Mostre que μ define uma medida σ-finita em $(\Omega, 2^{\Omega})$.

2. Dado Ω infinito não enumerável, defina a σ-álgebra

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ é no máximo enumerável ou } A^c \text{ é no máximo enumerável}\},$$

como no exercício II.3 da Lista 1. Para $A \in \mathcal{F}$ defina $\mu(A) = 0$ se é A é no máximo enumerável e $\mu(A) = +\infty$ se A^c é no máximo enumerável. Mostre que μ é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$, e que μ não é σ-finita.

3. Considere Ω um conjunto arbitrário, e defina $\mathcal{F}$ como na questão anterior. Para $A \in \mathcal{F}$, faça então $\nu(A) = 0$ se é A é no máximo enumerável e $\nu(A) = 1$ se A^c é no máximo enumerável. Mostre que

   a. ν está bem definida se, e só se, Ω é infinito não enumerável;

   b. se Ω é infinito não enumerável, então ν é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$.

4. (*Medidas Discretas*) Dado $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e uma sequência $(p_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty]$, para cada $A \subseteq \Omega$ defina

$$\mu(A) = \sum_{n : x_n \in A} p_n.$$

Mostre que μ é uma medida em $(\Omega, 2^{\Omega})$. Encontre condições suficientes para que μ seja σ-finita.

5. Sejam $\mu_1, ..., \mu_n$ medidas em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ e $a_1, a_2, .., a_n \in [0, \infty)$. Mostre que que $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A), \quad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$. Isto vale para famílias arbitrárias $(\mu_i)_{i\in I}$ de medidas e famílias arbitrárias $(a_i)_{i\in I} \subseteq [0,\infty)$? Isto é, a fórmula

$$\sum_{i\in I} a_i \mu_i$$

define uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$?

6. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{F}$. Defina

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A), \text{ para todo } A \in \mathcal{F}.$$

   Mostre que μ_E é uma medida.

7. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida tal que $\forall B \in \mathcal{F},\ 0 < \mu(B) < \infty$. Fixemos um B e definamos $\mu_B : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ pela fórmula $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$. Prove que:

   a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida.

   b. (*Teorema de Bayes*) Suponha adicionalmente que Ω é uma união, no máximo, enumerável disjunta de conjuntos B_n e μ finita. Mostre que para todo $A \in \mathcal{F}$ temos que $\mu(A) = \sum_n \mu_{B_n}(A)\mu(B_n)$. Além do anterior, temos também que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_{B_n}(A) = \frac{\mu_A(B_n)\mu(A)}{\sum_n \mu_A(B_n)\mu(A)}.$$

8. Seja ν uma função de conjuntos definida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω. Mostre que se ν é finitamente aditiva e enumeravelmente subaditiva em $\mathcal{F}$, então ela é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{F}$.

9. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que para todo $A, B \in \mathcal{F}$ tem-se que

$$\mu\left(A \cup B\right) + \mu\left(A \cap B\right) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right).$$

10. Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, seja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ uma sequência não-decrescente de conjuntos em $\mathcal{F}$. Mostre que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

11. Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, seja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ uma sequência não-crescente

de conjuntos em $\mathcal{F}$, tal que $\mu(A_n) < \infty$ para algum n. Mostre que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

12. Mostre, via contra exemplo, que a hipótese de finitude no exercício anterior não pode ser excluída.

13. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável, e $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ finitamente aditiva, com $\mu(\Omega) < \infty$. Mostre que μ é σ-aditiva (e portanto uma medida) se, e só se, para qualquer sequência não-crescente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ de conjuntos em $\mathcal{F}$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$ vale que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

14. (*Lema de Fatou para medidas*) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Definamos

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m, \text{ e } \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m.$$

Mostre que:

a. $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

b. se $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) < \infty$ então $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$.

15. (*Lema de Borel-Cantelli*) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{F}$. Provar que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) = 0$.

16. (*Princípio de inclusão-exclusão*) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, ..., A_n, \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é σ-álgebra. Considere μ uma medida em $\mathcal{F}$ e suponha que $\mu(A_k) < \infty$ para todo $k = 1, .., n$. Provar que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<i_2<...<i_k} (-1)^{k-1} \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$

II. **Medida exterior**

1. Dada $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{P}(\Omega)$, defina

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ; A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1\right\},$$

e

$$\mathcal{A}_{\sigma\delta} = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n ; A_n \in \mathcal{A}_\sigma, n \geq 1\right\}.$$

Seja μ_0 uma pré-medida sobre $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior induzida do μ_0. Mostre que:

a. Para todo $E \subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subseteq A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$

b. Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se, e só se, existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subseteq B$ e $\mu^*(B \backslash E) = 0$.

c. O item anterior ainda vale se μ_0 é σ-finita.

2. Seja μ^* a medida exterior em Ω induzida por uma pré-medida μ_0, tal que $\mu^*(\Omega) < \infty$. Para $E \subset \Omega$ defina a *medida interior* de E por

$$\mu_*(E) = \mu^*(\Omega) - \mu^*(E^c).$$

Nestas condições, mostre que $A \subseteq \Omega$ é μ^*-mensurável se, e só se, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

3. Teorema de extensão de Caratheodory: Mostre a unicidade no caso σ-finito.

4. Sejam μ uma medida $\sigma-$finita em $(\Omega, \mathcal{F})$ e μ^* medida exterior induzida por μ. Seja E um subconjunto arbitrário de Ω tal que $\mu^*(E) = \mu^*(\Omega)$, (mas E não tem que pertencer a $\mathcal{F}$). Provar que:

a. Se $A, B \in \mathcal{F}$, e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.

b. Considere $\mathcal{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{F}\}$. Defina $\nu : \mathcal{F}_E \to [0, \infty]$ por $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Então $\mathcal{F}_E$ é $\sigma-$álgebra e ν é medida sobre $\mathcal{F}_E$.