Lista 7
Bases Matemáticas

Funções II

1 — Dadas as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \pi[\![x]\!]$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

2 — Denotando por $\imath$ a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

a) $\imath \circ f = f$ e $f \circ \imath = f$

b) Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \imath$ e $f^{-1} \circ f = \imath$
Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

3 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

a) x

b) $3x+4$

c) x^2

d) $5x^2+1$

e) $x^2 - x$

f) $x^3 + x^2$

4 —

a) Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?

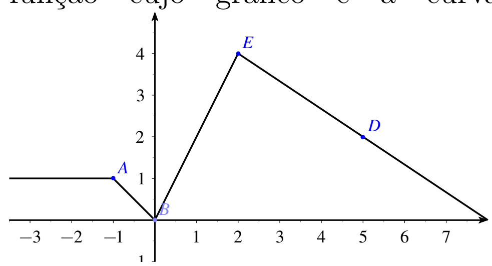
b) Esboce o gráfico de $|x|^3$.

c) Esboce o gráfico de $-|x|^5$.

d) Esboce o gráfico de $\operatorname{sen}(|x|)$

e) Esboce o gráfico de $\cos(|x|)$

5 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



6 — Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$,$(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e finalmente as expressões para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

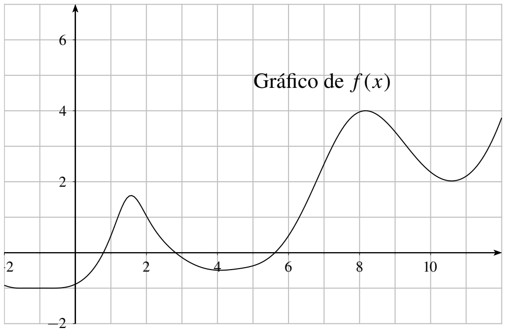
a)$f(x) = \sqrt{(x+2)}$ e $g(x) = |x|$

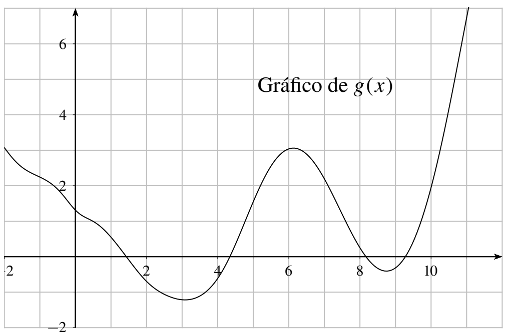
b)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$

c)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$

d)$f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g(x) = 2^{-x}$

7 — Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir





A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $2f(x)$
b) $2g(x)$
c) $-f(x)$
d) $-g(x)$
e) $f(-x)$
f) $g(-x)$
g) $f(|x|)$
h) $g(|x|$
i) $f(-|x|)$
j) $\frac{1}{2}g(x)+1$
k) $-\frac{1}{2}g(x)+1$
l) $-\frac{1}{2}|g(x)|+1$
m) $f(\frac{1}{2}x)$
n) $||f(x)|-1|$
o) $(f+g)(x)$
p) $(f-g)(x)$
q) $(f+g)(|x|)$

8 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $|2x|+1$
b) $(x+3)^4$
c) $(x+3)^4-1$
d) $|(x+3)^4-1|$
e) $|(x+3)^4-1|-1$
f) $|x-1|+1$
g) $\cos|x-1|$
h) $|2x^2-1|$
i) $|2x^2-1|-1$
j) $||2x^2-1|-1|-2$
k) $|(x-4)^6-2|$
l) $\operatorname{sen}(2x)+3$
m) $-2|\operatorname{sen}(2x)+3|+1$
n) $\sqrt{|x+2|}$
o) $2\cos(3x+\pi)$
p) $1+\cos(|x-1|)$
q) $2^{(x-\pi)}$
r) $2^{(x-\pi)}-5$
s) $5^{|x|}$
t) $5^{|x+2|}$
u) $|3^x-5|$
v) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x<0 \\ \frac{x}{2}+1, & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$
w) $f(x)=\begin{cases} \cos(2x), & \text{se } x<1 \\ 2\cos(x-1), & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$
x) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x, & \text{se } |x^2-1|+1<2 \\ \cos(3x), & \text{se } |x^2-1|+1\geq 2 \end{cases}$

9 — Para cada par de funções f,g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f\circ g$, $f\circ f$, $g\circ f$ e $g\circ g$.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=x^3$
$g:[1,\infty)\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\sqrt{x-1}$

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, \quad f(x)=-\frac{1}{x}$
$g:(-\infty,2]\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\sqrt{2-x}$

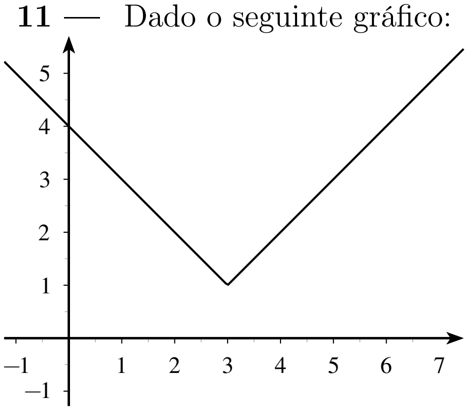
c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
$g : \mathbb{R}\backslash\{2,3\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{sen}(x)$
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

10 — Para as seguintes funções $h(x)$, decomponha-a como compostas de funções mais simples

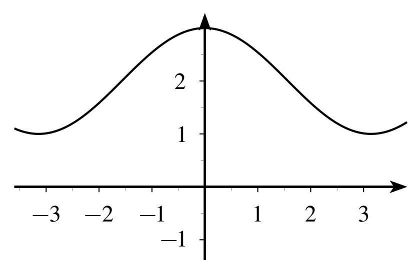
a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$
b) $h(x) = \text{sen}(x + x^2)$
c) $h(x) = \text{cosec}(\cos(x))$
d) $h(x) = \text{sen}(\frac{\cos(x)}{x})$
e) $h(x) = \sec((x+1)^2(x+2))$
f) $h(x) = \text{sen}((\text{sen}^7(x^7+1))^7)$
g) $h(x) = \tan(x^2 + \text{sen}(x^2 + (\cos^2(x))))$
h) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$
i) $h(x) = \text{sen}(\cos(\frac{ax+b}{cx+d}))$
j) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
k) $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$
l) $h(x) = x^{x^x}$
m) $h(x) = e^{2x}$
n) $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$
o) $h(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$
p) $h(x) = 2e^{x+1}$
q) $h(x) = \tan(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

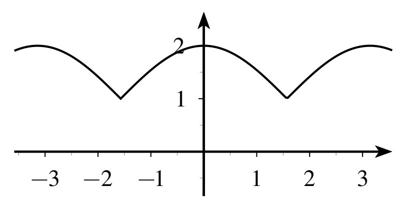
11 — Dado o seguinte gráfico:

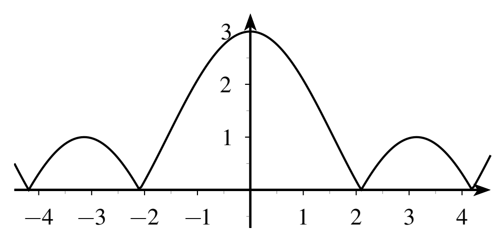


a) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $f(x+1)+2$ como é o gráfico de $f(x)$?
b) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)|+1$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)
c) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)+1|$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)

12 — Os seguintes gráficos foram obtidos a partir do grafico da função $f(x) = \cos(x)$ através de translações, homotetias e módulos. Qual função que representa cada um dos gráficos a seguir:

a)


b)


c)


13 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções,, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $\frac{1}{x+7}$

b) $\frac{1}{x^2+4x+4}$

c) $\frac{x+2}{x^2-1}$.

d) $\sqrt{|t-1|-1}$

e) $\log_3(x-2)$

f) $\log_2(|x|)$

g) $\log_2(2x-|x-1|)$

h) $\tan(x+\pi)$

i) $\tan(-x)+2$

j) $|\tan(x)|$

k) $\tan(|x|)$

l) $\tan(2x-|x-1|)$

14 — Faça os gráficos das seguintes funções modulares:

a) $|x|$

b) $|x|+|x-1|$

c) $|x|+|x-1+|x-2||$

d) $\left|x^2-x\right|+3$

e) $\left|x^2-x\right|+\left|x^2+1\right|$

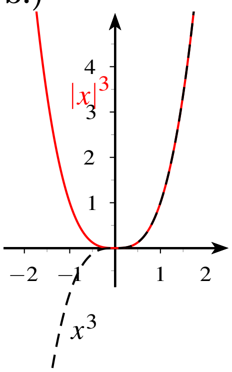
Respostas dos Exercícios

1 Dom $f \circ g = \mathbb{R}$, Im $f \circ g = \{0\}$; Dom $g \circ f = \mathbb{R}$, Im $g \circ f = \{-\pi, 0, \pi\}$;

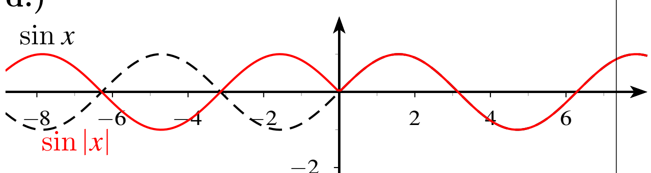
3 a.) $f(x) = x$, $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$ **d.)** $f(x) = 5x^2+1$, $f(x+2) = 5(x+2)^2+1$, $f(-x) = 5(-x)^2+1 = 5x^2+1$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{5(x+h)^2+1-5x^2-1}{h} = \frac{10xh+5h^2}{h} = 10x+5h$

4 a.) O gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de $f(x)$ para $x \geq 0$, isto é, do lado direito do eixo y. Para $x < 0$, o gráfico de $f(|x|)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ relativamente ao eixo y.

b.)



d.)

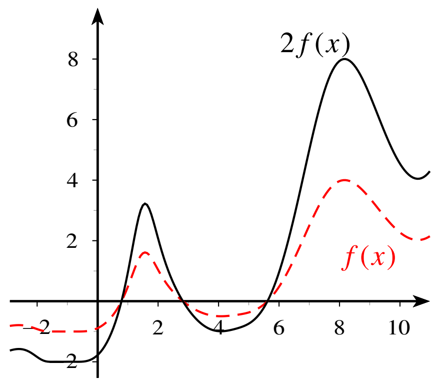


5 O gráfico corresponde à função

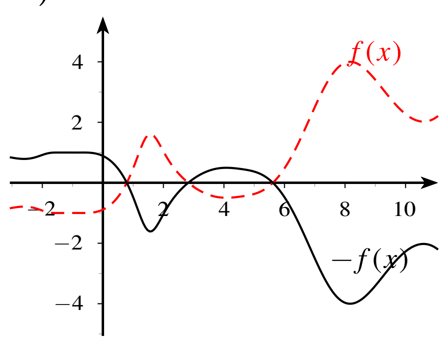
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < -1 \\ -x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\ \frac{-2x+16}{3} & \text{se} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

6 a.) Dom $f = [-2, +\infty)$, Dom $g = \mathbb{R}$, Dom$(f+g)$ = Dom $fg = [-2, +\infty)$; Dom $f/g = [-2, +\infty)\backslash\{0\}$;
Dom $f \circ g = \mathbb{R}$, Dom $g \circ f = [-2, +\infty)$ e
$(f \circ g)(x) = \sqrt{|x|+2}$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+2}$
b.) Dom $f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$, Dom $g = \mathbb{R}$, Dom$(f+g)$ = Dom $fg = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$; Dom $f/g = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$;
Dom $f \circ g = \mathbb{R}\backslash\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, Dom $g \circ f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$ e
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2(x^2-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2(x-2)^2}$ **c.)** Dom $f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$, Dom $g = \mathbb{R}_+$, Dom$(f+g)$ = Dom $fg = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 2\}$; Dom $f/g = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 2\}$;
Dom $f \circ g = \mathbb{R}_+\backslash\{0, 4\}$, Dom $g \circ f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$
d.) Dom $f = \mathbb{R}$, Dom $g = \mathbb{R}$, Dom$(f+g)$ = Dom $fg = \mathbb{R}$; Dom $f/g = \mathbb{R}$;
Dom $f \circ g = \mathbb{R}$, Dom $g \circ f = \mathbb{R}$ e
$(f \circ g)(x) = \sqrt[5]{2^{-3x}}$; $(g \circ f)(x) = 2^{-\sqrt[5]{x^3}}$

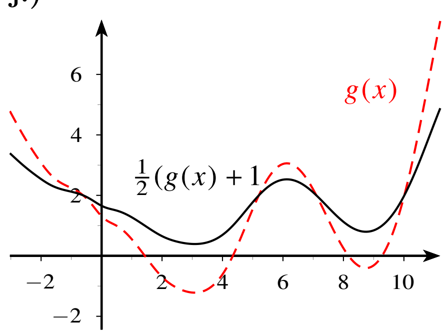
7 a.)



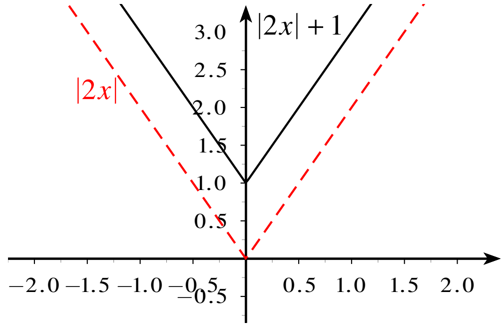
b.)



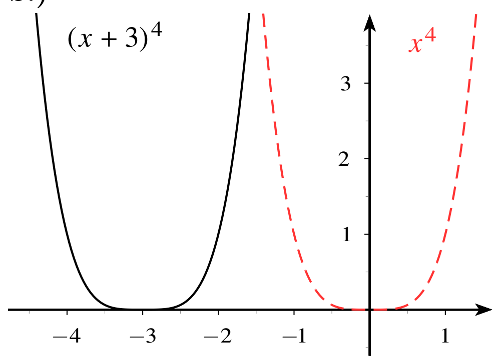
j.)



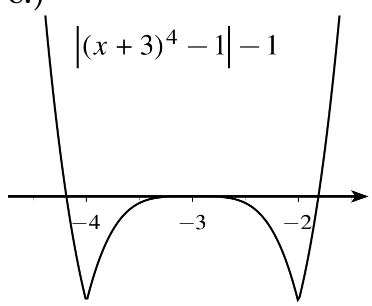
8 a.)



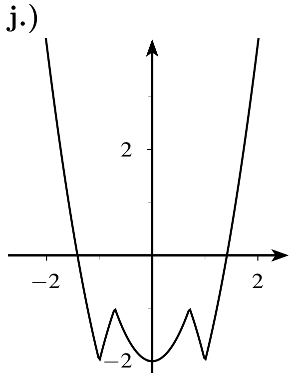
b.)



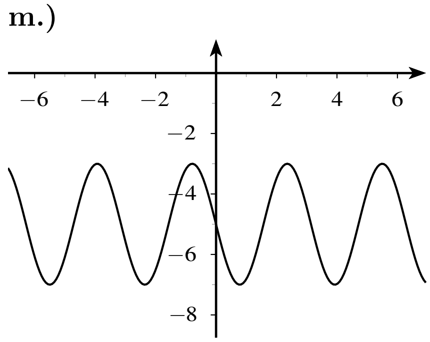
e.)



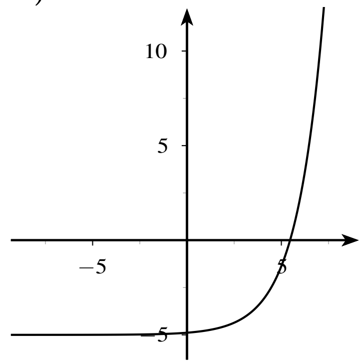
j.)



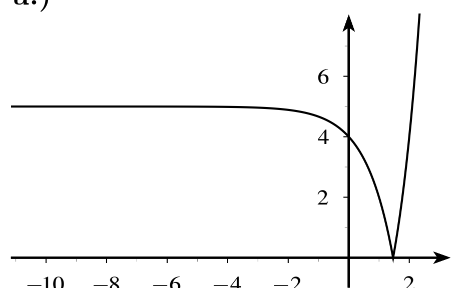
m.)



r.)



u.)

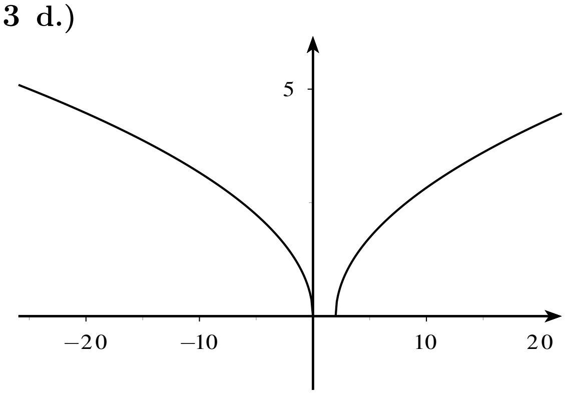


9 b.) $(f\circ g)(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-x}}$; $(f\circ f)(x) = x$; $(g\circ f)(x) = \sqrt{2+\frac{1}{x}}$; $(g\circ g)(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$;
d.) $(f\circ g)(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$; $(f\circ f)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$; $(g\circ f)(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$; $(g\circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$;

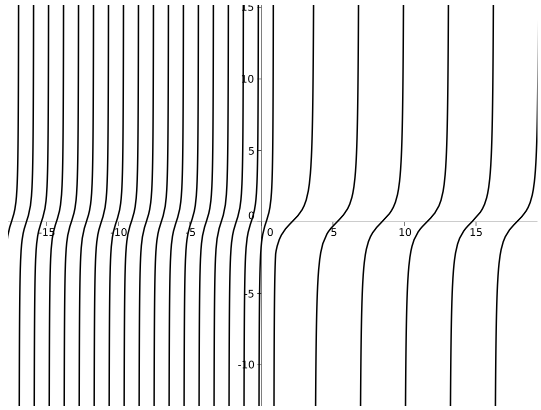
10 b.) $h = g\circ f$, onde $f(x) = x+x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$;
f.) $h = f\circ g\circ g\circ f\circ j\circ g$, onde $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^7$, $j(x) = x+1$;
k.) $h = j\circ f\circ j\circ f\circ g$, onde $f(x) = 1+x$, $g(x) = x^2$, $j(x) = \sqrt{x}$;
l.) $h = f\circ g$, onde $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x^x \ln x$

12 a.) $\cos(x)+2)$
b.) $|\cos(x)|+1$
c.) $|2\cos(x)+1|$

13 d.)



l.)


15
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15