Relações entre as Integrais de Riemann e Lebesgue

Teorema 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.*

(a) Se f é integrável à Riemann, então f é mensurável e integrável à Lebesgue, e

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dm(x);$$

(b) **(Critério de Lebesgue para Integral de Riemann)** *f é integrável à Riemann se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração. Antes de começar, vamos fixar algumas notações.

Dada uma partição $P = \{I_k\}_{k=1}^m$ de $[a, b]$, onde I_k é um intervalo de extremidades $a_k < b_k$, defina as somas de Riemann superior e inferior, respectivamente, por

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} W_k(b_k - a_k),$$

e

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} w_k(b_k - a_k),$$

onde $W_k = \sup\{f(x); x \in I_k\}$ e $w_k = \inf\{f(x); x \in I_k\}$.

Observe também que, definindo

$$G_P = \sum_{k=1}^{n} W_k \mathbb{1}_{I_k},$$

e

$$g_P = \sum_{k=1}^{n} w_k \mathbb{1}_{I_k},$$

então

$$\int G_P dm = \sum_{k=1}^{n} W_k(b_k - a_k) = S_P,$$

e

$$\int g_P dm = \sum_{k=1}^{n} w_k(b_k - a_k) = s_P.$$

Agora, dado um intervalo I, defina a oscilação de f em I por

$$o(f; I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x),$$

e dado $x_0 \in [a, b]$, tome a oscilação de f em x_0 como

$$o(f; x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} o(f; (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)).$$

Assim, se

$$O_n = \{x \in [a, b] : o(f; x) \geq 1/n\},$$

então o conjunto D dos pontos de descontinuidade de f é dado por

$$D = \{x \in [a, b] : o(f; x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n.$$

(a) Se f é integrável à Riemann, então conseguimos uma sequência P_n de partições de $[a,b]$ por intervalos, tal que P_{n+1} refina P_n para todo n, e tal que, se $G_n = G_{P_n}$, $g_n = g_{P_n}$, $S_n = S_{P_n}$ e $s_n = s_{P_n}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int G_n dm = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n dm.$$

Além disso temos

$$-\infty < \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \cdots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \cdots \leq f,$$

e

$$f \leq \cdots \leq G_{n+1} \leq G_n \leq \cdots \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) < \infty.$$

Assim, existem $G, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mensuráveis, com $G \leq f \leq g$ e tais que $G_n \to G$ e $g_n \to g$. Assim, pelo TCM

$$\int G dm = \lim_{n\to\infty} \int G_n dm = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int G_n dm = \int g dm,$$

e portanto

$$\int (G-g)dm = 0,$$

e $G = g$ q.s.. Concluímos assim que $f = G = g$ q.s., e o resultado segue.

(b) ($\Rightarrow$) Para provar a primeira implicação suponha que a $m(D) > c > 0$. Segue que

$$m(O_n) > c$$

para n suficientemente grande.

Dada uma partição $P = \{I_k\}_{k=1}^m$ de $[a,b]$, sejam $I_{m_1}, \ldots, I_{m_k}$ os intervalos em P que possuem algum ponto de O_n no seu interior interior. Como o conjunto dos pontos de fronteira dos I_k tem medida de Lebesgue nula, segue que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^k I_{m_i}^\circ\right) > c,$$

e portanto

$$\begin{aligned} S_P - s_P &= \sum_{k=1}^n (W_k - w_k)(b_k - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^n o(f; I_k)(b_k - a_k) \\ &\geq \sum_{i=1}^k o(f; I_{m_i})(b_{m_i} - a_{m_i}) \\ &> c/n, \end{aligned}$$

para qualquer partição P. Segue portanto que f não é integrável à Riemann.

($\Leftarrow$) Antes de mais nada observe que se $(x_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência convergente de números em O_n, com limite z, como toda vizinhança I de z possui um ponto da sequência, então $o(f; I) > 1/n$ e portanto $z \in O_n$. Isso mostra que O_n é fechado, e portanto compacto.

Suponha então que $m(D) = 0$. Segue que $m(O_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Dado $\epsilon = 1/n$, tome uma cobertura C_ϵ de O_n por intervalos abertos em $[a,b]$. Como O_n é compacto, existe uma subcobertura finita, e podemos, sem perda de generalidade considerar $C_\epsilon = \{V_k\}$ finita.

Como $m(O_n) = 0$, podemos (pela definição da medida exterior) escolher C_ϵ de modo que a soma das medidas dos intervalos seja menor que $\epsilon/2o(f;[a,b])$. Ou seja,

$$\sum_k m(I_k) < \frac{\epsilon}{2o(f;[a,b])}.$$

Defina B_ϵ como o complementar de C_ϵ em $[a,b]$, e observe que $o(f;x) < \epsilon$ para todo $x \in B_\epsilon$. Assim, para cada $x_i \in B_\epsilon \cap \mathbb{Q}$ conseguimos uma vizinhança U_i de x_i tal que

$$o(f;U_i) < \epsilon/2(b-a).$$

A família $\{U_i\}$ destas vizinhanças forma uma cobertura de B_ϵ, e como B_ϵ é compacto, podemos tomar uma subcobertura finita (ou considerar, sem perda de generalidade, que $\{U_i\}$ é finita).

Faça então

$$\begin{aligned}
I_1 &= V_1 \\
I_2 &= V_2 \backslash V_1 \\
I_k &= V_k \backslash (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \\
J_1 &= U_1 \cap B_\epsilon \\
J_2 &= (U_2 \backslash U_1) \cap B_\epsilon \\
J_i &= (U_i \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})) \cap B_\epsilon
\end{aligned}$$

Assim, cada I_k e cada J_i são uniões finitas de intervalos em $[a,b]$, e $P = \{I_k; J_i\}$ forma uma partição finita de $[a,b]$. Vale ainda que

$$\begin{aligned}
S_p - s_P &= \sum_k o(f;I_k)m(I_k) + \sum_i o(f;J_i)m(J_i) \\
&\leq o(f;[I_k]a,b]) \sum_k m(I_k) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_i m(J_i) \\
&\leq o(f;[I_k]a,b]) \frac{\epsilon}{2o(f;[I_k]a,b])} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} m(B_\epsilon) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Mostramos assim que se $m(D) = 0$, para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S_P - s_P < \epsilon$, e portanto f é integrável à Riemann.

$\square$